

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră expresia $E(z) = z^2 + z \cdot |z| \cdot i - 4$, unde z este număr complex.
- 5p a) Arătați că $|E(m)| \geq 2\sqrt{2}$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul complex z pentru care $E(z) = z^2$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $\bar{z} \cdot E(z) = z \cdot E(\bar{z})$, unde \bar{z} este conjugatul numărului complex z , atunci z este număr real.
2. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC < AB$. Punctul D este simetricul punctului A față de dreapta BC , punctul E este proiecția punctului D pe dreapta AB , iar M este punctul de intersecție a dreptelor AD și BC și N este punctul de intersecție a dreptelor BC și DE .
- 5p a) Arătați că $EM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.
- 5p b) Arătați că segmentele AN și AC au lungimile egale.
- 5p c) Dreapta AN intersectează dreptele EM și BD în punctele P , respectiv Q , iar dreapta QM intersectează dreapta AC în punctul S . Demonstrați că punctul S este simetricul punctului P față de dreapta AD .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se definește pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x \circ y = f(xy) - f(x+y)$.
- 5p a) Pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 0$.
- 5p b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.
- 5p c) Demonstrați că (\mathbb{R}, \circ) nu este grup, oricare ar fi funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$.
- 5p a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x^2}{f(x)} dx$. Arătați că
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + 2 \ln f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 2 \ln \left(1 - \frac{5}{2e} \right).$$

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VII-a	
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame	<ul style="list-style-type: none"> - Extragerea unei informații dintr-un tabel, grafic sau diagramă - Identificarea modului adecvat de reprezentare a unor date - Identificarea unor exemple de corespondențe matematice în contexte variate
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora	<ul style="list-style-type: none"> - Prelucrarea statistică a unor date reprezentate în tabel - Reprezentarea unor date prin diagrame, grafice circulare sau grafice cu bare - Reprezentarea unor date în tabele cu una sau cu două intrări
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora	<ul style="list-style-type: none"> - Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor puncte având coordonatele numere reale - Analizarea unor seturi de date pentru a determina un mod adecvat de reprezentare grafică a acestora - Interpretarea unei informații extrase dintr-un tabel sau listă
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor	<ul style="list-style-type: none"> - Reprezentarea produsului cartezian a două mulțimi numerice finite - Evidențierea egalității între cardinalul produsului cartezian a două mulțimi finite și produsul cardinalelor celor două mulțimi - Exprimarea distanței dintre două puncte în plan ca lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic într-un sistem de axe ortogonale
5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretarea unor informații extrase dintr-un tabel/listă/grafic - Verificarea unor afirmații pe cazuri particulare prin construirea unor exemple și/sau contraexemplu - Interpretarea reprezentării a două sau mai multor puncte într-un sistem de axe ortogonale, din punct de vedere geometric sau din punct de vedere al fenomenului asociat
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)	<ul style="list-style-type: none"> - Construirea și interpretarea unor diagrame cu date din situații practice - Determinarea unor mulțimi finite atunci când se cunoaște reprezentarea geometrică a produsului lor cartezian - Rezolvarea unor probleme simple de geometrie pornind de la reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Organizarea datelor	<p>3. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR</p> <ul style="list-style-type: none"> • Produsul cartezian a două mulțimi nevide; sistem de axe ortogonale în plan; reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale; reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale; distanța dintre două puncte din plan • Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice; poligonul frecvențelor

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Elemente de organizare a datelor**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item;
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item;
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item;
- respectați formatul tipului de item;
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat.

