Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\log_2 x+\log_4 2x+\log_{4x} 8x=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $\sphericalangle M=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinați numărul real *x*, știind că $tgx+ctgx+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+a\cdot z=b \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Determinați valorile parametrilor a și b pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție *(x,y,z)* cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale *a* și *b*, știind că $a\circ b=1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural *n*, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\cdots\circ 1}_{1\ de\ n\ ori}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{\pi}>\pi^{e}$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot e^x$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Calculați $\int f_0(x)\,dx$ și $\int \left(f_0(x) + f_1(x)\right)dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f_3 este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției f_{2024} este concavă pe intervalul $(-2024, 0)$.

Simulare-Examenul national de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$	**2p**
	Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+[\sqrt{5}]=7$	**3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**1p**
	Ecuația devine $\log_2 x+\frac{1+\log_2 x}{2}+\frac{3+\log_2 x}{2+\log_2 x}=1$	**1p**
	$\log_2 x=-1, \log_2 x=-\frac{4}{3}$	**1p**
	$x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$	**2p**
4.	$p=\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$	**1p**
	$\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere prin urmare rezultă 25 de cazuri favorabile	**2p**
	$\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,\ldots,9\}$ și $b\in\{0,1,2,3,\ldots,9\}$ sunt 90 de numere prin urmare rezultă 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{5}{18}$	**1p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram	**2p**
	$\sphericalangle M=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**3p**
6.	$tgx+\frac{1}{tgx}+2=0\Leftrightarrow\frac{(tgx+1)^2}{tgx}=0$	**2p**
	$tgx=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & a\end{vmatrix}=-5a+20$ $-5a+20=0\Leftrightarrow a=4$	**3p** **2p**
b)	Dacă $a\neq 4$ sistemul este compatibil determinat, deci $a=4$. Matricea sistemului are rangul 2, un minor principal fiind $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$. $\Delta_{car}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow -5b+20\neq 0\Leftrightarrow b\neq 4$	**1p** **2p** **2p**
c)	Dacă $a\neq 4$ cu formulele lui Cramer obținem $x=\dfrac{3(b-a)}{20-5a}$, $y=\dfrac{b-a}{20-5a}$, $z=\dfrac{20-5b}{20-5a}$ $2y=x+z\Leftrightarrow a=20-4b$ Aşadar pentru $a\neq 4$ şi $b=\dfrac{20-a}{4}$ soluția (x,y,z) verifică cerința.	**3p** **1p** **1p**
2.a)	$x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1-1}=$ $=\sqrt{x^2(y^2+1)+(y^2+1)-1}=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
b)	$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)-1}=1\Leftrightarrow(a^2+1)(b^2+1)=2$ Cum a şi b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**2p** **3p**
c)	$\underbrace{1\circ 1\circ\dots\circ 1}_{1\text{ de } n \text{ ori}}=\sqrt{2^n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$ Dacă $\sqrt{2^n-1}\in\mathbb{N}$, există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=k^2\Rightarrow k$ impar, deci există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=(2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1}=2m^2+2m+1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta	**2p** **1p** **1p** **1p**
b)	$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & +++++++++++++++++++++ & 0 & ---------------------- & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow & \end{array}$ $x=e$ punct de maxim	**1p** **1p** **2p** **1p**
c)	$e<\pi$, cum f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$ $\frac{ln\, e}{e}>\frac{ln\,\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi\, ln\, e>e\, ln\,\pi\Leftrightarrow ln\left(e^{\pi}\right)>ln\left(\pi^{e}\right)\Leftrightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$.	**2p** **3p**
2.a)	$\int f_0(x)dx=\int e^x\,dx=e^x+C$ $\int\left(f_0(x)+f_1(x)\right)dx=\int\left(e^x+x\cdot e^x\right)dx=\int\left(x\cdot e^x\right)'\,dx=x\cdot e^x+C$	**2p** **3p**
b)	Fie F o primitivă a lui f_3; $F'(x)=f_3(x)=x^3\cdot e^x<0,\ \forall x\in(-\infty,0)$, deci F este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$	**3p** **2p**
c)	Fie G o primitivă a funcţiei $f_{2024}\Rightarrow G'(x)=f_{2024}(x)$, $\forall x\in(-2024,0)$ $G''(x)=f'_{2024}(x)=x^{2023}\cdot(2024+x)\cdot e^x<0,\ \forall x\in(-2024,0)$ prin urmare G este concavă pe intervalul $(-2024,0)$	**2p** **3p**