Examenul naţional de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_șt_nat*

Model ianuarie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1)** Ordonați descrescător numerele: $\left[\sqrt{17}\right]$, $3!$, $\log_2 34$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

5p **2)** Determinați valorile numărului real m știind că vârful parabolei asociate graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2mx+m+2$ este situat în cadranul IV al sistemului de axe ortogonal xOy.

5p **3)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(9^x-3^{x+1}\right)=2+\log_3\left(3^x-3\right)$.

5p **4)** Calculați probabilitatea ca alegând un număr format din 3 cifre distincte, cifrele acestuia să fie numere prime.

5p **5)** Se consideră dreptele d_1, d_2 de ecuații $d_1: 2x+y-5=0$, $d_2: 2x-y+5=0$. Determinați ecuația bisectoarei unghiului format de cele două drepte.

5p **6)** Se consideră expresia $E(x)=\sin x\cos x-\sin^2 2x+\cos 3x$. Calculați $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1) Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 5^x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $A(x)\cdot A\left(2x^2\right)=I_2$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(\left(2^x+5^x\right)A(x)-A^2(x)\right)>0$ pentru orice număr real x.

2) Se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy+x+y,\ x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},\ x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\ 2024 ori}=x$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații $\begin{cases}x\circ y=z\\ y\circ z=x\\ z\circ x=y\end{cases}$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.isjsb.ro

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}, a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=b=1$ determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **b)** Determinați a și b astfel ca dreapta de ecuație $y=2x+3$ să fie asimptotă oblică la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **c)** Determinați numărul real b știind că ecuația tangentei în punctul $x_0=2$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x+5$.

2) Se consideră funcțiile

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+x^2\right)+x\,arctgx+3,\quad g(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}+arctgx$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.isjsb.ro

Examenul naţional de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model ianuarie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$\left[\sqrt{17}\right]=4$ $3!=6$ $5<\log_2 34<6$	**3p**
	$3!>\log_2 34>\left[\sqrt{17}\right]$	**2p**
2.	$x_V=m, y_V=-m^2+m+2$	**2p**
	Din $x_V>0, y_V<0$ avem $m\in(2,\infty)$	**3p**
3.	Ecuația se scrie $\log_3\left(9^x-3^{x+1}\right)=\log_3 9+\log_3\left(3^x-3\right)\Rightarrow 9^x-12\cdot 3^x+27=0$	**3p**
	$x=2$ care convine, $x=1$ care nu convine	**2p**
4.	Numărul cazurilor posibile este 648	**2p**
	Cum cifrele pot lua valorile $\{2,3,5,7\}$ avem 24 cazuri favorabile, deci probabilitatea este $\frac{24}{648}=\frac{1}{27}$	**3p**
5.	Cele două drepte sunt concurente și simetrice față de axa *Oy*	**3p**
	Ecuația bisectoarei este $x=0$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}$	**2p**
	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 5^x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2^y & 0\\ 0 & 5^y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{x+y} & 0\\ 0 & 5^{x+y}\end{pmatrix}$	**3p**

	$A(x+y)=\begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 \\ 0 & 5^{x+y} \end{pmatrix} \Rightarrow A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$A(x)\cdot A(2x^2)=I_2=A(0)$	2p
	$x+2x^2=0 \Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$	3p
c)	Din calcul sau teorema Cayley-Hamilton avem că $(2^x+5^x)A(x)-A^2(x)=10^x I_2$	3p
	$\det\left((2^x+5^x)A(x)-A^2(x)\right)=10^{2x}>0$, pentru orice x real	2p
2.a)	$x\circ y=2xy+x+y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2x\left(y+\frac{1}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$	3p
	$=\left(y+\frac{1}{2}\right)(2x+1)-\frac{1}{2}=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},\ x,y\in\mathbb{R}$	2p
b)	Se demonstrează că $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\ n\ ori}=2^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}, n\in\mathbb{N}^*$	2p
	Ecuația devine $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left[2^{2023}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2023}-1\right]=0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ și 0	3p
c)	Dacă notăm $x+\frac{1}{2}=a, y+\frac{1}{2}=b, z+\frac{1}{2}=c$ sistemul devine $\begin{cases} 2ab=c \\ 2bc=a \\ 2ac=b \end{cases}$	2p
	cu soluțiile $(a,b,c)\in\left\{(0,0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$, de unde avem $(x,y,z)\in\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),(0,0,0),(-1,-1,0),(0,-1,-1),(-1,0,-1)\right\}$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.a)	$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}, f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	3p
	$f'(x)\geq 0, x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ crescătoare $f'(x)\leq 0, x\in[-1,1)\Rightarrow f$ descrescătoare, $f'(x)\leq 0, x\in(1,3]\Rightarrow f$ descrescătoare, $f'(x)\geq 0, x\in[3,\infty)\Rightarrow f$ crescătoare, deci $x=-1, x=3$ sunt puncte de extrem	2p
b)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a=2$,	2p

	$n=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx+2x+2}{x-1}=b+2=3\Rightarrow b=1$	**3p**
c)	Pantele celor două drepte trebuie să fie egale deci $f'(2)=3$	**2p**
	$f'(x)=\dfrac{ax^2-2ax-b-2}{(x-1)^2}$. Din $f'(2)=3$ avem $-b-2=-3\Rightarrow b=1$	**3p**
2.a)	$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+arctgx+\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{3x}{1+x^2}+arctgx=g(x)$. f este derivabilă pe $\mathbb{R}\Rightarrow$ f este o primitivă a funcției g	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx=\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right\|_0^1=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\ln 2+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\ln 2+\dfrac{\pi}{4}+6\right)$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=\left.\left(x\ln(1+x^2)-2x+2arctgx\right)\right\|_0^1=\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$ $\int_0^1 xarctgxdx=\left.\left[\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{1}{2}(x-arctgx)\right]\right\|_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$, $\int_0^1 3dx=3$ $\int_0^1 f(x)dx=\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}+3=\ln 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\pi}{4}$	**3p** **2p**