EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că graficul său şi graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$ sunt simetrice față de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{ctg} 2=\dfrac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcție constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{I_2+aA+bB \mid a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ şi $I_n=\int_0^a\frac{t^n}{t+1}dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n},\ \forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.