Simularea Examenului Național de Bacalaureat 2025

varianta 1

Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice, știind că al șaptelea termen al progresiei este egal cu 12.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor *f* și *g*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+6x+9\right)-\log_3^2\left(3x+9\right)+5=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un termen al dezvoltării $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^{2025}$, acesta să fie număr irațional.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,1)$ și este paralelă cu dreapta *d*, de ecuație $x-y-1=0$.

5p **6.** Fie $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin x=\frac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+y-z=1\\x+my+z=3m\\x+y+z=3\end{cases}$, unde *m* este un număr real.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $2m-2$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real *m*, sistemul este compatibil.

5p **c)** Notăm cu $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ soluția sistemului pentru $m=1$. Determinați valoarea minimă a expresiei $E=x_0^2+y_0^2+z_0^2$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & -8\\ 3 & 12\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{10}\right\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+10ab)$, pentru orice $X(a),X(b)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ cu elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(a)$ în acest grup.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $\left(X(a)\right)^3=I_2+\frac{7}{10}A$ are soluție în grupul $(G,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Arătați că punctele de inflexiune ale graficului funcției *f* sunt coliniare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4 x f(x)dx=2$.

5p **b)** Determinați primitiva *G* a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f^2(x)$, pentru care $G(3)=\frac{\pi}{3}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^{2x+1}f(t)\,dt-\int_0^{x+1}f(t)\,dt\right)$.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

varianta 1

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_7=12\Rightarrow a_1+6r=12$	**2p**
	$\Rightarrow S_{13}=\dfrac{13\cdot(a_1+a_{13})}{2}=\dfrac{13\cdot(a_1+a_1+12r)}{2}=13\cdot(a_1+6r)=13\cdot 12=156$	**3p**
2.	$M(x,y)\in G_f\cap G_g\Rightarrow f(x)=g(x)$, de unde $x^2-x=0$	**2p**
	Rezultă $x=0$, pentru care $y=0$, sau $x=1$, pentru care $y=-1$, deci $G_f\cap G_g=\{M_1(0,0);M_2(1,-1)\}$	**3p**
3.	Condiții de existență: $x^2+6x+9>0$ și $3x+9>0$, de unde $x\in(-3,\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(x^2+6x+9\right)=\log_3(x+3)^2=2\log_3(x+3)$, $\log_3\left(3x+9\right)=\log_3 3+\log_3(x+3)$	**2p**
	Notând $\log_3(x+3)=t$, $t\in\mathbb{R}$, rezultă $2t-(t+1)^2+5=0$, de unde $t^2=4$, deci $t\in\{-2,2\}$; obținem soluțiile $x_1=-\dfrac{26}{9}$ și $x_2=6$, care aparțin intervalului $(-3,\infty)$	**2p**
4.	Numărul de termeni ai dezvoltării este $2025+1=2026$, deci sunt 2026 cazuri posibile	**1p**
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow C_{2025}^{k}\cdot 5^{\frac{2025-k}{4}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\dfrac{2025-k}{4}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{1,5,9,...,2025\}$, deci sunt $\dfrac{2025-1}{4}+1=507$ termeni raționali și $2026-507=1519$ termeni iraționali	**2p**
	$p=\dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\dfrac{1519}{2026}$	**2p**
5.	Dacă h este dreapta căutată, din $m_d=1$ și $h\parallel d$ rezultă $m_h=m_d$, deci $m_h=1$	**3p**
	Ecuația dreptei h este $y-y_A=m_h\left(x-x_A\right)$, de unde se obține $x-y+1=0$	**2p**
6.	Notând $t=\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, avem $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, deci $\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{4}{5}$, de unde $t=2$ sau $t=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ obținem $\dfrac{x}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)>1$, deci $\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&m&1\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{L_3-L_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&m&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&m\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=2\left(1\cdot m-1\cdot 1\right)=2m-2$	**2p**
b)	Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avem $\det A\neq 0$, deci sistemul este compatibil (determinat)	**2p**
	Pentru $m=1$, obținem $\mathrm{rang}\,A=2$, un minor principal este $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$, și există un singur minor caracteristic, și anume $\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=0$, deci sistemul este compatibil (nedeterminat)	**3p**
c)	Pentru $m=1$ soluția sistemului este $x_0=\alpha,\ y_0=2-\alpha,\ z_0=1$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$E=\alpha^2+(2-\alpha)^2+1=2(\alpha-1)^2+3$; $E(\alpha)\geq 3$ și $E(1)=3$, deci $\min(E)=3$	**2p**

