Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ**
***SPERANȚE OLIMPICE***
9 noiembrie 2024
Clasa a VII a

**Subiectul I ( 7 puncte)**

1. Fie numărul rațional $x = (3\sqrt{3} - \sqrt{26}\,)^{100}$.
   a) Demonstrează că $3\sqrt{3} - \sqrt{26} < \frac{1}{8}$ .
   b) Află primele 90 de zecimale ale numărului $x$.

2. Fie $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}$ .
   a) Demonstrează că $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.
   b) Demonstrează că $0{,}2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0{,}3$.

**Subiectul II ( 7 puncte)**

Se dau mulțimile:

$A = \left\{a_n \middle| \, a_n \in \mathbb{Q}, a_n = \frac{n^2-n+4}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100\right\}$ și

$B = \left\{b_n \middle| \, b_n \in \mathbb{Q}, b_n = \frac{n^2-n+6}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100\right\}$.

a) Află $card\ A$ și $card\ B$.
b) Demonstrează că suma $(card\ A)^{4k+2} + (card\ B)^{4k}$ este divizibilă cu 5, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

**Subiectul III ( 7 puncte)**

1. Fie triunghiul dreptunghic $ABC, \sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC, D \in BC$ și $(BE$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $E \in AC$, iar $AD \cap BE = \{F\}$. Dacă $AG \perp BE, G \in BC$ arătați că $(GA$ este bisectoarea unghiului $FGE$.

2. Fie triunghiul isoscel $ABC$ cu unghiul $\sphericalangle BCA = 100^\circ$ . Bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$ intersectează $BC$ în D. Arătați că $AB = AD + CD$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 120 minute
Timp de acomodare subiect: 30 minute
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"
Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ**
***SPERANȚE OLIMPICE***
9 noiembrie 2024
Clasa a VII-a
BAREM DE CORECTARE

**Subiectul I (7 puncte)**

1. Fie numărul rațional $x=(3\sqrt{3}-\sqrt{26}\,)^{100}$.

a) Demonstrează că $3\sqrt{3}-\sqrt{26}<\frac{1}{8}$.

b) Află primele 90 de zecimale ale numărului $x$.

*Rezolvare și barem*

a) Prin calcul se arată că $3\sqrt{3}-\sqrt{26}<\frac{1}{8}$ ........................................................................ 1 p

b) $0<x=(3\sqrt{3}-\sqrt{26})^{100}<\left(\frac{1}{2^3}\right)^{100}=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{30}=\left(\frac{1}{1024}\right)^{30}$

$x<\left(\frac{1}{1024}\right)^{30}<\left(\frac{1}{1000}\right)^{30}=\left(\frac{1}{10^3}\right)^{30}=\left(\frac{1}{10}\right)^{90}=(0{,}1)^{90}$ ........................................................ 1 p

Deci primele 90 de zecimale ale lui $x$ sunt egale cu 0. ........................................................ 1p

2. Fie $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{100^2}$.

a) Demonstrează că $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}, \forall n\in\mathbb{N}, n>1$.

b) Demonstrează că $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$.

*Rezolvare și barem*

a) $(n-1)n<n^2<n(n+1), \forall n\in\mathbb{N}, n>1$ de unde rezulta concluzia ...................................... 1p

b)

$$\left.\begin{array}{l} n=2\Rightarrow \frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}\\ n=3\Rightarrow \frac{1}{3\cdot 4}<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}\\ \quad\cdots\\ n=100\Rightarrow \frac{1}{100\cdot 101}<\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99\cdot 100}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{100\cdot101}<a<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot100}$ ............................................... 1p

$\frac{1}{2}-\frac{1}{101}<a<\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{99}{202}<a<\frac{99}{100}\Rightarrow 0{,}2<\frac{3}{\sqrt{202}}<\sqrt{\frac{a}{11}}<\frac{3}{10}=0{,}3$ ........................... 1p

Oficiu 1p
Total 7 p

Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"
Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

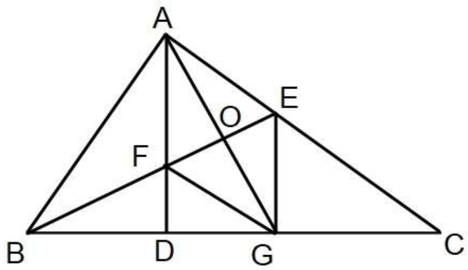

**Subiectul II (7 puncte)**
Se dau mulțimile:
$A = \left\{a_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, a_n = \frac{n^2-n+4}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 100\right\}$ și
$B = \left\{b_n \mid b_n \in \mathbb{Q}, b_n = \frac{n^2-n+6}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 100\right\}$.