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $E(m) = m^2 + m \cdot m \cdot i - 4$, de unde obținem $ E(m) = \sqrt{(m^2 - 4)^2 + m^4}$, pentru orice număr real m	3p
	$ E(m) = \sqrt{2(m^2 - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$, pentru orice număr real m	2p
	b) $z^2 + z \cdot z \cdot i - 4 = z^2$, deci $z \cdot z \cdot i = 4$, de unde obținem $ z = 2$ $z \cdot i = 2$, de unde obținem $z = -2i$, care verifică relația	3p 2p
c) $\bar{z} \cdot z^2 + \bar{z} \cdot z \cdot z \cdot i - 4\bar{z} = z \cdot \bar{z}^2 + z \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot i - 4z$, de unde obținem $(\bar{z} \cdot z + 4)(z - \bar{z}) = 0$ Cum $z \cdot \bar{z} + 4 = z ^2 + 4 > 0$, obținem $z = \bar{z}$, deci z este număr real	3p 2p	
2.	a) Triunghiul AED este dreptunghic în E și EM este mediana corespunzătoare ipotenuzei, de unde obținem $EM = AM$ AM este înălțime în triunghiul dreptunghic ABC , deci $AM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$, de unde obținem $EM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$	2p 3p
	b) $AC \parallel DE$, deci $\sphericalangle CAM = \sphericalangle NDM$ și, cum dreapta MN este mediatoarea segmentului AD , obținem $\sphericalangle NDM = \sphericalangle NAM$, deci semidreapta AM este bisectoarea unghiului CAN Cum $AM \perp CN$, obținem $AN = AC$	3p 2p
	c) BM și DE sunt înălțimi ale triunghiului ABD , deci patrulaterul $BDME$ este inscriptibil, de unde obținem $\sphericalangle AME = \sphericalangle ABD$; $AN \perp BD$, de unde obținem că patrulaterul $ABQM$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AMS = \sphericalangle ABD$ Cum $\sphericalangle MAS = \sphericalangle MAP$, obținem $\triangle MAS \equiv \triangle MAP$, de unde rezultă că dreapta AM este mediatoarea segmentului PS , deci punctul S este simetricul punctului P față de dreapta AD	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x \circ x = f(x^2) - f(2x) = x^4 - 4x^2$, pentru orice număr real x	2p
	$x^4 - 4x^2 = 0$, deci $x^2(x^2 - 4) = 0$, de unde obținem $x = -2$ sau $x = 0$ sau $x = 2$	3p

	<p>b) $x \circ y = axy - ax - ay$, deci $(x \circ y) \circ z = a^2xyz - a^2xz - a^2yz - a^2xy + a^2x + a^2y - az$, pentru orice numere reale x, y și z</p> <p>$x \circ (y \circ z) = a^2xyz - a^2xz - a^2yz - a^2xy - ax + a^2y + a^2z$, pentru orice numere reale x, y și z;</p> <p>$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice numere reale x, y și z, dacă și numai dacă $a^2 + a = 0$, deci $a = -1$ sau $a = 0$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>c) Presupunând că există o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care (\mathbb{R}, \circ) este grup, cum $0 \circ 0 = 0$ și 0 este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „\circ”, obținem că 0 este elementul neutru al grupului (\mathbb{R}, \circ)</p> <p>Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x = x \circ 0 = f(0) - f(x)$, deci $f(x) = f(0) - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; cum $1 \circ a = f(a) - f(a+1) = f(0) - a - f(0) + a + 1 = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, obținem că elementul 1 nu este simetrizabil – contradicție, deci (\mathbb{R}, \circ) nu este grup, oricare ar fi funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.	<p>a) $f'(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$</p> <p>Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 0$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>b) $f''(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, deci f' este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f' este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$</p> <p>Cum $f'(0) = 0$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, obținem că f este strict crescătoare</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) $I_n = 2 \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f'(x) - f(x)}{f(x)} dx = 2 \ln f(1) - 2 \ln f\left(\frac{1}{n}\right) - 2 + \frac{2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + 2 \ln f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \ln f(1) - 2 + \frac{2}{n} \right)$ și, cum $f(1) = e - \frac{5}{2}$, obținem</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + 2 \ln f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 2 \ln \left(1 - \frac{5}{2e} \right)$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p