Colegiul Tehnic Victor Ungureanu, Câmpia Turzii
Județul Cluj

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic **Simulare 14.05.2024**

Filiera tehnologică, profilul servicii, profilul tehnic
Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu. La toate subiectele scrieți rezolvările complete.

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Arătaţi că $3-\left(0,2+\frac{4}{5}\right)=2$
5p	2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $log_2(2x^2-x+1)=4$
5p	3. Determinaţi coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: R \to R, f(x)=-x^2+3x-5$ cu axa Oy.
5p	4. După o scumpire cu 15%, preţul unui produs devine 690 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,3)$, $O(0,0)$. Determinaţi lungimea medianei dusă din O în triunghiul AOB.
5p	6. Să se arate că $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ}+\left(\cos^2 45^\circ-\sin^2 45^\circ\right)=1$
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Fie matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3x & -1\end{pmatrix}$, x este număr real.
5p	a) Să se arate că $\det B=-2$
5p	b) Să se determine numărul real x pentru care $2AB-B=C(x)$.
5p	c) Să se arate că $\det\left(A^2-B^2\right)=0$
	2. Se consideră $f=X^3-3X^2-X+3$ cu coeficienți reali cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.
5p	a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-X
5p	b) Să se determine rădăcinile polinomului f.
5p	c) Să se calculeze $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.
5p	a) Să se arate că $f'(x)=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, \forall x \in R$
5p	b) Să se demonstreze că $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1]$.
5p	c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul x=-1 .
	2. Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5}, & x \ge 3\\ x-1, & x<3\end{cases}$.
5p	a) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe R
5p	b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [3;4] \to R, g(x)=f(x)$
5p	c) Să se arate că $\int_1^e f(x)\cdot \ln x\,dx=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

MATEMATICĂ M_tehnologic– proba E c)
Barem de corectare
Subiectul I - 30 p

1	$3-\left(0.2+\frac{4}{5}\right)=3-\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)$ Finalizare	3p 2p
2	C: $2x^2-x+1>0$ $\Box\ 2x^2-x+1=2^4$ $2x^2-x-15=0$ $x_1=\frac{-5}{2}$ convine, $x_2=3$ convine, $S=\left\{\frac{-5}{2},3\right\}$	1p 1p 1p 2p
3	$f(0)=-0^2+3\cdot 0-5=0+0-5=-5$ A(0,-5)	3p 2p
4	$x+\frac{15}{100}x=690 \Leftrightarrow x\cdot\frac{115}{100}=690$ $\Leftrightarrow x=\frac{69000}{115} \Leftrightarrow x=600$	2p 3p
5	Fie $M(x_M,y_M)$ mijlocul segmentului AB $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}, y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ Rezultă $M(3,4)$ Mediana este OM şi $OM=d(O,M)=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}$ $=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$	1p 1p 2p 1p
6	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$ $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}_{1}+\underbrace{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}_{0}=1,(A)$	3p 2p

Subiectul II - 30 p

1a	$\det B=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0\cdot(-1)-2\cdot 1$ $=0-2=-2$	3p 2p
1b	$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ $2AB-B=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -4 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}$ $2AB-B=C(x)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3x & -1\end{pmatrix}$ rezultă $-6=3x\Rightarrow x=-2$	1p 2p 2p
1c	$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	1p

	$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\det\left(A^2 - B^2\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 1\cdot 2 = 2 - 2 = 0$	1p 1p 2p
2a	Câtul =x-2 Restul= -3x+3	2p 3p
2b	Divizorii termenului liber sunt -3, -1, 1, 3 Aplicarea corectă a schemei lui Horner și determinarea rădăcinilor $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$	1p 3p 1p
2c	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=f(2)=$ $=2^3-3\cdot 2^2-2+3=8-3\cdot 4-2+3=-3$	1p 2p 2p

Subiectul III – 30 p

1a	$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'\left(x^2+1\right) - x^3\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^2\left(x^2+1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ $= \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, (A)$	3p 2p
1b	Observăm că $f'(x) \geq 0, \forall x \in R$ deci funcția f este strict crescătoare pe R. Prin urmare $f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0;1]$	2p 3p
1c	$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$ $f(-1)=-\frac{1}{2}$, $f'(-1)=1$ $y=x+\frac{1}{2}$	1p 1p 2p 1p
2a	f admite primitive pe R dacă este continuă pe R f este continuă pe $R-\{3\}$ fiind funcţie elementară (1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (x-1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \sqrt{x^2-5} = 2 \\ f(3)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ continuă în x=3 (2) Din (1) și (2) rezultă că f este continuă pe R deci admite primitive pe R	1p 1p 2p 1p

2b	$V=\pi\int_3^4 g^2(x)dx=\pi\int_3^4\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2dx=\pi\int_3^4(x^2-5)dx$ $=\pi\left(\frac{x^3}{3}-5x\right)\Big\vert_3^4=\pi\left(\frac{64}{3}-20\right)-\pi\left(\frac{27}{3}-15\right)=\pi\left(\frac{37}{3}-5\right)=\frac{22}{3}\pi$	2p 3p
2c	$\int_1^e f(x)\cdot\ln x dx=\int_1^e(x-1)\cdot\ln x dx$ $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $g'(x)=x-1\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}-x$ $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ $\int(x-1)\cdot\ln x dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx$ $=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\int\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x+C$ $\int_1^e(x-1)\cdot ln\,x\,dx=\left(\left(\frac{x^2}{2}-x\right)ln\,x-\frac{x^2}{4}+x\right)\Big\vert_1^e$ $=\left(\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\underbrace{ln\,e}_{1}-\frac{e^2}{4}+e\right)-\left(\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\underbrace{ln\,1}_{0}-\frac{1^2}{4}+1\right)$ $=\left(\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e\right)-\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4},(A)$	1p 1p 2p 1p

Notă: se acordă 10 p din oficiu.