

**Examenul național de bacalaureat 2024**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , cu  $a_2 = 14$  și  $a_3 = 18$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2$ . Arătați că  $(f \circ f)(5) = 9$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(2, 1)$ . Determinați coordonatele punctului  $B$  pentru care  $\overline{AB} = 2\overline{OA}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 12$  și  $AB = \frac{BC}{2}$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $18\sqrt{3}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(B(1)) = 0$ .
- 5p** b) Arătați că  $B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = xyA$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = xA$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 + X + 2 - a$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $f(1) = 4$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 2$ , determinați rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$ .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \frac{12}{5}$ .

- 5p** b) Arătați că  $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1} dx = \frac{\ln 6}{2}$ .
- 5p** c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = 6$ .

**Examenul național de bacalaureat 2024**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M\_mate-info$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Varianta 3

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

|    |   |          |
|----|---|----------|
| 1. | $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 14 = \frac{a_1 + 18}{2}$<br>$a_1 = 10$   | 3p<br>2p |
| 2. | $f(5) = 7$<br>$(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(7) = 9$   | 2p<br>3p |
| 3. | $x^2 + 2x + 1 = 1 - x$ , de unde obținem $x^2 + 3x = 0$<br>$x = -3$ sau $x = 0$   | 3p<br>2p |
| 4. | Cifra unităților se poate alege în 4 moduri<br>Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 = 16$ numere                             | 2p<br>3p |
| 5. | $\vec{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ , $\vec{AB} = (x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j}$ , unde $B(x_B, y_B)$<br>$(x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ , de unde obținem $x_B = 6$ și $y_B = 3$ | 3p<br>2p |
| 6. | $AB = 6$ , $AC = 6\sqrt{3}$<br>$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$  | 2p<br>3p |

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

|      |  |          |
|------|--|----------|
| 1.a) | $B(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$<br>$= 2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = 0$   | 2p<br>3p |
| b)   | $B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1+xy & y+x \\ 0 & x+y & xy+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$<br>$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = xyA$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ | 3p<br>2p |
| c)   | $B(x) \cdot B(x+1) = B(2x+1) + (x^2 + x)A$ , $B(2x) \cdot B(1) = B(2x+1) + 2xA$ , de unde obținem<br>$B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = (x^2 - x)A$ , pentru orice număr real $x$<br>$(x^2 - x)A = xA$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$  | 3p<br>2p |
| 2.a) | $f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + 2 - a =$<br>$= 1 + a + 1 + 2 - a = 4$ , pentru orice număr real $a$  | 3p<br>2p |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>b)</b> | $f = X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1)$  | <b>2p</b> |
|           | Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 0$   | <b>3p</b> |
| <b>c)</b> | $x_1 x_2 x_3 = -2 + a$ , $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = x_1 x_2 x_3 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = (-2 + a)f(1)$ | <b>3p</b> |
|           | $4(-2 + a) = 4$ , de unde obținem $a = 3$   | <b>2p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |   |                        |
|-------------|---|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = (x^2 - 2)'e^{2x} + (x^2 - 2)(e^{2x})' =$<br>$= 2xe^{2x} + (x^2 - 2) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$ , $x \in \mathbb{R}$   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{2(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{2x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} =$<br>$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 1$ ; pentru orice $x \in (-\infty, -2]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $(-\infty, -2]$ ; pentru orice $x \in [-2, 1]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[-2, 1]$ și pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$<br>Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , $f(1) = -e^2$ și $f$ este continuă, imaginea funcției $f$ este $[-e^2, +\infty)$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x\right) \Big _{-1}^1 =$<br>$= \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1 = \frac{12}{5}$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x) - 1} dx = \int_1^6 \frac{x}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \int_1^6 \frac{(x^2 + 6)'}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6) \Big _1^6 =$<br>$= \frac{\ln 42}{2} - \frac{\ln 7}{2} = \frac{\ln 6}{2}$  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{3x^2} =$<br>$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^4 + 18x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 6) = 6$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |