

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $6 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{5}) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(1) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{x-1} = 10^{-2x} \cdot 10^2$.
- 5p** 4. Determinați câte dintre numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, au ambele cifre pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ și $B(6,0)$. Determinați distanța dintre punctele B și M , unde punctul M este mijlocul segmentului OA .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = 6$ și aria egală cu 24. Arătați că $AB = 8$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x+4 \\ 2x & 4x-3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x) - xA) = x$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $B(x) + B(x+2) = 2A \cdot A \cdot A$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 - 2X - 4$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 6$, arătați că $f(1) = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați rădăcinile polinomului f , știind că restul împărțirii lui f la polinomul $X - 2$ este egal cu 8.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3-x}{x^2} + \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$.
- 5p** c) Arătați că $4f(x) - 1 \geq \ln 16$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_2^4 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = 18$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^6 (f(x) - 3x) dx = 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_{-2}^1 \frac{1}{x+3} \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = 9(a - 2\ln 2)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$6 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{5}) = 6 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$ $= 6 - 5 = 1$	2p 3p
2.	$f(a) = 2a - 3, f(1) = -1$ $2a - 3 - 1 = 0$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p
3.	$10^{x-1} = 10^{-2x+2}$, de unde obținem $x - 1 = -2x + 2$ $x = 1$	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 2 moduri, deci sunt $3 \cdot 2 = 6$ numere	3p 2p
5.	$M(2, 3)$ $BM = 5$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$, deci $24 = \frac{AB \cdot 6}{2}$ $AB = \frac{24 \cdot 2}{6} = 8$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 =$ $= 2 - 1 = 1$	3p 2p
b)	$B(x) - xA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ x & 2x - 3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(B(x) - xA) = -2x - 3$, pentru orice număr real x $-2x - 3 = x$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $2A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}$ $B(x) + B(x+2) = \begin{pmatrix} 2x+4 & 2x+10 \\ 4x+4 & 8x+2 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} 2x+4 & 2x+10 \\ 4x+4 & 8x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}$ și obținem $x = 3$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 + 6X^2 - 2X - 4 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 =$ $= 1 + 6 - 2 - 4 = 1$	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m, x_1 x_2 x_3 = 4$ $16 = -m + 4$, de unde obținem $m = -12$	2p 3p
c)	$f(2) = 8 \Rightarrow 4m = 8$, de unde obținem $m = 2$ $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 4 = (X + 2)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, deci rădăcinile polinomului f sunt $-2, -\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x(3-x)}{x^4} + \frac{1}{x} =$ $= \frac{x-6}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-6}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{x}{x^2} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = 0$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$; pentru orice $x \in (0, 2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 2]$ și, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$</p> <p>$f(x) \geq f(2)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ și, cum $f(2) = \frac{1}{4} + \ln 2$, obținem $4f(x) - 1 \geq \ln 16$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.a)	$\int_2^4 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = \int_2^4 3x dx = \frac{3x^2}{2} \Big _2^4 =$ $= \frac{48}{2} - \frac{12}{2} = 18$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\int_1^6 (f(x) - 3x) dx = \int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \int_1^6 \frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} \Big _1^6 =$ $= 6 - 4 = 2$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	$\int_{-2}^1 \frac{1}{x+3} \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = \int_{-2}^1 \left(3 - \frac{9}{x+3} \right) dx = 3x \Big _{-2}^1 - 9 \ln(x+3) \Big _{-2}^1 = 9(1 - \ln 4)$ <p>$9(1 - 2 \ln 2) = 9(a - 2 \ln 2)$, de unde obținem $a = 1$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>