Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2-5i+i(5-3i)=5$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=15$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x+1}=7^x\cdot 7^2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin una dintre cifre egală cu 1.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(4,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului OB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $BC=5\sqrt{5}$. Arătați că $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x&x-3\\3-x&x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(4-x-y)$.
5p	**a)** Arătați că $0*3=3$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*1=0$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+5)*(n-5)$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că $x^2-x\geq 2\ln\dfrac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\left(f(x)-3x\right)dx=12$.
5p	**b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}dx=\frac{1}{4}$.
5p	**c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $3\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-5i+i(5-3i)=2-5i+5i-3i^2=$	**3p**
	$=2+3=5$	**2p**
2.	$f(2)=12+m$, deci $12+m=15$	**3p**
	$m=3$	**2p**
3.	$7^{2x+1}=7^{x+2}$, de unde obținem $2x+1=x+2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 18 numere care au cel puțin una dintre cifre egală cu 1, deci sunt 18 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$M(2,1)$ este mijlocul segmentului OB	**3p**
	$AM=4$	**2p**
6.	$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{5\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(4)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B(4)\cdot B(4)=\begin{pmatrix}15 & 4\\ -4 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(4)\cdot B(4)+I_2=\begin{pmatrix}16 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}=4B(4)$, deci $4B(4)=aB(4)$, de unde obținem $a=4$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}3x-3 & x-2\\ x & x-3\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}3x-3 & -x\\ -x+2 & x-3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\begin{pmatrix}3x-3 & x-2\\ x & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3 & -x\\ -x+2 & x-3\end{pmatrix}$, obținem $x=1$	**2p**
2.a)	$0*3=(0+3)(4-0-3)=$	**3p**
	$=3\cdot 1=3$	**2p**
b)	$x*1=(x+1)(3-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x+1)(3-x)=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=3$	**3p**

c)	$(n+5)*(n-5)=4n(2-n)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Cum n și $N=4n(2-n)$ sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=1$ și $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-1-\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+2x-x-1-2}{x+1}=\dfrac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-3x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; pentru orice $x\in(-1,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-1,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	Pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, $f(x)\geq f(1)$ și, cum $f(1)=-2\ln 2$, obținem $x^2-x\geq 2\ln\dfrac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 (f(x)-3x)\,dx=\int_0^3 (x^2+1)\,dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	$\int_0^1 \dfrac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}dx=\int_0^1 \dfrac{1}{(3x+1)^2}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1 \dfrac{(3x+1)'}{(3x+1)^2}dx=-\dfrac{1}{3(3x+1)}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=3xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, deci $\mathcal{A}=\int_0^1 \lvert g(x)\rvert\,dx=\int_0^1 3x\left(-e^{-x}\right)'dx=$	**2p**
	$=-3e^{-x}(x+1)\Big\vert_0^1=3\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$	**3p**