Colegiul Naţional "Mihail Sadoveanu"

Municipiul Paşcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iaşi, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SPERANŢE OLIMPICE”

Ediţia a XXI-a, Paşcani 9 noiembrie 2024

CLASA a V-a

Subiectul I (7 puncte)

1) Fie m cel mai mare număr natural format din cifre nenule a căror sumă este 2024. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului m la 1001.

2) Aflaţi numerele naturale $\overline{abcd}$ şi x pentru care $5 \cdot [(\overline{ab}+\overline{cd}) \cdot (\overline{ad}+\overline{cb}) - 2] = 2026 - 36^x$.

Subiectul al II- lea (7 puncte)

Fie numerele $a = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2024}$ şi $b = 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + \ldots + 7^{2024}$.

1) Arătaţi că numărul $3 \cdot a$ nu poate fi pătrat perfect.

2) Aflaţi restul împărţirii numărului $n = 3 \cdot a + b + 1$ la 8.

Subiectul al III- lea (7 puncte)

Pe ecranul unui calculator sunt scrise numerele naturale $1, 2, 3, \ldots, 2024$. La un **”pas”**, calculatorul şterge două numere oarecare a şi b şi afişează numărul $a \cdot b + 30 - 5 \cdot (a + b)$.

Se repetă procedeul până când pe ecran rămâne un singur număr.

1) Aflaţi numărul natural n astfel încât, dacă sunt şterse numerele 5^n şi 6, pe ecran va fi afişat numărul 625.

2) Arătaţi că ultimul număr rămas scris pe ecran nu este pătrat perfect.

MULT SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru : 120 minute**
- **Timp de acomodare cu subiectul: 30 minute**
- **Fiecare subiect este punctat de la 1 punct la 7 puncte**

Colegiul Naţional "Mihail Sadoveanu"

Municipiul Paşcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iaşi, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

Mate.info.ro
profu' de mate

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SPERANŢE OLIMPICE”

Ediţia a XXI-a, Paşcani 9 noiembrie 2024

BAREM de NOTARE CLASA a V- a

Subiectul I

1) Obervăm că $1001 \cdot 111 = 111111$ şi cel mai mare număr natural cu proprietatea cerută este $m = \underbrace{111\ldots11}_{2024 \text{ cifre}}$

Deoarece $2024 = 6 \cdot 337 + 2$ numărul poate fi scris de forma

$m = 111111 \cdot 10^{2018} + 111111 \cdot 10^{2012} + \cdots + 111111 \cdot 10^{2} + 11$ .... **1 punct**

$m = 111 \cdot 1001 \cdot (10^{2018} + 10^{2012} + \cdots + 10^{2}) + 11$

Prin urmare câtul este $111 \cdot (10^{2018} + 10^{2012} + \cdots + 10^{2})$ şi restul este 11 .... **1 punct**

2) $\overline{ab} + \overline{cd} = 10 \cdot a + b + 10 \cdot c + d$ şi $\overline{ad} + \overline{cb} = 10 \cdot a + d + 10 \cdot c + b$, prin urmare $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ad} + \overline{cb} = t$

Relaţia devine $5 \cdot (t^2 - 2) = 2026 - 36^x$ .... **1 punct**

Deducem că $2026 - 36^x > 0 \Rightarrow x \leq 2$ .... **1 punct**

Dacă $x = 0 \Rightarrow 5 \cdot (t^2 - 2) = 2025 \Rightarrow t^2 - 2 = 2025 \Rightarrow t^2 - 2 = 405 \Rightarrow t^2 = 407$ care nu este pătrat perfect

Dacă $x = 2 \Rightarrow 5(t^2 - 2) = 2026 - 1296 = 730 \Rightarrow t^2 - 2 = 146 \Rightarrow t^2 = 148 \neq$ pătrat perfect.

.... **1 punct**

Dacă $x = 1$, atunci $5(t^2 - 2) = 2026 - 36 = 1990 \Rightarrow t^2 - 2 = 398 \Rightarrow t^2 = 400$, deci $t = 20$.

Prin urmare $\overline{ab} + \overline{cd} = 20 \Rightarrow \overline{ab} = \overline{cd} = 10$ şi $\overline{ad} + \overline{cb} = 20 \Rightarrow \overline{ad} = \overline{cb} = 10$

Deducem că $a = c = 1$ şi $b = d = 0 \Rightarrow \overline{abcd} = 1010$. .... **1 punct**

Oficiu .... **1 punct**

Subiectul al II- lea

1) $a = 1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2024}$

$2^2 \cdot a = 2^2 + 2^2 + 2^6 + 2^8 + \cdots + 2^{2026}$

Prin urmare, $4a - a = 3a = 2^{2026} - 1$ .... **1 punct**

$u(3a) = u(2^{2026} - 1) = u(2^2 - 1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot a \neq$ pătrat perfect. .... **1 punct**

2) $b = 7^2 + (7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6) + \cdots + (7^{2023} + 7^{2024})$

$b = 49 + 7^3(1 + 7) + 7^5(1 + 7) + \cdots + 7^{2023}(1 + 7)$

$b = 49 + 8 \cdot (7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{2023})$ .... **2 puncte**

$n = 3 \cdot a + b + 1 = 2^{2026} - 1 + 49 + 8 \cdot (7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{2023}) + 1$

$n = 2^3 \cdot 2^{2023} + 8 \cdot (7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{2023}) + 49$

$n = 2^3 \cdot 2^{2023} + 8 \cdot (7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{2023}) + 48 + 1$

$n = 8 \cdot (2^{2023} + 7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{2023} + 6) + 1 \Rightarrow r = 1$

.... **2 puncte**

Oficiu .... **1 punct**

Subiectul al III- lea

1) $5^n \cdot 6 + 30 - 5 \cdot (5^n + 6) = 625$
$5^n \cdot 6 + 30 - 5 \cdot 5^n - 5 \cdot 6 = 625$
$5^n \cdot 6 - 5^n \cdot 5 = 625$
.... **2 puncte**
$5^n = 625 \Rightarrow n = 4$. **1punct**
2) Dacă se şterg numerele 5 şi a, atunci pe tablă va fi scris numărul
$5 \cdot a + 30 - 5 \cdot (5 + a) = 5a + 30 - 25 - 5a = 5$. .... **2 puncte**
Aşadar, numărul 5 rămâne mereu scris pe ecran, deci ultimul număr rămas este 5 care nu este pătrat perfect. .... **1 punct**
Oficiu .... **1 punct**

• **Notă: Orice altă soluţie rezolvată corect va fi punctată corespunzător**