Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(3a) = 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x}\cdot 5^2 = 5^x$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulțimea $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 18 și $B = \frac{\pi}{4}$. Arătați că $AB = 6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1)) = 7$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2) = M(x-1)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n)) \le \det(M(2n))$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - aX + 2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2) = 0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$.

5p **c)** Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x-4) + x^2 - 2x + 4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = 2(x-1)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^x} = 4$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{3x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_3^4 f(x)(3x^2+1)\,dx = 14$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln 2$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ este egală cu $\frac{3e^2+5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\lg 100+\lg 2+\lg 5=2\cdot 2+\lg 10=$	**3p**
	$=4+1=5$	**2p**
2.	$f(a)=a-6$, $f(3a)=3a-6$	**3p**
	$a-6+3a-6=0$, de unde obținem $a=3$	**2p**
3.	$5^{3x+2}=5^x$, de unde obținem $3x+2=x$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 4 numere pare	**2p**
	Sunt $C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ submulțimi cu două elemente, ambele numere pare	**3p**
5.	$\overrightarrow{AC}=(x_C-3)\vec{i}+(y_C-1)\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}$	**3p**
	$(x_C-3)\vec{i}+(y_C-1)\vec{j}=3\vec{i}$, de unde obținem $x_C=6$ și $y_C=1$	**2p**
6.	$AB=AC$	**2p**
	$\frac{AB\cdot AB}{2}=18$, deci $AB^2=36$, de unde obținem $AB=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=9+0+0-0-0-2=7$	**3p**
b)	$M(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&2\\0&4&4\end{pmatrix}$, $M(x)\cdot M(2)=\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&8x+8&6x+4\\0&12x+8&8x+8\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&8x+8&6x+4\\0&12x+8&8x+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1&0&0\\0&x+1&x-1\\0&2x-2&x+1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$\det(M(n))=n(-n^2+4n+4)$, $\det(M(2n))=2n(-4n^2+8n+4)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2n(-n^2+4n+4)\le 2n(-4n^2+8n+4)$, de unde obținem $n^2(3n-4)\le 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ și $n=1$	**3p**
2.a)	$f(2)=2^3-2\cdot 2^2-a\cdot 2+2a=$	**3p**
	$=8-8-2a+2a=0$, pentru orice număr real a	**2p**

b)	$f = X^3 - 2X^2 - X + 2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 =$	**3p**
	$= -1 - 2 + 1 + 2 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$	**2p**
c)	$f = (X-2)(X^2 - a)$; $x_1 = 2$ și $\lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert = \sqrt{a}$, deci $\lvert x_1\rvert + \lvert x_2\rvert + \lvert x_3\rvert = 2 + 2\sqrt{a}$	**3p**
	$2 + 2\sqrt{a} = 8$, de unde obținem $a = 9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x(2x-4) + 2e^x + 2x - 2 =$	**3p**
	$= e^x(2x-2) + 2x - 2 = 2(x-1)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-e^x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(1-e^x)'} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(x-1)(e^x+1)}{-e^x} = 4$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ și, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 3 - 2e < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții	**3p**
2.a)	$\int_3^4 f(x)(3x^2+1)dx = \int_3^4 4x\,dx = 2x^2 \Big\|_3^4 =$	**3p**
	$= 32 - 18 = 14$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \dfrac{4x}{3x^2+1}dx = \dfrac{2}{3}\int_0^1 \dfrac{(3x^2+1)'}{3x^2+1}dx = \dfrac{2}{3}\ln(3x^2+1)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{2}{3}\ln 4 - \dfrac{2}{3}\ln 1 = \dfrac{4}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$g(x) = \dfrac{(3x^2+1)\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, deci $\mathcal{A} = \int_1^e \lvert g(x)\rvert dx = \int_1^e \left(3x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x\,dx = \int_1^e \left(\dfrac{3x^2}{2}\right)'\ln x\,dx + \dfrac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^e =$	**3p**
	$= 3\left(\dfrac{x^2\ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right)\Big\|_1^e + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3e^2}{4} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3e^2+5}{4}$	**2p**