Soluții și repere de corectare – Matematica - de drag, 2024

Clasa a V-a

1. Câte numere se citesc identic de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga, dacă au:

a) 6 cifre?

b) 7 cifre?

Marian Ciuperceanu, Craiova (Gazeta Matematică)

Soluție. a) Numerele de forma $\overline{abccba}$ sunt tot atâtea ca numerele de forma $\overline{abc}$, adică 900 . . . . **4p**

b) Numerele de la b) se obțin din cele de la a) adăugând o cifră ,,la mijloc”. Deoarece aceasta se poate face în zece moduri iar numerele astfel obținute sunt diferite două câte două, obținem 9000 de numere **3p**

2. a) Arătați că numărul 9^{20} are 20 de cifre.

b) Există un număr natural A astfel încât A^{200} să aibă 200 de cifre?

Soluție. a) Arătăm că $10^{19} \leqslant 9^{20} < 10^{20}$; a doua inegalitate este evidentă **2p**

$9^{20} = 81^{10} > (8 \cdot 10)^{10} = 2^{30} \cdot 10^{10} = (2^{10})^3 \cdot 10^{10} > 10^9 \cdot 10^{10} = 10^{19}$ **2p**

b) Dacă $A \geqslant 10$, atunci $A^{200} \geqslant 10^{200}$, deci A^{200} are cel puțin 201 cifre **1p**

Dacă $A \leqslant 9$, atunci $A^{200} \leqslant 3^{400} = (3^5)^{80} < (2^7)^{80} = 2^{560}$ și arătăm că $2^{560} < 10^{199}$, adică $2^{361} < 5^{199}$, sau $4^{180} \cdot 2 < 5^{180} \cdot 5^{19}$ – evident. Așadar, răspunsul este nu **2p**

3. Vom spune că numărul natural X *domină* numărul natural nenul Y dacă restul împărțirii numărului $2 \cdot X$ la Y este 1. De exemplu, 8 domină numerele 3, 5 și 15.

a) Determinați perechile (A, B) de numere naturale nenule cu proprietatea că A îl domină pe B și B îl domină pe A.

b) Dați exemplu de șir de 2024 de numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$, distincte două câte două, cu proprietatea că fiecare termen al șirului îl domină pe pe următorul, iar ultimul termen îl domină pe primul.

Soluție. a) O posibilitate este $A = 3, B = 5$ iar alta este $A = 5, B = 3$ **1p**

Arătăm că acestea sunt singurele posibilități. Fie $2A = mB + 1$, $2B = nA + 1$, unde m și n sunt numere naturale.

Dacă $m \geqslant 2$ și $n \geqslant 2$, atunci $A < B$ și $B < A$ – imposibil **1p**

Cum nu se poate ca $m = 0$ sau $n = 0$, deducem că m sau n este 1 – de exemplu, $m = 1$. În acest caz $B = 2A - 1$, iar $2B = 4A - 2$ trebuie să dea restul 1 la împărțirea cu A. Deoarece $4A > 4A - 2$, câtul acestei împărțiri poate fi 1, 2 sau 3. Rezultă cazurile $4A - 2 = 3A + 1$, $4A - 2 = 2A + 1$ și $4A - 2 = A + 1$. În primul caz reiese $A = 3$, de unde $B = 5$, iar în celelalte cazuri nu obținem valori convenabile ale lui A **2p**

Analog, situația $n = 1$ duce la $A = 5$, $B = 3$.

b) Căutăm numere astfel încât fiecare să fie cu o unitate mai mic decât dublul numărului precedent, de exemplu numerele $2^n + 1$, cu $n = 1, 2, \ldots, 2024$ – se verifică imediat că ele corespund **2p**

În sfârșit, restul împărțirii lui $2(2^{2024}+1) = 2^{2025}+2$ la 3 este 1, deoarece $2^2 = \mathcal{M}_3+1$, deci $2^{2024} = \mathcal{M}_3 + 1$ **1p**

Clasa a VI-a

1. Determinați perechile de numere naturale (a, b), cu $a \leqslant b$, care verifică relația $(a, b) + [a, b] = 77$. Notațiile (a, b) și $[a, b]$ reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Soluție. Fie $d = (a, b)$. Atunci $d \mid [a, b]$, deci $d \mid 77$ **2p**

Deoarece $d < 77$, sunt posibile cazurile I: $d = 1$, II: $d = 7$ și III: $d = 11$ **2p**

În I rezultă $[a, b] = 76 = 4 \cdot 19$ cu soluțiile $a = 1, b = 76$ și $a = 4, b = 19$ **1p**

În II rezultă $[a, b] = 70 = 7 \cdot 10$ cu soluțiile $a = 7, b = 70$ și $a = 14, b = 35$ **1p**

În III rezultă $[a, b] = 66 = 11 \cdot 6$ cu soluțiile $a = 11, b = 66$ și $a = 22, b = 33$ **1p**

2. a) Fie n un număr natural nenul. Arătați că $2 + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = 2^{n+1}$ și că $2 \cdot n \leqslant 2^n$.

b) Arătați că mulțimea numerelor naturale care au produsul cifrelor lor egal cu suma cifrelor lor este infinită.

