UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB 2024
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

1. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 1$, $AD = 2$ și $m(\widehat{B}) = 60°$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$; B $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$; C $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -1$; D $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$.

2. Dacă punctele $A(1,2)$ şi $B(4,6)$ sunt vârfurile dreptunghiului $ABCD$, atunci ecuația dreptei AD este:

A $4x + 3y - 11 = 0$; B $3x + 4y - 11 = 0$; C $4x - 3y + 2 = 0$; D $4x + 3y + 2 = 0$.

3. Fie $\overrightarrow{i}$ și $\overrightarrow{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (b+4)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari, atunci valoarea parametrului $b \in \mathbb{R}$ este:

A -2; B -1; C 1; D 2.

4. Dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface relaţia $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma elementelor lui X este:

A -2; B 0; C 2; D 4.

5. Considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ x - 2y + az &= a \\ 3x + 2y + \ \ z &= 2, \end{cases}$$

unde a este un parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.
B Sistemul este compatibil pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
C Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{7}{8}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{8}$.
D Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$.

6. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ este:

A $\sqrt{e}$; B 1; C e; D e^2.

7. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ ae^{-x} + be^x + cx\left(e^x - e^{-x}\right), & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ e^{2-x}, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$, atunci valoarea sumei $a+2b+c$ este:

A 0; B 2; C 1; D $\frac{1}{2}$.

8. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ cu $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; B $\sin(2x) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; C $\cos(2x) = \frac{7}{9}$; D $\operatorname{tg}(x) = -2\sqrt{2}$.

9. În triunghiul ABC avem $D \in (AB)$, $DB = 2 \cdot AD$, $E \in (AC)$ și $AC = 3 \cdot EC$. Dacă punctele A, D şi E au coordonatele $A(0,6)$, $D(4,4)$ și $E(-4,2)$, atunci coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt:

A $G(2,2)$; B $G\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$; C $G(0,0)$; D $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

10. Numerele reale $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}, a_{100}$ sunt în progresie aritmetică și

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{96} + a_{98} + a_{100} = 200.$$

Notăm cu d rația progresiei aritmetice. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $d > 0$; B $d < 0$; C Progresia aritmetică este unic determinată de condițiile date;
D Nu există astfel de progresie aritmetică.

11. Dacă $x > 0$ și al treilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{x} + (\sqrt{x})^{1+\lg x}\right)^5$ este 10000, atunci

A $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$; B $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 1000\right\}$; C $x \in \left\{\frac{1}{10}, 1000\right\}$; D $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$.

12. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{x - 6\sqrt{x+1} + 10} + \sqrt{x + 6\sqrt{x+1} + 10} = 6,$$

atunci

A $3 \in S$; B $15 \in S$; C mulțimea S este finită; D mulțimea S este infinită.

13. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$. Notăm cu a cea mai mică valoare a lui f şi cu b cea mai mare valoare a lui f. Atunci lungimea intervalului $[a,b]$ este:

A 2; B 6; C 8; D 10.

14. Notăm cu I valoarea integralei $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1}$. Să se precizeze care dintre umătoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $I > \frac{\pi}{8}$; B $I < \frac{\pi}{8}$; C $I < \frac{1}{4}\ln 2$; D $I > \frac{1}{4}\ln 2$.

15. În triunghiul ABC avem $A(3,4)$ și $B(2,1)$, iar $D(0,2)$ este mijlocul segmentului BC. Aria triunghiul ABC este egală cu:

A 1; B 3; C 5; D 7.

16. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ şi $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = 0\}$, atunci

A $1 \in S$; B $-1 \in S$; C există exact două numere iraționale în S;
D există un singur număr irațional în S.

17. Dacă z este un număr complex astfel încât $z^2 = i$, atunci $(z^3 + \overline{z})^2$ este egal cu

A $-2i$; B $2i$; C 2; D 0.

18. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$ este:

A 0; B 1; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

19. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. Aria mulţimii plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ şi $x = 1$ este:

A $\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; B $\sqrt{2}$; C $\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; D $2\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

20. În rombul $ABCD$ avem $E \in (BC)$, $BE = 2\cdot EC$, $F \in (DC)$ și $FD = 3\cdot FC$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; B $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; C $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; D $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

21. În triunghiul ABC avem $A(2,13)$, $B(-7,1)$ și $C(7,1)$. Știind că AD este bisectoare cu $D \in (BC)$, lungimea segmentului BD este:

A $\frac{13}{2}$; B 7; C $\frac{15}{2}$; D 8.

22. Dacă funcția $f\colon (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$ este morfism de grupuri și $f(\hat{5}) = \hat{9}$, atunci

A $f(\hat{1}) = \hat{0}$; B $f(\hat{1}) = \hat{9}$; C $f(\hat{1})$ nu este unic determinat de condițiile date;
D nu există astfel de morfism.

23. Notăm cu A mulţimea tuturor perechilor de numere reale (x, y) cu proprietatea că $0 \le x < y$ şi $\frac{x}{2024^x} = \frac{y}{2024^y}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Mulţimea A este vidă; B Mulţimea A conţine un singur element;
C Mulţimea A conţine o infinitate de elemente; D Mulţimea A conţine un element de forma $(x, 1)$.

24. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie $(x_n)_{n\ge 0}$ şirul definit prin $x_0 = a$ şi $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ oricare ar fi $n \ge 0$. Mulţimea tuturor valorilor lui a pentru care şirul este convergent este:

A $\{-1, 0\}$; B $[-1, 0]$; C $[0, 1]$; D $(-\infty, 0]$.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Răspunsuri corecte

Concursul Mate-Info UBB, 2024

Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. $\boxed{\mathbf{B}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

2. $\boxed{\mathbf{B}}$

3. $\boxed{\mathbf{A}}$

4. $\boxed{\mathbf{C}}$

5. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

6. $\boxed{\mathbf{D}}$

7. $\boxed{\mathbf{B}}$

8. $\boxed{\mathbf{B}}$, $\boxed{\mathbf{C}}$

9. $\boxed{\mathbf{A}}$

10. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{C}}$

11. $\boxed{\mathbf{C}}$

12. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

13. $\boxed{\mathbf{C}}$

14. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

15. $\boxed{\mathbf{D}}$

16. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{C}}$

17. $\boxed{\mathbf{D}}$

18. $\boxed{\mathbf{C}}$

19. $\boxed{\mathbf{A}}$

20. $\boxed{\mathbf{A}}$, $\boxed{\mathbf{B}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

21. $\boxed{\mathbf{C}}$

22. $\boxed{\mathbf{B}}$

23. $\boxed{\mathbf{C}}$, $\boxed{\mathbf{D}}$

24. $\boxed{\mathbf{B}}$