2.a)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2$	**2p**
	$A^2=10A$, deci $X(a)\cdot X(b)=I_2+aA+bA+10abA=I_2+(a+b+10ab)A=X(a+b+10ab)$	**3p**
b)	$X(a)\cdot X(a')=X(a')\cdot X(a)=X(0)\Rightarrow a+a'+10aa'=0$, de unde $a'=-\dfrac{a}{1+10a}$	**3p**
	$-\dfrac{a}{1+10a}\neq-\dfrac{1}{10}$, pentru $a\neq-\dfrac{1}{10}$; așadar $X\left(-\dfrac{a}{1+10a}\right)\in G$, deci inversul lui $X(a)$ este $X\left(\dfrac{-a}{1+10a}\right)$	**2p**
c)	$X(a)\cdot X(b)=X\left(\dfrac{(10a+1)(10b+1)-1}{10}\right)$, $\left(X(a)\right)^2=X\left(\dfrac{(10a+1)^2-1}{10}\right)$, $\left(X(a)\right)^3=X\left(\dfrac{(10a+1)^3-1}{10}\right)$	**3p**
	Cum $I_2+\dfrac{7}{10}A=X\left(\dfrac{7}{10}\right)$, obținem $\dfrac{(10a+1)^3-1}{10}=\dfrac{7}{10}$, deci $(10a+1)^3=8$, de unde $a=\dfrac{1}{10}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x'\cdot(x^2+3)-x\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$; *f* este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$, crescătoare pe $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\sqrt{3},\infty\right)$, deci $x=-\sqrt{3}$ este punct de minim și $x=\sqrt{3}$ este punct de maxim	**3p**
	f este continuă, deci $\operatorname{Im} f$ este un interval; $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ și $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, de unde rezultă că $\operatorname{Im} f=\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$	**2p**
c)	$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}=0\Leftrightarrow x\in\{-3,0,3\}$; *f* concavă pe $(-\infty,-3]$ și pe $[0,3]$; *f* convexă pe $[-3,0]$ și pe $[3,\infty)$, deci graficul funcției *f* are punctele de inflexiune $A(-3,f(-3))$, $B(0,f(0))$, $C(3,f(3))$	**3p**
	$\begin{vmatrix}-3 & f(-3) & 1\\ 0 & f(0) & 1\\ 3 & f(3) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -\frac{1}{4} & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & \frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}=0$, deci A, B, C sunt coliniare	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^4 x f(x)dx=\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\left(\sqrt{x^2+9}\right)'dx=$	**2p**
	$=\sqrt{x^2+9}\Big\vert_0^4=\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$	**3p**
b)	$g(x)=f^2(x)=\dfrac{1}{x^2+9}\Rightarrow\displaystyle\int g(x)dx=\int\frac{1}{x^2+9}dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\mathcal{C}$, deci $G(x)=\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+c$, $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(3)=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}1+c=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow c=\dfrac{\pi}{4}$, deci $G(x)=\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
c)	Dacă *F* este o primitivă a funcției *f*, atunci $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^{2x+1}f(t)dt-\int_0^{x+1}f(t)dt\right)=\lim_{x\to0}\frac{\int_{x+1}^{2x+1}f(t)dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(2x+1)-F(x+1)}{x}=$	**2p**
	$\overset{L'H\ \left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=\!=}\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{F'(2x+1)\cdot(2x+1)'-F'(x+1)\cdot(x+1)'}{1}=\lim_{x\to0}\left(2f(2x+1)-f(x+1)\right)=f(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}$	**3p**