

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(0,3 + 0,4) \cdot 10 + 2 \cdot 0,5 = 8$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Arătați că $f(1) + f(2) = 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 1) = \log_5 5$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(m,2)$ și $C(5,3)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că punctul B este mijlocul segmentului AC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 20$ și $AC = 16$. Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $A(1) + A(5) = 2A(3)$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot A(1) = A(3)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 5$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = -5$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați numărul real m , știind că 1 este rădăcină a polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul natural m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = e - 1$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = e$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{2xf(x^2)}{x^2 + 1} dx = e(e^3 - 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(0,3 + 0,4) \cdot 10 + 2 \cdot 0,5 = 0,7 \cdot 10 + 1 =$ $= 7 + 1 = 8$	3p 2p
2.	$f(1) = 1$ $f(2) = 3$, de unde obținem $f(1) + f(2) = 4$	2p 3p
3.	$2x + 1 = 5$, de unde obținem $2x = 4$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele, din mulțimea A , care sunt divizibile cu 3 sunt 21, 51 și 81, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	2p 3p
5.	$m = \frac{3+5}{2} =$ $= 4$	3p 2p
6.	$AB = 12$ $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 48$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 =$ $= 3 - 1 = 2$	3p 2p
b)	$A(1) + A(5) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2A(3)$	3p 2p
c)	Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + m \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 =$ $= 0 + 0 + 0 - 5 = -5$, pentru orice număr real m	3p 2p

b)	$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + m \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$ $m - 2 = 0$, de unde obținem $m = 2$	3p 2p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = m^2 - 4$, deci $m^2 - 4 = 5$ și, cum m este număr natural, obținem $m = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 1$ Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 =$ $= e - 1$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x (x+1) dx = e^x (x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x (x+1) \Big _0^1 - e^x \Big _0^1 =$ $= 2e - 1 - e + 1 = e$	3p 2p
c)	$\int_1^a \frac{2xf(x^2)}{x^2+1} dx = \int_1^a 2xe^{x^2} dx = \int_1^a e^{x^2} (x^2)' dx = e^{x^2} \Big _1^a = e^{a^2} - e$ $e^{a^2} - e = e(e^3 - 1) \Rightarrow e^{a^2} = e^4$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p