*** (Gazeta Matematică)

Soluție. a) Adunând, de fiecare dată, primii doi termeni obținem $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^3 + 2^3 + \ldots + 2^n = \ldots = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ **2p**

Pentru $n = 1$ avem egalitate, iar dacă $n \geqslant 2$ avem $2n = 2 + \underbrace{(2 + \ldots + 2)}_{n-1 \text{ numere}} \leqslant 2 + (2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n$, deci relația este adevărată în toate cazurile **2p**

b) Mulțimea conține toate numerele de forma $22\ldots211\ldots1$ cu $n \geqslant 1$ cifre de 2 și $2^n - 2n$ cifre de 1. Deoarece $2^n \geqslant 2n$, numerele sunt corect definite iar suma și produsul cifrelor sunt egale cu 2^n **3p**

3. Fie $n \geqslant 3$ un număr natural. Vom numi *stea de mărime* n orice mulțime $\mathcal{M}$ de n semidrepte cu aceeași origine O, cu proprietatea:

oricum am lua o semidreaptă OA din $\mathcal{M}$, există în $\mathcal{M}$ două semidrepte OB, OC astfel încât OA este bisectoarea unghiului $\angle BOC$.

Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există o stea de mărime n.

Soluție. Arătăm că valoarea cerută este $n = 5$ **1p**

Pentru o stea de mărime 5 luăm 5 unghiuri în jurul unui punct având câte 72° .. **3p**

Dacă ar exista o stea de mărime 4 $\{OA, OB, OC, OD\}$ și, de exemplu, OA este bisectoarea $\angle BOC$, atunci:

- dacă OD este în interiorul $\angle BOC$, atunci OA este în exteriorul unghiurilor $\angle BOC$, $\angle BOD$ și $\angle COD$, deci nu poate fi bisectoarea niciunuia dintre aceste unghiuri;

- dacă OD este în exteriorul $\angle BOC$, atunci OD este și în exteriorul unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle AOC$, deci nu poate fi bisectoarea niciunuia dintre aceste unghiuri.

Cum în toate situațiile obținem o contradicție, nu există stele de mărime 4 ...... **2p**

Dacă ar exista o stea de mărime 3 $\{OA, OB, OC\}$ și OA este bisectoarea $\angle BOC$, atunci OB este în exteriorul $\angle AOC$, deci nu poate bisectoarea acestui unghi – contradicție. Astfel, nu există nici stele de mărime 3 .... **1p**

Clasa a VII-a

1. Determinați numărul prim p pentru care suma cifrelor numărului $A = (p^2-7)^2 + 33(p^2-7)+630$ este minimă.

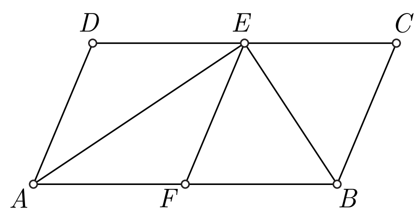
Mihaela Berindeanu, București (Gazeta Matematică)

Soluție. Pentru $p=3$, $A=700$, cu suma cifrelor egală cu 7 .... **2p**

Suma cifrelor lui A și A dau același rest la împărțirea cu 9 .... **1p**

Pentru orice număr prim diferit de 3, restul împărțirii lui p^2 la 3 este 1, deci p^2-7 este divizibil cu 3. Atunci $(p^2-7)^2$ și $33(p^2-7)$ sunt divizibile cu 9, prin urmare A este divizibil cu 9 și suma cifrelor lui A este cel puțin 9. Numărul cerut este 3 ..... **4p**

2. Un paralelogram $ABCD$ are proprietatea: bisectoarea unghiului $\angle BAD$ trece prin mijlocul E al laturii CD. Determinați măsura unghiului $\angle AEB$.

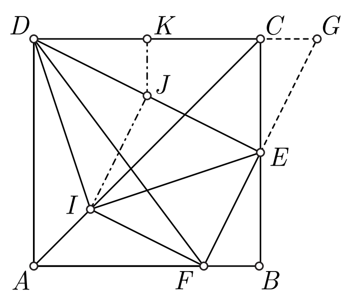


Soluție. Din $\angle BAE = \angle AED$ (alterne interne) și $\angle BAE = \angle DAE$ (ipoteză) obținem $\angle DAE = \angle AED$, deci $AD = DE$ **3p**

Continuarea I. Fie F mijlocul segmentului AB. Atunci $AFED$ este paralelogram (AF și DE sunt paralele și congruente), deci $EF = AD$. Rezultă $EF = DE = AF = FB$, deci în $\triangle AEB$ mediana EF este jumătate din latura AB, de unde $\angle AEB = 90^\circ$ **4p**

Continuarea II - schiță. Avem $\angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE)$ și $\angle BEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCE)$, de unde $\angle AEB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCE) = \frac{1}{2}(\angle ADE + \angle BCE) = 90^\circ$ **4p**

3. Fie $ABCD$ un pătrat și E mijlocul laturii BC. Perpendiculara în E pe DE taie segmentul AB în F, iar perpendiculara în F pe EF taie segmentul AC în I. Arătați că $IF = EF$.



