INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXI-a, 26– 27 IANUARIE 2024

CLASA A V-A

Problema 1. M-am gândit la un număr. L-am înmulţit cu 13 şi am şters ultima cifră a rezultatului. Numărul obţinut l-am înmulţit cu 7 şi am şters ultima cifră a noului rezultat. Am obţinut numărul 20.

La ce număr m-am gândit?

Problema 2. Cristi a înmulţit 11 numere naturale consecutive mai mici decât 100, iar Andrei le-a adunat. Se poate ca ultimele două cifre ale numărului lui Cristi să coincidă cu ultimele două cifre ale numărului lui Andrei?

Problema 3. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul $a = 2^{n+1} + 12^n + 10^n$ este pătrat perfect.

Problema 4. a) Aşezaţi numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 în 8 căsuţe, ca cele din figura de mai jos, astfel încât suma numerelor din oricare 4 căsuţe vecine să fie 17 sau 18.

b) Aflaţi toate numerele s cu proprietatea că putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 în cele 8 căsuţe astfel încât suma numerelor din oricare 4 căsuţe vecine să fie s sau $s + 1$.

Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CLASA A VI-A

Problema 1. Numerele naturale x, y, z satisfac egalitatea:

$$4x + 7z = 7y + 9.$$

a) Arătaţi că $x + 2y + 3z + 4$ este multiplu de 5.
b) Determinaţi restul împărţirii lui $2x + y + 5z$ la 6.

Problema 2. Pentru fiecare număr natural n diferit de 0 notăm cu $n!$ produsul $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Astfel, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, etc.

Aflaţi numerele naturale nenule u, v, t din egalitatea:

$$u! + 2^v = t!.$$

Problema 3. Pe tablă sunt scrise 17 numere din mulţimea $\{2, 3, 4, 5\}$, care au suma divizibilă cu 17. Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele $2, 3, 4, 5$ a fost scris de mai puţin de 3 ori.

Problema 4. Cristi aranjează numerele naturale în ordinea crescătoare a produsului cifrelor, iar dacă două numere au acelaşi produs al cifrelor atunci cel mai mare urmează după cel mai mic în ordinea naturală.

Astfel numerele din mulţimea $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$ sunt aranjate în ordinea: 20, 21, 14, 22, 15, 16, 23, 17, 18, 24, 19, deci numerele 15 şi 16 (şi de asemenea numerele 17 şi 18) sunt consecutive şi în această ordonare.

a) O mulţime A de numere naturale consecutive este interesantă dacă conţine numerele 134 şi 135, iar 134 şi 135 rămân consecutive şi după ce îi ordonăm elementele prin metoda lui Cristi.

Câte mulţimi interesante există?

b) Găsiţi 2024 de numere naturale consecutive care rămân consecutive şi după ce le aşezăm în ordinea lui Cristi.

Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXI-a, 26– 27 IANUARIE 2024

CLASA A VII-A

Problema 1. Aflaţi numerele prime care pot fi scrise sub forma:

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5|,$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt numere întregi consecutive.

Problema 2. Pe tablă sunt scrise 5 numere naturale consecutive. La o operaţie ştergem două numere a, b de pe tablă şi adăugăm la numerele rămase numărul $\sqrt{a^2+b^2}$. Procedând la fel cu noile numere, după 4 operaţii pe tablă rămâne un singur număr.

Demonstraţi că acest număr este iraţional.

Problema 3. Mediatoarea laturii AB a paralelogramului $ABCD$ intersectează perpendiculara în D pe AD în punctul E, situat în interiorul paralelogramului. Fie M mijlocul laturii DC.

Aflaţi $\angle BME$.

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $\angle A = 90°$. Notăm cu D mijlocul laturii AB, cu F mijlocul laturii BC şi cu E proiecţia punctului A pe CD. Demonstraţi că:

a) $CE = 2AE$

b) $BE \perp EF$.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXI-a, 26– 27 IANUARIE 2024

CLASA A VIII-A

Problema 1. Aflaţi valoarea maximă a sumei $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ când a, b, c sunt numere reale cu $a^2+b^2+c^2=1$.

Problema 2. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât xy, yz şi zx sunt raţionale.

Demonstraţi că:

a) numărul $x^2+y^2+z^2$ este raţional;

b) dacă $x^3+y^3+z^3$ este raţional, atunci x, y şi z sunt raţionale.

Problema 3. Piramida $VABCD$ are baza drepunghiul $ABCD$. Notăm cu P proiecţia lui C pe VA.

Demonstraţi că $PD \perp VB$ dacă şi numai dacă $VA \perp AB$.

Problema 4. Aflaţi cel mai mare număr natural n de două cifre pentru care există n numere naturale (nu neapărat distincte) a căror medie aritmetică nu este un număr întreg, însă media aritmetică a oricăror m dintre ele, $m=2,3,\ldots,n-1$, este un număr întreg.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.