Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1}=3$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizibil cu 20.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(8,8)$ și $C(11,4)$. Arătați că $AB=2BC$.

5p **6.** Arătați că $1+\sin 30^\circ=2\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & x-1\\ -2x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(2)+A(0)=2A(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)+xI_2)=2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-xy-4$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 3=1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\geq n-2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 3$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $e+1$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=$	**2p**
	$=\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{6}=2$	**3p**
2.	$f(a)=5a+1$, pentru orice număr real a	**2p**
	$5a+1=6$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$4x+1=9$, de unde obținem $4x=8$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt divizibile cu 20 sunt 20, 40, 60 și 80, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
	$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$, deci $AB=2BC$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$1+\sin 30^\circ=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $2\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-2)\cdot 0=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A(2)+A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=2A(1)$	**2p**
c)	$A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x & x-1\\ -2x & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x-1\\ -2x & 2+x\end{pmatrix}$ și $\det(A(x)+xI_2)=4x^2+2x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2+2x-2=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$1\circ 3=2(1+3)-1\cdot 3-4=$	**3p**
	$=8-3-4=1$	**2p**

b)	$y \circ x = 2(y+x) - yx - 4 =$	**2p**
	$= 2(x+y) - xy - 4 = x \circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$n \circ n = 4n - n^2 - 4$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$4n - n^2 - 4 \geq n - 2 \Leftrightarrow -n^2 + 3n - 2 \geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 1$ și $n = 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-1)' \cdot x^2 - (2x-1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \dfrac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} =$	**3p**
	$= \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f(1) = 1$, $f'(1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 1$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$;	**3p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+x+1) f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+x+1) \cdot \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 (2x+1)\,dx = (x^2+x)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 + 1 - 0 - 0 = 2$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$	**2p**
c)	$g(x) = e^x(2x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{A} = \int_0^1 \|g(x)\|dx = \int_0^1 e^x(2x+1)dx = e^x(2x+1)\Big\|_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx =$	**3p**
	$= e^x(2x+1)\Big\|_0^1 - 2e^x\Big\|_0^1 = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$	**2p**