

Examenul de bacalaureat național 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Model ianuarie 2024

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Să se arate că numărul $N = (-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - (20 - 12\sqrt{6})$ este număr natural.
- 5p 2. Să se determine numerele reale m , pentru care $A(m; 2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 2$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^{\sqrt{x-1}} = 125$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, aceasta să verifice inegalitatea $3^n > (n + 1)!$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy , se consideră punctele $A(2; -2)$ și $B(4; 0)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de B .
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului MNP , știind că $MN = 5\sqrt{2}$, $NP = 3$ și $\sphericalangle MNP = 45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consider matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 5p a) Să se calculeze $\det A$;
- 5p b) Să se demonstreze că $A = 2I_2 - A^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- 5p c) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X + A) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „*” definită prin $x * y = 2(xy + 3x + 3y + 7) + 1$
- 5p a) Calculați $(-3) * 2 * 5$;
- 5p b) Să se arate că $x * y = 2(x + 3)(y + 3) - 3$;
- 5p c) Să se determine numerele reale x , pentru care $x * x * x = 29$

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 1 Se consider funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
- 5p a) Să se calculeze $f^{-1}(x)$
- 5p b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 3$;
- 5p c) Să se arate că funcția este crescătoare, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^3 - 6x^2 - 8$.
- 5p a) Să se calculeze $\int (f(x) + 6x^2 - 8) dx$;
- 5p b) Să se verifice dacă funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + 6x^2 - 2$ este o primitivă a funcției f ;
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, astfel încât $\int_1^{a^2} (f(x) - x^3)e^x dx = 36e^{a^2}$.

Examenul de bacalaureat național 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model ianuarie 2024

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = 18 - 12\sqrt{6} + 12 - 20 + 12\sqrt{6}$ $N = 30 - 20 = 10 \in \mathbb{N}$	3p 2p
2.	$A \in (m, 2) \in G_f \Rightarrow f(m) = 2 \Rightarrow m^2 - 3m - 2 = 2 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$ $m = \{-1, 4\}$	3p 2p
3.	$5^{\sqrt{x-1}} = 5^3 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 9$ $x = 10, \text{ care convine}$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile Inegalitatea $3^n > (n + 1)!$ se verifică pentru $n = \{1, 2, 3\}$, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $P = \frac{3}{4}$	2p 3p
5.	Punctul C este simetricul punctului A față de punctul B, deci punctul B este mijlocul segmentului AC $X_B = \frac{X_A + X_C}{2} \Rightarrow xc = 6$ și $y_B = \frac{Y_A + Y_C}{2} \Rightarrow yc = 2$, deci $C(6, 2)$.	3p 2p
6.	$A_{\Delta MNP} = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin(\sphericalangle MNP)}{2}$ $A_{\Delta MNP} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 =$ $= -2 - 0 = -2$	2p 3p
b)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $2I_2 - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$	3p 2p
c)	$X + A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\det(X + A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \{-2, 2\}$ $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	2p 3p

2. a)	$(-3) * 2 = 2((-3) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 7) + 1 = -3$	3p
	$(-3) * 5 = 2((-3) \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 + 7) + 1 = -3$	2p
	$(-3) * 2 * 5 = -3$	
b)	$x * y = 2(xy + 3x + 3y + 7) + 1$	2p
	$= 2(xy + 3x + 3y + 9 - 2) + 1 =$	
	$= 2(y(x + 3) + 3(x + 3) - 2) + 1$	3p
	$= 2((x + 3)(y + 3) - 2) + 1$	
	$= 2(x + 3)(y + 3) - 4 + 1$ $= 2(x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice număr real x	
c)	$x * x = 2(x + 3)^2 - 3$	2p
	$x * x * x = 2(2(x + 3)^2 - 3 + 3)(x + 3) - 3 = 2^2(x + 3)^3 - 3$	
	$2^2(x + 3)^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4(x + 3)^3 = 32 \Rightarrow (x + 3)^3 = 8 \Rightarrow (x + 3)^3 = 2^3$	3p
	$x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$	

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{1(x + 2) - 1(x - 1)}{(x + 2)^2} =$	3p
	$= \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1);$	2p
	$f'(-1) = \frac{3}{(-1 + 2)^2} = \frac{3}{1} = 3$	3p
c)	$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2)$	2p
	f crescătoare pentru orice $x \in (-\infty, -2)$	3p
2. a)	$\int (f(x) + 6x^2 + 8)dx = \int ((x + 2)^3 + 6x^2 + 8 - 6x^2 - 8)dx = \int (x + 2)^3 dx =$	3p
	$= \frac{(x+2)^4}{4} + C$	2p
b)	F este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x)$	2p
	$f(x) = (x + 2)^3 - 6x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 8 = x^3 + 12x$ $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 6x^2 - 2\right)' = 4 \frac{x^3}{4} + 12x = x^3 + 12x = f(x)$	3p
c)	$\int_1^{a^2} (f(x) - x^3)e^x dx = \int_1^{a^2} (x^3 + 12x - x^3)e^x dx = \int_1^{a^2} (12x)e^x dx =$	3p
	$= 12(xe^x - e^x)/1^{a^2} = 12(a^2 e^{a^2} - e^{a^2}) - 12(e - e) = 12e^{a^2}(a^2 - 1)$	
	$12e^{a^2}(a^2 - 1) = 36e^{a^2} \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \{-2, 2\}, a > 1 \Rightarrow a = 2$	2p

Probă scrisă la matematică *M_tehnologic*

Model ianuarie 2024

Barem de evaluare și notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale