Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}+3=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{4x-2}=5^2$.

5p **4.** Prețul unui obiect este 300 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(5,m)$ și $M(3,4)$. Determinați numărul real m, știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $2\left(\sin 45^\circ+\sin 30^\circ\right)\left(\sin 45^\circ-\sin 30^\circ\right)=\cos 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ x+1 & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=0$.

5p **b)** Arătați că $A(3)+A(5)=2A(4)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $\det\left(A(n)+I_2\right)\geq 0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+mX-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Arătați că $x_1+x_2+x_3=3x_1x_2x_3$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)=1$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\left(x^2-2x+3\right)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $3\left(e^2-1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}+3=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}+3=$	**2p**
	$=4+3=7$	**3p**
2.	$f\left(m\right)=3m-6$, pentru orice număr real m	**3p**
	$3m-6=3$, de unde obținem $m=3$	**2p**
3.	$4x-2=2$, de unde obținem $4x=4$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot 300=90$ de lei	**3p**
	Prețul după ieftinire este $300-90=210$ de lei	**2p**
5.	$3=\frac{1+5}{2}$ și $4=\frac{m+1}{2}$	**3p**
	$m=7$	**2p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\left(\sin 45°+\sin 30°\right)\left(\sin 45°-\sin 30°\right)=2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}=\cos 60°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(0\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(0\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot 0=$	**3p**
	$=0-0=0$	**2p**
b)	$A\left(3\right)+A\left(5\right)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 10 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}=2A\left(4\right)$	**2p**
c)	$A\left(n\right)+I_2=\begin{pmatrix}1 & n\\ n+1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & n\\ n+1 & 1\end{pmatrix}$ și $\det\left(A\left(n\right)+I_2\right)=2-n\left(n+1\right)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$n\left(n+1\right)\leq 2$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ și $n=1$	**3p**
2.a)	$f\left(0\right)=0^3-3\cdot 0^2+m\cdot 0-1=$	**3p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=1$, de unde obținem $x_1+x_2+x_3=3x_1x_2x_3$, pentru orice număr real m	**3p**

c)	$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+m\cdot 1-1=1-3+m-1=m-3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$f(1)=0$, de unde obținem $m=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$	**3p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)e^x}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1-0-0=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	Funcția F este derivabilă și $F'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+3\right)e^x=\left(x^2+1\right)e^x$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\displaystyle\mathcal{A}=\int_0^2\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^2\left(x^2+1\right)e^x dx=\left.F(x)\right\vert_0^2=F(2)-F(0)=$	**3p**
	$=3e^2-3=3\left(e^2-1\right)$	**2p**