Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SPERANŢE OLIMPICE"

Ediţia a XXI-a, Paşcani 9 noiembrie 2024

CLASA a VI-a

Subiectul I (7 puncte)

Fie mulţimile $A = \{3a + 2|a \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5b + 4|b \in \mathbb{N}\}$ şi $C = \{15c + 14|c \in \mathbb{N}\}$.

a) Verificaţi dacă 14 şi 19 $\in A \cap B$.

b)Arătaţi că $A \cap B = C$.

Subiectul al II- lea (7 puncte)

Demonstraţi că nu există numere prime q, astfel încât $q^5 + 4$ şi $q^{2024} + 4$ să fie simultan numere prime.

Subiectul al III- lea (7 puncte)

1) Se consideră A, O, B puncte coliniare, în această ordine, și punctele C și D de aceeași parte a dreptei AB astfel încât $\sphericalangle COD = 90°$. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$.

2) Fie șapte unghiuri în jurul unui punct, având măsurile în grade exprimate prin numere naturale care dau același rest prin împărțire la 15. Demonstrați că printre acestea există două unghiuri egale.

MULT SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru : 120 minute**
- **Timp de acomodare cu subiectul: 30 minute**
- **Fiecare subiect este punctat de la** 1 **punct la** 7 **puncte**

Colegiul Național "Mihail Sadoveanu"

Municipiul Paşcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iaşi, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ,,SPERANŢE OLIMPICE"

Ediţia a XXI-a, Paşcani 9 noiembrie 2024

BAREM de NOTARE CLASA a VI- a

Subiectul I

Oficiu .... **1 punct**

a)

$14 = 3 \cdot 4 + 2; 14 = 5 \cdot 2 + 4 \Rightarrow 14 \in A; 14 \in B \Rightarrow 14 \in A \cap B$........ **1 punct**

$19 = 3 \cdot 6 + 1 \Rightarrow 19 \notin A \Rightarrow 19 \notin A \cap B$........ **1 punct**

b)

Demonstrăm prima dată că $A \cap B \subset C$ .... **(1)**

Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ şi $x \in B$........

Deci există numerele $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 3a + 2$ şi $x = 5b + 4$ ....

Prin urmare $3a + 2 = 5b + 4 \Rightarrow 3a = 5b + 2 \Rightarrow a = 5k + 4 \Rightarrow x = 3(5k + 4) + 2 = 15k + 14$........

Deci $x \in C \Rightarrow A \cap B \subset C$........ **2 puncte**

Rămâne de demonstrat că $C \subset A \cap B$ .... **(2)**

Fie $x \in C \Rightarrow x = 15c + 14 = 15c + 12 + 2 = 3(5c + 4) + 2 \in A$........

$x = 15c + 14 = 15c + 10 + 4 = 5(3c + 2) + 4 \in B$........

Deci $x \in A \cap B \Rightarrow C \subset A \cap B$. .... **2 puncte**

Ţinând cont de relaţiile **(1)** şi **(2)** obţinem că $A \cap B = C$. ....

Subiectul al II- lea

Oficiu .... **1 punct**

Considerăm $q \in \{5m; 5m + 1; 5m + 2; 5m + 3; 5m + 4\}$ .... **1 punct**

Dacă $q = 5m$, pentru $m = 1 \Rightarrow q = 5 \Rightarrow q^5 + 4 = 5^4 + 5 = 3129 \vdots 3$, deci nu este prim. ... **1 punct**

Dacă $q = 5m+1$, pentru $q^5+4 = (5m+1)^5+4 = M_5+1+4 = M_5 \vdots 5$ deci nu este prim. **1 punct**

Dacă $q = 5m + 2$, pentru $q^{2024} + 4 = (5m + 2)^{2024} + 4 = M_5 + 2^{2024} + 4 =$........

$M_5 + (2^4)^{506} + 4 = M_5 + 16^{506} + 4 = M_5 + (15 + 1)^{506} + 4 = M_5 \vdots 5$ deci nu este prim. .. **1 punct**

Dacă $q = 5m + 3$, pentru $q^{2024} + 4 = M_5 + 3^{2024} + 4 =$........

$M_5 + (3^4)^{506} + 4 = M_5 + 81^{506} + 4 = M_5 + M_{80} + 1 + 4 = M_5 \vdots 5$ deci nu este prim. ..... **1 punct**

Dacă $q = 5m + 4$, pentru $q^{2024} + 4 = M_5 + 4^{2024} + 4 = M_5 + (4^4)^{506} + 4 =$ ....

$M_5 + 256^{506} + 4 = M_5 + (255 + 1)^{506} + 4 = M_5 + M_{255} + 1 + 4 = M_5 \vdots 5$ deci nu este prim. **1 punct**

Subiectul al III- lea

1)

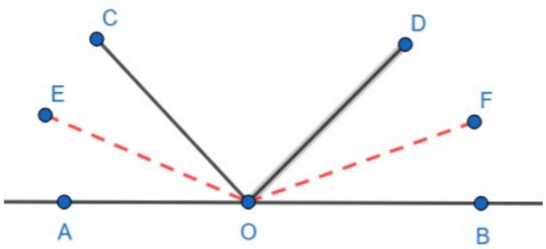

Figura 1

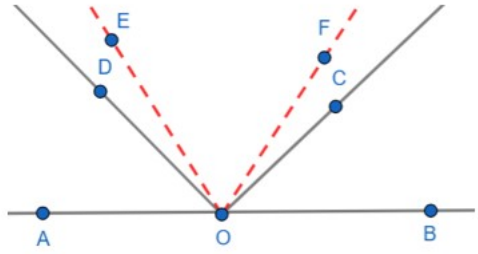

Figura 2

Oficiu .... **1 punct**

Cazul 1 (Figura 1)

Avem $\sphericalangle EOF = \sphericalangle EOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOF$ ....

Deci $\sphericalangle EOF = \frac{\sphericalangle AOC}{2} + 90^\circ + \frac{\sphericalangle DOB}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle AOC + \sphericalangle DOB}{2} = 135^\circ$ .... **1 punct**

Cazul 2 (Figura 2)

Avem $\sphericalangle EOF = \sphericalangle AOF - \sphericalangle AOE = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOF - \sphericalangle AOE =$ ....

$\sphericalangle AOD + \frac{\sphericalangle DOB}{2} - \frac{\sphericalangle AOC}{2} = \sphericalangle AOD + \frac{180^\circ - \sphericalangle AOD}{2} - \frac{180^\circ - \sphericalangle BOC}{2} = \frac{\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC}{2} = 45^\circ$. ... **1 punct**

2) Fie $15c_1 + r, 15c_2 + r, ..., 15c_7 + r, r < 15$ numerele naturale ce reprezintă măsurile celor 7 unghiuri. .... **1 punct**

Aşadar $15(c_1 + c_2 + ... + c_7) + 7r = 360 = 15 \cdot 24$, deci $7r$ este multiplu de 15.

Cum $(7, 15) = 1$, obţine că $r \in M_{15}$. Dar $r < 15 \Rightarrow r = 0$. .... **1 punct**

Prin urmare $c_1 + c_2 + ... + c_7 = 24$. Dacă unul dintre numerele $c_1, c_2, ..., c_7$ ar fi 0,
unul dintre unghiurile date ar fi nul, ceea ce este imposibil. .... **1 punct**

Suma primelor 7 numere naturale nenule distincte este $28 > 24$,
de unde obţinem concluzia problemei. .... **1 punct**

- **Notă: Orice altă soluţie rezolvată corect va fi punctată corespunzător**