Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2\cdot(1,2+0,1)+0,4=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8\left(x^2-5x+5\right)=\log_8 x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,3,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$, $B(4,2)$ și C, mijlocul segmentului OA. Determinați coordonatele mijlocului segmentului BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=8$ și $C=\frac{\pi}{4}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-2 & x-2\\ x-4 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(5))=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $(B(4)-B(2))\cdot A=aA$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A\cdot B(x)-4xI_2\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x(x-2)+y(y-2)$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 3=6$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2\circ x=x^2+2$.

5p **c)** Arătați că $x\circ y\geq -2$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\,dx=2\ln 2$.

5p **c)** Determinați $m \in (1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = 6$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(1{,}2+0{,}1)+0{,}4=2\cdot 1{,}3+0{,}4=$	**2p**
	$=2{,}6+0{,}4=3$	**3p**
2.	$f(a)=2a+1$, $f(2)=5$	**2p**
	$2a+1-5=a$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$x^2-5x+5=x$, de unde obținem $x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$C(0,4)$	**2p**
	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $(2,3)$	**3p**
6.	$AC=8$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{8\cdot 8}{2}=32$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(5)=\begin{pmatrix}3&3\\1&5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(5))=\begin{vmatrix}3&3\\1&5\end{vmatrix}=3\cdot 5-3\cdot 1=$	**3p**
	$=15-3=12$	**2p**
b)	$B(4)-B(2)=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$, $(B(4)-B(2))\cdot A=\begin{pmatrix}4&12\\4&12\end{pmatrix}=4A$	**3p**
	$4A=aA$, de unde obținem $a=4$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}4x-14&4x-2\\4x-14&4x-2\end{pmatrix}$, $A\cdot B(x)-4xI_2=\begin{pmatrix}-14&4x-2\\4x-14&-2\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=-16x(x-4)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-16x(x-4)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=4$	**2p**
2.a)	$3\circ 3=3(3-2)+3(3-2)=$	**3p**
	$=3+3=6$	**2p**
b)	$2\circ x=x^2-2x$ și obținem $-2x=2$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
c)	$x\circ y=x^2-2x+y^2-2y=$	**2p**
	$=x^2-2x+1+y^2-2y+1-2=(x-1)^2+(y-1)^2-2\geq -2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=-2$, $f'(1)=2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2x-4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int_1^2 4xdx=2x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-2=6$	**2p**
b)	$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{4x}{x^2+1}dx=2\int_2^3\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=2\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=2\ln 10-2\ln 5=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^m\left(\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^3dx=\int_1^m\frac{64}{(x+1)^3}dx=-\frac{32}{(x+1)^2}\Big\vert_1^m=-\frac{32}{(m+1)^2}+8$	**3p**
	$-\frac{32}{(m+1)^2}+8=6$ și, cum $m\in(1,+\infty)$, obținem $m=3$	**2p**