Simularea Examenului Național de Bacalaureat 2025

varianta 1

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_3 2$, $\log_3 4$ și $\log_3 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$. Determinați numărul real x pentru care $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{6-x}=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta sa aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că O este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde $x\in\mathbb{R}$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A(0)=2$.

5p **b)** Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y\ \ =1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-2$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=25$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(x+2)^2}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\le\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\le 4$, pentru orice $x,y\in[-2,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-4x+5)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b, c pentru care $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x(ax^2+bx+c)$ este o primitivă a lui f.

Simularea Examenului național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat

varianta 1

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 4^2=$	**2p**
	$=2\log_3 4\Rightarrow \log_3 2,\log_3 4,\log_3 8$ termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**3p**
2.	$f(x)=x\Rightarrow x^2-3x+4=x\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow$	**2p**
	$(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$	**3p**
3.	$\sqrt{6-x}=x\Rightarrow 6-x=x^2\Rightarrow x^2+x-6=0$, de unde $x=-3,\ x=2$	**3p**
	$x=-3$ nu verifică ecuația, $x=2$ verifică, deci $x=2$ este singura soluție a ecuației	**2p**
4.	Numărul de cazuri favorabile este cardinalul mulțimii $\left\{\overline{ab}\,\middle\vert\, b=2a,\ a\neq 0\right\}=\{12,24,36,48\}$, deci sunt 4 cazuri favorabile.	**2p**
	Numărul de cazuri posibile este cardinalul mulțimii $\{10,11,12,\ldots 99\}$, deci există 90 de cazuri posibile, de unde rezultă că $p=\dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**3p**
5.	O este mijlocul segmentului $AB\Rightarrow x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow x_B=2x_O-x_A=1$	**2p**
	$y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow y_B=-2$, deci $B(1,-2)$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{2}-2=2-2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A(0)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=(0+8+0)-(6+0+0)$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
b)	$\det A(a)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{vmatrix}=(-3a+8+0)-(6+0-4a)=a+2$	**2p**
	$A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A(a)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**3p**

c)	Pentru $a \neq -2 \Rightarrow \det A(a) \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat (are soluție unică)	**2p**
	Cu formulele lui Cramer $x = \frac{d_x}{d}, y = \frac{d_y}{d}, z = \frac{d_z}{d}$, obținem că soluția sistemului este $(1,-1,0)$	**3p**
2.a)	$x*(-2) = (x+2)(-2+2) - 2 =$	**2p**
	$= 0 - 2 = -2$	**3p**
b)	$f(x)*f(y) = (e^x - 2 + 2)(e^y - 2 + 2) - 2 = e^x \cdot e^y - 2$	**3p**
	$f(x+y) = e^{x+y} - 2 = e^x \cdot e^y - 2$, deci $f(x+y) = f(x)*f(y)$	**2p**
c)	$x*x = (x+2)^2 - 2$, $x*x*x = (x+2)^3 - 2$	**3p**
	$x*x*x = 25 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 27 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 3^3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\left((x+2)^2\right)' \cdot e^x - (x+2)^2 \cdot \left(e^x\right)'}{e^{2x}} =$	**2p**
	$= \frac{e^x(2x+4-x^2-4x-4)}{e^{2x}} = \frac{-x^2-2x}{e^x} = \frac{-x(x+2)}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} \overset{L'H}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+4}{e^x} \overset{L'H}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$,	**3p**
	deci asimptota orizontală la graficul funcției spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y = 0$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $[-2,0]$, f este descrescătoare pe $[0,\infty)$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 4$, deci $0 \leq f(x) \leq 4$, pentru orice $x \in [-2,\infty)$	**3p**
	$x, y \in [-2,\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4, 0 \leq f(y) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)f(y)} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2-4x+5)}{e^x}dx =$	**2p**
	$= \int_0^1 (x^2-4x+5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big\|_0^1 = \frac{10}{3}$	**3p**
b)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x) = e^x(x^2-2x+1)$	**3p**
	$= e^x(x-1)^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ convexă	**2p**
c)	$F'(x) = e^x(ax^2+bx+c) + e^x(2ax+b) = e^x \cdot \left(ax^2 + (b+2a)x + (b+c)\right)$	**2p**
	$ax^2 + (b+2a)x + (b+c) = x^2 - 4x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$	**3p**