

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 12$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 8$. Determinați numărul real m pentru care $f(1+m) = 1 - m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 3x + 5) = \lg 5$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+1}$ să fie natural.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,0)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreptele OA și BC sunt paralele.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = 9$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Arătați că $AB = 3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$.
- 5p c) Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + \frac{2x + 2y - 1}{4}$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.
- 5p b) Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^3}{(x-1)^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că ecuația $f(x) = m$ are exact două soluții, pentru orice $m \in (27, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + x \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - x \ln x) dx = 6$.

5p b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x - 1) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

5p c) Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(f(x) - x \ln x)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 12 = \frac{2 + a_3}{2}$ $a_3 = 22$	3p 2p
2.	$f(1+m) = m - 7$, pentru orice număr real m $m - 7 = 1 - m$, de unde obținem $m = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - 3x + 5 = 5$, de unde obținem $x^2 - 3x = 0$ $x = 0$ sau $x = 3$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere n pentru care numărul $\sqrt{n+1}$ este natural, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{7}{90}$	2p 3p
5.	$m_{OA} = 2$ $m_{BC} = \frac{a}{2}$ și, cum $m_{OA} = m_{BC}$, obținem $a = 4$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$, deci $\sqrt{3} = \frac{9}{AB}$ $AB = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 4 - 0 - 1 - 0 = 3$	2p 3p
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ x-1 & x-1 & x-1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ x-1 & x-1 & x-1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2x & 2x \\ 0 & 0 & 2x-2 \\ 2x & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
c)	$\det(A(x)) = (x-1)^2(x+1)$ și $\det(A(x)) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ Cum $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, obținem $\det(A(-x)) \neq 0$, deci $A(-x)$ este inversabilă	3p 2p
2.a)	$1 \circ 1 = 1 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1}{4} =$ $= 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	3p 2p

b)	$x \circ \frac{1}{2} = x \cdot \frac{1}{2} + \frac{2x + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2x - 1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	3p
c)	$\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} - x^2$, $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^4$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{1}{2} - x^4 = \frac{1}{2} - x^2$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 0$ sau $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{12x^2(x-1)^2 - 4x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$	3p
	$= \frac{12x^3 - 12x^2 - 8x^3}{(x-1)^3} = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{(x-1)^2} = 4$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 8$, deci dreapta de ecuație $y = 4x + 8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, 3)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1, 3)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (3, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(3, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, $f(3) = 27$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x) = m$ are exact două soluții pentru orice $m \in (27, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) - x \ln x) dx = \int_1^3 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$	2p
b)	$\int_1^e (f(x) - x - 1) dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right) \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \frac{x^2}{4} \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	2p
c)	$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \in [1, 3]$, deci $V = \pi \int_1^3 g^2(x) dx = \pi \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^4} dx = \pi \left(-\frac{1}{3(x+1)^3}\right) \Big _1^3 = \frac{7\pi}{192}$	3p
	$\frac{7\pi}{192} = \frac{7\pi}{24a}$, de unde obținem $a = 8$	2p