Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"
Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE
9 noiembrie 2024
Clasa a VIII a

Subiectul I (7 puncte)

1. Arătați că ecuația $x^2 - 15y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.

2. Rezolvați ecuația
$|x+1| + |x^2 - 2023x - 2024| = 2023\,(1 + |x - 2024|)$ în mulțimea numerelor reale.

Subiectul II (7 puncte)

1. Să se demonstreze că există o infinitate de perechi (a, b) de numere iraționale, pentru care $a - b = ab \in \mathbb{Q}$.

2. Dacă $a, b > 0$ și $ab = 1$ atunci $\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} \geq 1.$

Subiectul III (7 puncte)

1. Se dă triunghiul ABC în care $AB > AC.$ Bisectoarea unghiului exterior din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în E. Fie $EF \perp AB,\ F \in AB.$ Să se demonstreze că $AB - AC = 2AF.$

2. Se consideră șase puncte în spațiu, oricare patru necoplanare. Se colorează cu verde sau negru fiecare segment determinat de două dintre aceste puncte. Arătați că există trei puncte printre acestea care determină un triunghi cu laturile la fel colorate.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 120 minute
Timp de acomodare subiect: 30 minute
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"
Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE
9 noiembrie 2024
Clasa a VIII a
BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

1. Avem succesiv $(x-\sqrt{15}y)(x+\sqrt{15}y)=1 \Rightarrow (x-\sqrt{15}y)^2(x+\sqrt{15}y)^2=1$
$\Rightarrow(x^2+15y^2-2\sqrt{15}xy)(x^2+15y^2+2\sqrt{15}xy)=1 \Leftrightarrow$
$(x^2+15y^2)^2-15(2xy)^2=1$ 1p
Dacă (x_0, y_0) este soluție, atunci $({x_0}^2+15{y_0}^2; 2x_0y_0)$ este soluție. Cum (4, 1) sau (-4, -1) sunt soluții, avem prin recurență o infinitate de soluții. 2p

2. Avem $x^2-2023x-2024=(x+1)(x-2024)$ 1p
Ecuația se scrie $(|x+1|-2023)(|x-2024|+1)=0$ 1p
Finalizare
$x \in \{-2024, 2022\}$ 1p

Oficiu 1 p
Total 7 p

Subiectul II (7 puncte)

1. Fie $a=n+\sqrt{m},\ b=-n+\sqrt{m},\ m,n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{m}\notin\mathbb{Q}$
Avem $2n=m-n^2$, rezultă $m=n^2+2n$.
Din $n^2<m<(n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{m}\notin\mathbb{Q}$ 2p
Putem lua $a=n+\sqrt{n^2+2n},\ b=-n+\sqrt{n^2+2n}$ 1p

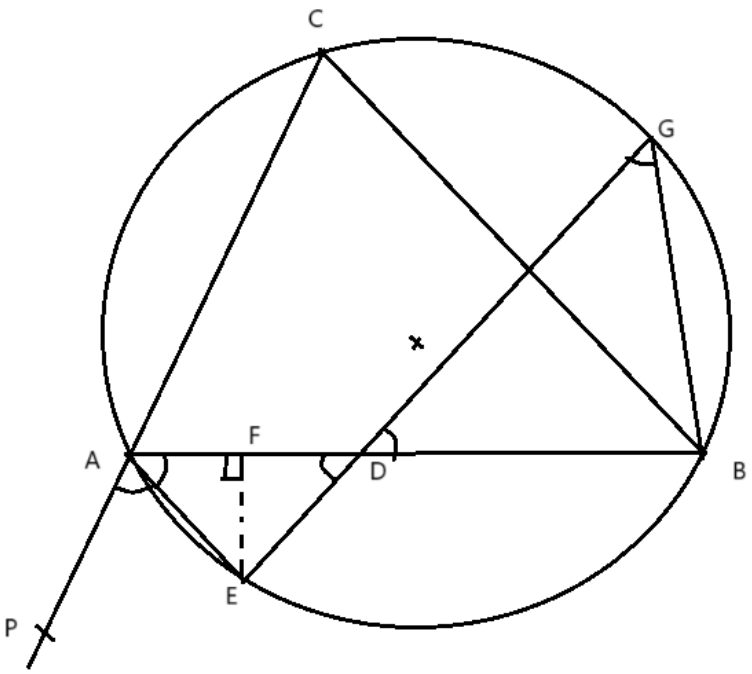
2. Avem succesiv

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}=\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{\frac{1}{a^5}}{\frac{1}{a^3}+1}=\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{1}{a^2+a^5}\geq 1$$

$a^7+1\geq a^5+a^2 \Leftrightarrow a^7-a^5-a^2+1\geq 0$ 2p
Finalizare, avem $(a-1)^2(a+1)(a^4+a^3+a^2+a+1)\geq 0$ 1p

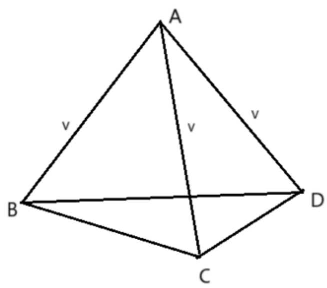
Oficiu 1 p
Total 7 p

Subiectul III (7 puncte)



1.
Fie $D \in BF$ astfel încât $AF = FD \Rightarrow AE = ED.$ $DE \cap \mathcal{C} = \{G\}$ …………….1p
Alegem $P \in AC$ astfel încât A se află între P și C.
$\sphericalangle BGE = \sphericalangle BAE = 1/2\widehat{EB}.$ $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle BDG \Rightarrow \Delta BDG$ isoscel, deci BD=BG.
$\sphericalangle GEA = 180^{\circ} - 2\sphericalangle EAD = 180^{\circ} - \sphericalangle PAD = \sphericalangle BAC$ 1p
$\Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{BGC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BG} \Rightarrow AC = BG$ deci $AB - AC = AB - BG = AB - BD = AD = 2AF.$ 1p

2. Oricare trei din punctele date sunt necoliniare, în caz contrar vor exista patru puncte coplanare (contradicție!)..1p
Fie A, B, C, D, E, F cele 6 puncte. Considerăm segmentele AB, AC, AD, AE, AF , trei dintre acestea vor fi la fel colorate.
Să considerăm că AB, AC, AD sunt verzi, atunci BC, CD, DB sunt negre, în caz contrar, dacă, să spunem că BC ar fi verde, atunci laturile triunghiului ABC ar fi verzi (analog celelalte posibilități). 2p



Oficiu 1 p

Total 7 p

Notă: Orice altă soluție corect rezolvată va fi punctată corespunzător