a) Află $card\ A$ și $card\ B$.
b) Demonstrează că suma $(card\ A)^{4k+2} + (card\ B)^{4k}$ este divizibilă cu 5, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

*Rezolvare și barem*
a) Fie $1 \le n_1 < n_2 \le 100$. Află condițiile în care $a_{n_1} = a_{n_2}$.
$a_{n_1} = a_{n_2}$ de unde $(n_1 - n_2)(n_1 n_2 - 3n_1 - 3n_2 - 1) = 0$ deci $(n_1 - 3)(n_2 - 3) = 10$
$(n_1, n_2) \in \{(4,13),(5,8),(8,5),(13,4)\}$ ........ 1p
Deduce că $a_4 = a_{13}$ și $a_5 = a_8$ de unde $card\ A = 98$ ........ 1p
Similar $b_{n_1} = b_{n_2}$ de unde $(n_1 - n_2)(n_1 n_2 - 4n_1 - 4n_2 - 2) = 0$ deci $(n_1 - 4)(n_2 - 4) = 18$
$(n_1, n_2) \in \{(5,22),(6,13),(7,10),(13,6),(10,7),(22,5)\}$ ........ 1p
Deduce că $b_5 = b_{22}$, $b_6 = b_{13}$ și $b_7 = b_{10}$ de unde $card\ B = 97$ ........ 1p
b) $(card\ A)^{4k+2} + (card\ B)^{4k} = 98^{4k+2} + 97^{4k} = (95+3)^{4k+2} + (100-3)^{4k}$........ 1p
$= \mathcal{M}_5 + 3^{3k+2} + \mathcal{M}_5 + 3^{4k} = \mathcal{M}_5 + 3^{4k} \cdot 10 \vdots 5$ ........ 1p
Sau
$u(98^{4k+2}) = 4$ ........ 1p
$u(97^{4k}) = 1$. Finalizare. ........ 1p

Oficiu 1p
Total 7 p

**Subiectul III (7 puncte)**
1. Fie triunghiul dreptunghic $ABC, \sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC, D \in BC$ și $(BE$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $E \in AC$, iar $AD \cap BE = \{F\}$. Dacă $AG \perp BE$, $G \in BC$ arătați că $(GA$ este bisectoarea unghiului $FGE$.



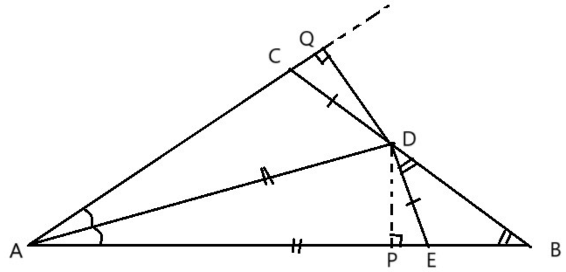

*Rezolvare și barem*

$\Delta ABG$: ($BO$ bisectoare, înălțime $\Rightarrow$ $\Delta ABG$ isoscel $\Rightarrow$ $O$ mijlocul $[AG]$ (1) ........ 1p

$$\left.\begin{array}{r}\Delta BAE\ dr. \sphericalangle AEB = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC \\ \Delta BDF\ dr. \sphericalangle BFD = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle AFE = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FAE \text{ isoscel} \Rightarrow$$

$O$ mijlocul $[FE]$. (2) ........ 1p
$AG \perp FE, AG \cap FE = \{O\} \xRightarrow{(1)+(2)} \Delta AFGE$ romb $\Rightarrow GA$ este bisectoarea $\sphericalangle FGE$ ........ 1p

2. Fie triunghiul isoscel $ABC$ cu unghiul $\sphericalangle BCA = 100^\circ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$ intersectează $BC$ în D. Arătați că $AB = AD + CD$.




*Rezolvare și barem*

Fie $E \in (AB)$ astfel încât $AE = AD$.
Unghiul $\widehat{DAB} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BED} = 100^\circ, \widehat{EBD} = 40^\circ \Rightarrow$
$\widehat{EDB} = 40^\circ \Rightarrow$ triunghiul $BED$ este isoscel $\Leftrightarrow BE = ED$ ........................................................ 1p
Construim $DQ \perp AC, Q \in AC,\ DP \perp AB, P \in AB, P \in (AD \Rightarrow DQ = DP \Rightarrow$
$\Delta DPE \equiv \Delta DQC \Rightarrow DE = DC = BE \Rightarrow$ ........................................................................ 1p
$AB = AE + EB = AD + DC$ ........................................................................................ 1p

Oficiu 1p
Total 7 p

Notă: Orice altă soluție corect rezolvată va fi punctată corespunzător.