

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.



SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați partea întreagă a numărului real $a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5}$.
- 5p 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - (2m+1)x + m(m-1) \geq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_4 2x + \log_{4x} 8x = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.
- 5p 5. Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 6$, $MP = 8$ și $\sphericalangle M = 90^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{MP}$.
- 5p 6. Determinați numărul real x , știind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + a \cdot z = b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
- 5p a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul matricei sistemului este nul.
- 5p b) Determinați valorile parametrilor a și b pentru care sistemul este incompatibil.
- 5p c) Să se arate că există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție (x, y, z) cu x, y, z în progresie aritmetică.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2}$.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați perechile de numere naturale a și b , știind că $a \circ b = 1$.
- 5p c) Demonstrați că pentru orice număr natural n , $n \geq 2$, numărul $\underbrace{1 \circ 1 \circ \dots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ nu este natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- 5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 5p c) Să se arate că $e^\pi > \pi^e$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot e^x$, $n \in \mathbb{N}$.

- 5p a) Calculați $\int f_0(x) dx$ și $\int (f_0(x) + f_1(x)) dx$.
- 5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f_3 este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- 5p c) Arătați că orice primitivă a funcției f_{2024} este concavă pe intervalul $(-2024, 0)$.



Simulare-Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE



Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

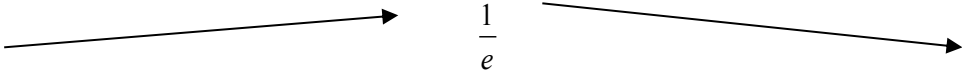
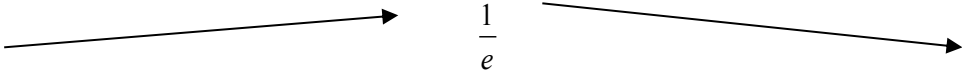
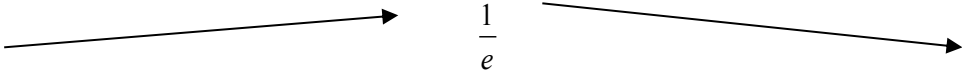
1.	$a = 5 + \sqrt{5}$ Cum $2 < \sqrt{5} < 3$, obținem $[a] = 5 + [\sqrt{5}] = 7$	2p 3p
2.	$\Delta = (2m + 1)^2 - 4m(m - 1) = 8m + 1$ $\Delta \leq 0$, deci $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$	2p 3p
3.	$x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ Ecuația devine $\log_2 x + \frac{1 + \log_2 x}{2} + \frac{3 + \log_2 x}{2 + \log_2 x} = 1$ $\log_2 x = -1, \log_2 x = -\frac{4}{3}$ $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$	1p 1p 1p 2p
4.	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ \overline{ab} cu $a, b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ sunt 25 de numere prin urmare rezultă 25 de cazuri favorabile \overline{ab} cu $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ și $b \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ sunt 90 de numere prin urmare rezultă 90 de cazuri posibile $p = \frac{5}{18}$	1p 2p 1p 1p
5.	$\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram $\sphericalangle M = 90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ = NP = 10$	2p 3p
6.	$\text{tg}x + \frac{1}{\text{tg}x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(\text{tg}x + 1)^2}{\text{tg}x} = 0$ $\text{tg}x = -1$ și, cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, obținem $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p>1.a)</p>	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix} = -5a + 20$ $-5a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = 4$	<p>3p 2p</p>
<p>b)</p>	<p>Dacă $a \neq 4$ sistemul este compatibil determinat, deci $a = 4$.</p> <p>Matricea sistemului are rangul 2, un minor principal fiind $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.</p> $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -5b + 20 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 4$	<p>1p 2p 2p</p>
<p>c)</p>	<p>Dacă $a \neq 4$ cu formulele lui Cramer obținem $x = \frac{3(b-a)}{20-5a}$, $y = \frac{b-a}{20-5a}$, $z = \frac{20-5b}{20-5a}$</p> $2y = x + z \Leftrightarrow a = 20 - 4b$ <p>Așadar pentru $a \neq 4$ și $b = \frac{20-a}{4}$ soluția (x, y, z) verifică cerința.</p>	<p>3p 1p 1p</p>
<p>2.a)</p>	$x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1} - 1 =$ $= \sqrt{x^2(y^2 + 1) + (y^2 + 1) - 1} = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1) - 1}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p>2p 3p</p>
<p>b)</p>	$\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 1} = 1 \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b^2 + 1) = 2$ <p>Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1, b=0$ sau $a=0, b=1$</p>	<p>2p 3p</p>
<p>c)</p>	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \dots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n - 1}, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2$ <p>Dacă $\sqrt{2^n - 1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = (2m + 1)^2$, de unde obținem $2^{n-1} = 2m^2 + 2m + 1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$</p>	<p>2p 3p</p>



<p>1.a)</p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ <p>rezultă $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ <p>rezultă $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>												
<p>b)</p>	$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ <table border="1" data-bbox="209 647 1386 853"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>e</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td colspan="3">+++++0-----</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td colspan="3">  </td> </tr> </tbody> </table> <p>$x = e$ punct de maxim</p>	x	0	e	$+\infty$	$f'(x)$	+++++0-----			$f(x)$				<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
x	0	e	$+\infty$											
$f'(x)$	+++++0-----													
$f(x)$														
<p>c)</p>	<p>$e < \pi$, cum f este descrescătoare pe $(e, +\infty)$ avem $f(e) > f(\pi)$</p> $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Leftrightarrow \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \Leftrightarrow e^\pi > \pi^e.$	<p>2p</p> <p>3p</p>												
<p>2.a)</p>	$\int f_0(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$ $\int (f_0(x) + f_1(x)) dx = \int (e^x + x \cdot e^x) dx = \int (x \cdot e^x)' dx = x \cdot e^x + C$	<p>2p</p> <p>3p</p>												
<p>b)</p>	<p>Fie F o primitivă a lui f_3; $F'(x) = f_3(x) = x^3 \cdot e^x < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$, deci F este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>												
<p>c)</p>	<p>Fie G o primitivă a funcției $f_{2024} \Rightarrow G'(x) = f_{2024}(x), \forall x \in (-2024, 0)$ $G''(x) = f'_{2024}(x) = x^{2023} \cdot (2024 + x) \cdot e^x < 0, \forall x \in (-2024, 0)$ prin urmare G este concavă pe intervalul $(-2024, 0)$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>												