Examenul naţional de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model ianuarie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1)** Calculați $\log_3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)-\log_3\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$.

5p **2)** Se consideră funcția strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Determinați numerele reale a și b știind că funcția f îndeplinește condiția: $f(x)-f^{-1}(x)=\dfrac{8}{9}\left[f(x)+1\right]$ pentru orice x real , unde f^{-1} este inversa funcției f.

5p **3)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 x\right)<1$.

5p **4)** Determinați probabilitatea ca alegând un număr format din 2 cifre, acesta să fie divizor al lui 2024.

5p **5)** În sistemul ortogonal de axe xOy se consideră vectorii $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=(m+2)\vec{i}-m\vec{j}$, $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Determinați numărul real m pentru care unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este egal cu unghiul format de vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$.

5p **6)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x\cos 2x=\sin^2 x-2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1) Se consideră permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \alpha,\beta\in S_4$.

5p **a)** Calculați α^{2024}.

5p **b)** Rezolvați în S_4 ecuația $\alpha\cdot x=\beta^{-1}$.

5p **c)** Rezolvați în S_4 ecuația $x^2=\beta$.

2) Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=(x+4)(y+4)+2$.

5p **a)** Demonstrați că $\hat{3}$ este element neutru al legii de compoziție.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z}_6$ ecuația $x\circ x\circ x=x$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6, f(x)=x\circ\hat{1}$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=2^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Determinați imaginea funcției f.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.isjsb.ro

5p	**b)** Demonstrați că pentru orice $x \in (0,\infty)$ funcția f este convexă.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)-1}{f'(x)}$.
	2) Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x(x^3+1)}$.
5p	**a)** Determinați $\int (x^2-x+1) f(x)\,dx$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^2 x^{-n+1} f(x)\,dx$.

Examenul naţional de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model ianuarie2024

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$\log_3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)-\log_3\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}=\log_3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)+\log_3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}\right)=$	**3p**
	$=\log_3\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}\right)=\log_3(5-4)=0$	**2p**
2.	Cum funcția este inversabilă pentru orice x real, avem $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$, $a\neq 0$	**2p**
	Condiția din enunț devine $ax+b-\frac{x-b}{a}=\frac{8}{9}(ax+b+1)\Rightarrow a=3, b=2$ sau $a=-3,\ b=-4$ care nu convine.	**3p**
3.	Din $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\Rightarrow \log_2 x>\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$	**3p**
	$x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$	**2p**
4.	$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$. Numerele de două cifre, divizori ai lui 2024 sunt: $\{11, 22, 23, 44, 46, 88, 92\}$, deci avem 7 cazuri favorabile. Sunt 90 de numere formate din două cifre, deci avem 90 cazuri posibile	**3p**
	Probabilitatea este $P=\frac{7}{90}$	**2p**
5.	$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{m+6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{(m+2)^2+m^2}}, \cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{5m+4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{(m+2)^2+m^2}}$	**3p**
	$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)\Rightarrow m=\frac{1}{2}$	**2p**
6.	Cum $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^3 x+\sin^2 x-\sin x-2=0\Leftrightarrow(\sin x-1)\left(2\sin^2 x+3\sin x+2\right)=0$	**3p**
	Soluția care convine este $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1.a)	$\alpha^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$	**3p**
	$\alpha^{2024}=\left(\alpha^2\right)^{1012}=e$	**2p**
b)	$\beta^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\beta$	**2p**
	$x=\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}=\alpha\cdot\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	**3p**
c)	Fie $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}\in S_4$. Ecuația devine $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	**2p**
	Se obțin soluțiile $x_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$\hat{3}\circ x=x+\hat{4}+\hat{2}=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$	**2p**
	$x\circ\hat{3}=\hat{4}+x+\hat{2}=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$, deci $\hat{3}$ este element neutru al legii de compoziție	**3p**
b)	$x\circ x\circ x=x\Leftrightarrow\left(x+\hat{4}\right)\left[\left(x+\hat{4}\right)^2-\hat{1}\right]=\hat{0}$	**2p**
	Toate elementele $x\in\mathbb{Z}_6$ verifică ecuația.	**3p**
c)	$f(x)=x\circ\hat{1}=\hat{5}x+\hat{4}$	**2p**
	Cum $f(\hat{0})=\hat{4}, f(\hat{1})=\hat{3}, f(\hat{2})=\hat{2}, f(\hat{3})=\hat{1}, f(\hat{4})=\hat{0}, f(\hat{5})=\hat{5}$ funcția este bijectivă	**3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1.a)	$f'(x)=-2^{\frac{1}{x}}\ln 2\frac{1}{x^2}<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ deci *f* este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1, \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\infty$, $\operatorname{Im} f=(0,1)\cup(1,\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}\ln 2}{x^4}(\ln 2+2x)$	**2p**
	$\frac{2^{\frac{1}{x}}\ln 2}{x^4}>0$, $\ln 2+2x>0\Rightarrow f''(x)>0$ pentru orice $x>0$, deci funcția f este convexă pentru orice $x>0$	**3p**

c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{-2^{\frac{1}{x}}\ln 2}\cdot x^2=-\dfrac{1}{\ln 2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x}{2^{\frac{1}{x}}}\cdot x$.	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\ln 2$ avem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-1}{f'(x)}=-\infty$	**2p**
2.a)	$\int\left(x^2-x+1\right)f(x)\,dx=\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx$	**2p**
	$=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\ln\dfrac{x}{x+1}+c,c\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\int_1^2\dfrac{1}{x\left(x^3+1\right)}dx=\dfrac{1}{3}\int_1^2\dfrac{3x^2}{x^3\left(x^3+1\right)}dx$. Folosind notația $x^3=t$ se obține	**3p**
	$\dfrac{1}{3}\int_1^8\dfrac{1}{t(t+1)}dt=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{16}{9}$	**2p**
c)	$\int_1^2 x^{-n+1}f(x)dx=\int_1^2 x^{-n+1}\dfrac{1}{x\left(x^3+1\right)}dx=\int_1^2\dfrac{1}{x^n\left(x^3+1\right)}dx$	**2p**
	Cum $0<\dfrac{1}{x^n\left(x^3+1\right)}<\dfrac{1}{x^n}$. Se obține $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2 x^{-n+1}f(x)dx=0$	**3p**