Soluție. Cum $IF \perp EF$, trebuie să arătăm că $\angle IEF = 45^\circ$, adică $\angle IED = \angle IEF$ **2p**

Fie $\{G\} = FE \cap CD$. Atunci $\triangle FEB \equiv \triangle GCE$ (CU: $BE = EC$, $\angle FEB = \angle GEC$), deci $FE = EG$. Reiese că DE este bisectoarea $\angle FDG$ **1p**

Cum $DC \parallel FA$ și $DE \parallel FI$, reiese că FI este bisectoarea $\angle AFD$. Deoarece AI este bisectoarea $\angle FAD$, I este centrul cercului înscris în $\triangle AFD$, deci $\angle ADI = \angle FDI$ **2p**

Deducem $\angle IDJ = \angle IDF + \angle FDE = \frac{1}{2}(\angle ADF + \angle FDC) = 45^\circ$, (*). Construim $IJ \perp DE$, $J \in DE$ și $JK \perp CD$, $K \in CD$. Atunci $DJ = JI$ (din (*)) și $JI = EF$ (din dreptunghiul $EFIJ$). Reiese $\triangle DJK \equiv \triangle EFB$ (IU: $DJ = EF$, $\angle JDK = 90^\circ - \angle DEC = \angle FEB$), deci $DK = EB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}DC$. Aceasta arată că JK este linie mijlocie în $\triangle DEC$, de unde $DJ = JE$, apoi $\angle IED = 45^\circ = \angle IEF$, c.c.t.d. **2p**

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că, pentru orice x număr real, $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 > 0$.

b) Aflați minimul expresiei $E(x) = \dfrac{-2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 9}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3}$, unde x este număr real.

Gheorghe Boroica, Baia Mare (Gazeta Matematică)

Soluție. a) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = (x^2 - 2x)^2 + 3 \geqslant 3$, deoarece pătratul oricărui număr real este nenegativ **2p**

b) Avem egalitatea $E(x) = \dfrac{-2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 9}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3} = \dfrac{-2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3) - 3}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3} = -2 - \dfrac{3}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3}$ **2p**

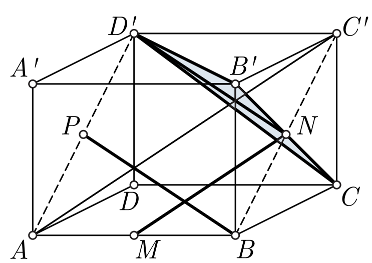
Din $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 \geqslant 3$ reiese că $\dfrac{3}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3} \leqslant 1$, deci $E(x) \geqslant -3$ ... **2p**

Cum $E(0) = -3$, minimul cerut este -3........ **1p**

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M mijlocul muchiei AB și N, P centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $ADD'A'$.

a) Arătați că dreapta MN este perpendiculară pe planul $(B'CD')$.

b) Arătați că dreapta BP este paralelă cu planul $(B'CD')$ și calculați distanța de la dreapta BP la $(B'CD')$ dacă $AB = 6\,\text{cm}$.



Soluție. a) Avem $MN \parallel AC'$ (linie mijlocie în $\triangle BAC'$) **1p**

Deoarece $AB' = AC = AD' = B'C = B'D' = CD'$ (diagonale mici) și $C'B' = C'C = C'D'$ (muchii), piramidele $AB'CD'$ și $C'B'CD'$ sunt regulate, deci înălțimile lor din A, respectiv C' cad în același punct – centrul bazei $B'CD'$. Rezultă $AC' \perp (B'CD')$, de unde $MN \perp (B'CD')$..... **2p**

b) Cum $ABC'D'$ este paralelogram și $BN = PD' = \frac{1}{2}BC'$, patrulaterul $BPD'N$ este paralelogram, de unde $BP \parallel ND' \subset (B'CD')$, deci $BP \parallel (B'CD')$........ **2p**

Distanța cerută d este cea de la B la planul $(B'CD')$, egală cu distanța de C' la planul $(B'CD')$ (deoarece $BN = NC'$). Astfel d este egală cu înălțimea piramidei triunghiulare regulate $C'B'CD'$, adică $d = \sqrt{C'C^2 - (B'C\sqrt{3}/3)^2} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ **2p**

3. Determinați numerele naturale n pentru care există numerele reale a și b care verifică simultan condițiile $a + b = 14^n$ și $a^2 + b^2 = 100^n$.

Soluție. Pentru $n = 0$ avem $a = 1$, $b = 0$, iar pentru $n = 1$ avem $a = 8$, $b = 6$ **2p**

Pe de altă parte, avem $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, de unde $14^{2n} \leqslant 2 \cdot 100^n$, sau $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{2n} \leqslant 2$.

Pentru $n \geqslant 2$, avem $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{2n} \geqslant \left(\dfrac{7}{5}\right)^4 = \dfrac{2401}{625} > 2$, deci nu mai avem alte soluții .. **5p**