Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Să se determine numărul real x știind că numerele x+1, 2x-3 și x-3 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 2024x + 2025 = 0$. Comparați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ cu $\frac{2025}{2026}$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $log_5(3x+1) = 1 + log_5(x-1)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor P_3, A_3^1, C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră se consideră punctele de coordonate $A(1,1), B(2,3)$, $C(3,m)$. Să se determine numărul real m pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.
5p	**6.** Se se calculeze produsul P = (cos 1^0 - cos 9^0) (cos 2^0 - cos 8^0)... (cos 9^0 - cos 1^0).

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ x + by + b^2z = b \\ x + cy + c^2z = c \end{cases}$, unde a, b, c sunt numere reale distincte două câte două și $A(a,b,c)$ matricea asociată sistemului.
5p	**a)** Arătați că $det A(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.
5p	**b)** Să se rezolve ecuația $\det A(1, 2024^x, 2025^x) = 0$.
5p	**c)** Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de a, b, c.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 45(x+y) + 45^2 + 45$.
5p	**a)** Să se arate că $x * y = (x-45)(y-45) + 45$, oricare ar fi x, y numere reale.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ” pe mulțimea numerelor reale.
5p	**c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x * x * x * \ldots * x * x}_{\text{de 2025 ori}} = 2^{2025} + 45$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2 - lnx}{2x\sqrt{x}}$.
5p	**b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $2024^{45} > 2025^{\sqrt{2024}}$.
	2. Se consideră funcțiile $f, F: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - lnx$, $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - xlnx + 2025$.
5p	**a)** Arătați că F este o primitivă a funcției f.
5p	**b)** Demonstrați că graficul funcției F are un singur punct de inflexiune.
5p	**c)** Demonstrați că primitiva G: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției g: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot F(x)$ cu proprietatea că $G(1) = 2025$ este de forma $G(x) = \frac{F^2(x) - F^2(1)}{2} + 2025$.

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x+1, 2x-3$ *și* $x-3$ sunt termeni consecutivi a unei progresii aritmetice dacă și numai dacă $2(2x-3) = (x+1)+(x-3)$ $4x-6 = 2x-2,\ x=2$	**3p** **2p**
2.	$x_1+x_2 = 2024,\ x_1 \cdot x_2 = 2025$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{2024}{2025}$ Comparația $2024 \cdot 2026$ *cu* 2025^2 $2024 \cdot 2026 = (2025-1)(2025+1)$ $2024 \cdot 2026 = 2025^2 - 1$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} < \frac{2025}{2026}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
3.	Condițiile de existență ce se impun sunt $3x+1>0$ *și* $x-1>0$ de unde $x>1$ Ecuația se reduce la $log_5(3x+1) = log_5 5(x-1)$, $3x+1=5x-5$, $x=3$ care convine	**1p** **3p** **1p**
4.	Număr cazuri posibile: 3 $P_3=6, A_3^1=3, C_4^3=4$ Număr cazuri favorabile: 2 $p = \frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile} = \frac{2}{3}$	**1p** **1p** **1p** **2p**
5.	Pentru ca punctele A, B, C să fie coliniare trebuie ca $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, adică $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$, Deci $m=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	Se pune în evidență factorul $(\cos 5^0 - \cos 5^0)$ $P = (\cos 1^0 - \cos 9^0)(\cos 2^0 - \cos 8^0)(\cos 5^0 - \cos 5^0)\dots(\cos 9^0 - \cos 1^0)$ $(\cos 5^0 - \cos 5^0) = 0$ atunci $P=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1	a)	$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} =$ $= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$	**3p** **2p**

	b) $din\ a)$ rezultă că ecuația este echivalentă cu $(1-2024^x)(2025^x-1)(2024^x-2025^x)=0$ Așadar $1=2024^x$ și $2025^x=1$ și $2024^x-2025^x=0$ deci soluția este $x=0$	1p 3p 1p
	c) Deoarece numerele a,b,c sunt reale distincte avem detA≠0, Deci sistemul are soluție unică Aplicând formulele lui Cramer obținem $x=0, y=1, z=0$	2p 3p
2	$a)$ gruparea termenilor Factor comun și finalizare	2p 3p
	b) Verificarea comutativității $\exists e\in \mathbb{R}$astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$ Finalizare $e=46\in\mathbb{R}$	1p 1p 3p
	c)demonstrarea $\underbrace{x*x*x*\ldots*x*x}_{\text{de 2025 ori}}=(x-45)^n+45$, n număr natural, nenul particularizând, obținem ecuația $(x-45)^{2025}+45=2^{2025}+45$ finalizare $x-45=2$, de aici $x=47\in\mathbb{R}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) Cum f este derivabilă $f'(x)=\dfrac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{lnx}{2\sqrt{x}}}{x}$ $f'(x)=\frac{2-lnx}{2x\sqrt{x}}$	3p 2p
	b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^2$ f este crescătoare pe $(0, e^2]$ și descrescătoare pe $[e^2,\infty)$	2p 3p
	$c)$ Logaritmând inegalitatea obținem $ln2024^{\sqrt{2025}}>ln2025^{\sqrt{2024}}\Leftrightarrow$ $\sqrt{2025}$ ln2024> $\sqrt{2024}$ ln2025 $\Leftrightarrow \frac{ln2024}{\sqrt{2024}}>\frac{ln2025}{\sqrt{2025}}$ Cum 2024 și 2025 sunt în intervalul (e^2,∞) și funcția este descrescătoare pe acest interval avem din 2024<2025 rezultă f(2024) > f(2025) , atunci $\frac{ln2024}{\sqrt{2024}}>\frac{ln2025}{\sqrt{2025}}$ și $ln2024^{\sqrt{2025}}>ln2025^{\sqrt{2024}}$, așadar $2024^{45}>2025^{\sqrt{2024}}$.	1p 1p 1p 2p
2.	a) Cum F este derivabilă $\forall x\in(0,\infty)$, pentru determinarea lui f(x), calculăm $F'(x)=f(x), \forall x\in(0,\infty)$ verificare $f(x)=x-lnx$	2p 3p
	b) $F''(x)=f'(x)=\frac{x-1}{x}, \forall x\in(0,\infty)$ deci F este concavă pe (0,1) și convexă pe $(1,\infty)$ așadar singurul punct de inflexiune este x=1	2p 2p 1p
	c) $\int g(x)dx=\int F'(x)$ F(x)dx= $\frac{1}{2}F^2$(x) +C dar G(1)=2025, atunci $\frac{1}{2}F^2(1)$ +C= 2025 C= $\frac{4050-F^2(1)}{2}$ Deci o primitivă în condițiile problemei este $\frac{1}{2}F^2(x)+\frac{4050-F^2(1)}{2}=\frac{F^2(x)-F^2(1)}{2}+2025$	2p 1p 1p 1p