

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 1 + i$. Arătați că $z_1 + iz_2 = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a + 1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x - x^2) = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr par, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ și C . Știind că punctul B este mijlocul segmentului OC , determinați distanța dintre punctele A și C .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $B = \frac{\pi}{6}$ și mediana $AM = 4$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3x - 3 \\ 1 - x & 3x - 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care $A(2) \cdot A(0) + A(5) = mI_2$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x) - A(0) \cdot A(1 - x)) = 3$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 1 - \sqrt{xy + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 8 = 7$.
- 5p** b) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ \frac{3}{x} = x$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(n \circ (n + 2)) \circ (n + 4) > \frac{n^2}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = x(x^2 + 5x + 4)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}} \leq x^2(x + 2) \leq \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in [-4, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1} \right) dx = 7$.

5p b) Arătați că $\int_1^5 (3x^2 - f(x)) dx = 2 \ln 3$.

5p c) Se consideră funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x} - 1)$. Arătați că $\int_1^4 (a + bg(x))g'(x) dx = 4a$,
pentru orice numere reale a și b .

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1 + iz_2 = 3 - i + i(1 + i) = 3 - i + i + i^2 = 3 + (-1) = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = 5 - a$, $g(a + 1) = a + 3$ $5 - a = a + 3$, de unde obținem $a = 1$	2p 3p
3.	$4x - x^2 = 3$, de unde obținem $x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$, care convin	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$C(4, 0)$ $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	2p 3p
6.	$AC = 4$ $AB = 4\sqrt{3}$, deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 = 0 + 3 = 3$	3p 2p
b)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A(5) = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$, $A(2) \cdot A(0) + A(5) = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_2$ $8I_2 = mI_2$, de unde obținem $m = 8$	3p 2p
c)	$A(1-x) = \begin{pmatrix} 1-x & -3x \\ x & 1-3x \end{pmatrix}$, $A(x) - A(0) \cdot A(1-x) = \begin{pmatrix} 4x & -6x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(x) - A(0) \cdot A(1-x)) = 12x^2$, pentru orice număr real x $12x^2 = 3$, de unde obținem $x = -\frac{1}{2}$ sau $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 8 = 1 + 8 + 1 - \sqrt{1 \cdot 8 + 1} = 10 - 3 = 7$	3p 2p
b)	$x \circ \frac{3}{x} = x + \frac{3}{x} - 1$, pentru orice $x \in M$ $x + \frac{3}{x} - 1 = x$, de unde obținem $x = 3$, care convine	3p 2p

c)	$n \circ (n+2) = n+2$, $(n \circ (n+2)) \circ (n+4) = n+4$, pentru orice număr natural nenul n	3p
	$n+4 > \frac{n^2}{2}$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$ sau $n=3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (3x^2 + 4x)e^x + (x^3 + 2x^2)e^x =$	3p
	$= (x^3 + 5x^2 + 4x)e^x = x(x^2 + 5x + 4)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 0$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ sau $x = -1$ sau $x = 0$; pentru $x \in [-4, -1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-4, -1]$ și pentru $x \in [-1, 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$	2p
	$f(-4) = -\frac{32}{e^4}$, $f(-1) = \frac{1}{e}$ și $f(0) = 0$, deci $-\frac{32}{e^4} \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$, de unde obținem $-\frac{32}{e^{x+4}} \leq x^2(x+2) \leq \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in [-4, 0]$	3p
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1} \right) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_1^5 (3x^2 - f(x)) dx = \int_1^5 \frac{2}{x+1} dx = 2 \int_1^5 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = 2 \ln(x+1) \Big _1^5 =$	3p
	$= 2 \ln 6 - 2 \ln 2 = 2 \ln 3$	2p
c)	$\int_1^4 (a + bg(x))g'(x) dx = \int_1^4 ag'(x) dx + \int_1^4 bg(x)g'(x) dx = ag(x) \Big _1^4 + \frac{bg^2(x)}{2} \Big _1^4 =$	3p
	$= a(g(4) - g(1)) + \frac{b}{2}(g^2(4) - g^2(1))$, pentru orice numere reale a și b $g(1) = f(0) = -2$, $g(4) = f(1) = 2$, deci $\int_1^4 (a + bg(x))g'(x) dx = 4a$, pentru orice numere reale a și b	2p