Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-8$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2}=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(6,8)$. Arătați că $OA=AB$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=12$, $AC=8$ și punctul M mijlocul laturii AB. Arătați că $CM=10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(3)+2I_2=A(5)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)+xI_2)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2x+2y-1$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1=5$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(x+1)=5$.

5p **c)** Arătați că $x\circ x\leq 4x^2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{x-2}{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{1}{f(x)}dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^3 2xf(x)dx=\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)}dx=e(ae-a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=$	**2p**
	$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$	**3p**
2.	$f(a)=2a-8$, pentru orice număr real a	**2p**
	$2a-8=0$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$3x-2=1$, de unde obținem $3x=3$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele, din mulțimea A, care au suma cifrelor egală cu 2 sunt 11 și 20, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
	$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$, deci $OA=AB$	**3p**
6.	$AM=6$	**2p**
	$CM=\sqrt{AC^2+AM^2}=10$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=1\cdot2-1\cdot2=$	**3p**
	$=2-2=0$	**2p**
b)	$A(3)+2I_2=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}5-1&2\\1&5\end{pmatrix}=A(5)$	**2p**
c)	$A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x-1&2\\1&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-1&2\\1&2x\end{pmatrix}$ și $\det\left(A(x)+xI_2\right)=4x^2-2x-2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-2x-2=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$2\circ1=2\cdot2+2\cdot1-1=$	**3p**
	$=4+2-1=5$	**2p**
b)	$x\circ(x+1)=2x+2(x+1)-1=4x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x+1=5$, de unde obținem $x=1$	**2p**

c)	$x \circ x = 4x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x-1=-4x^2+4x-1+4x^2=-(2x-1)^2+4x^2 \le 4x^2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-2\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-2\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=1,\ f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-x+2$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(2)=2-2\ln 2$, deci $2-2\ln 2 \le f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde obținem $\ln\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{x-2}{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,dx=\int_0^3 (x^2+1)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	$\int_2^3 2xf(x)\,dx=\int_2^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int_2^3 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)\Big\|_2^3=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)}dx=\int_1^2 e^x(x^2+1)dx=e^x(x^2+1)\Big\|_1^2-\int_1^2 2xe^x dx=5e^2-2e-(2xe^x-2e^x)\Big\|_1^2=3e^2-2e$	**3p**
	$e(3e-2)=e(ae-a+1)$, de unde obținem $a=3$	**2p**