Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z=z^2+2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(3x^2-12\right)=2\log_2(x+2)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4 sau cu 5.

5p **5.** Se consideră punctul D în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Arătați că patrulaterul $ADBC$ este paralelogram.

5p **6.** Determinați $x\in(0,2\pi)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1-m & 2m & 0\\ -m & 1+2m & 0\\ 0 & 0 & 1+m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+mn)$, pentru orice numere reale m și n.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere reale pentru care $A(m)\cdot A(n)\cdot A(p)=A(0)$, atunci $(1+m)(1+n)(1+p)=1$.

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_3\left(3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_3\left(\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)+3\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}$.

5p **c)** Demonstrați că $2\sqrt{e^{2x}+3}-e^{x}-3\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^{2}+1}$.

5p **a)** Calculați $\int\dfrac{f(x)}{\ln(x+2)}dx,\ x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int f(x)\left(x^{2}+1\right)dx,\ x\in(-2,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $F\left(-\dfrac{1}{2023}\right)<F\left(-\dfrac{1}{2024}\right)$, unde $F:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+2=(1+i)^2+2=$ $=1+2i+i^2+2=2+2i=2(1+i)=2z$	**2p** **3p**
2.	$\Delta=4m+20$ $f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obținem $m\in(-\infty,-5)$	**2p** **3p**
3.	$3x^2-12=(x+2)^2 \Rightarrow x^2-2x-8=0$ $x=-2$, care nu convine $x=4$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de doua cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În aceasta mulțime există 22 de numere divizibile cu 4, 18 de numere divizibile cu 5 şi 4 numere divizibile atât cu 4 cât şi cu 5, deci sunt 22+18-4=36 de cazuri favorabile $P=\dfrac{nr.\text{ cazuri favorabile}}{nr.\text{ cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, deci $ADBC$ este paralelogram.	**3p** **2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \Leftrightarrow \cos x-\sin x=\sin x-\cos x$ $\Leftrightarrow \cos x=\sin x$ şi, cum $x\in(0,2\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$ sau $x=\dfrac{5\pi}{4}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-0-(-4)=4$	**2p** **3p**

b)	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1-m-n-mn & 2n+2mn+2m & 0\\ -m-n-mn & 1+2m+2n+2mn & 0\\ 0 & 0 & 1+m+n+mn\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1-(m+n+mn) & 2(m+n+mn) & 0\\ -(m+n+mn) & 1+2(m+n+mn) & 0\\ 0 & 0 & 1+(m+n+mn)\end{pmatrix}=A(m+n+mn)$, pentru orice numere reale m și n.	**3p** **2p**
c)	$A(m)\cdot A(n)\cdot A(p)=A(m+n+mn)\cdot A(p)=A(m+n+p+mn+mp+np+mnp)$, obținem $m+n+p+mn+mp+np+mnp=0$ $1+m+n+p+mn+mp+np+mnp=1\Rightarrow(1+m)+n(1+m)+p(1+m)+np(1+m)=1$, de unde obținem $(1+m)(1+n+p+np)=1$, deci $(1+m)(1+n)(1+p)=1$	**3p** **2p**
2. a)	$x*y=\log_3\left(3^x\left(3^y-3\right)-3^{y+1}+9+3\right)=$ $=\log_3\left(3^x\left(3^y-3\right)-3\left(3^y-3\right)+3\right)=\log_3\left(\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)+3\right)$, pentru orice $x,y\in M$	**3p** **2p**
b)	$x*e=x$ pentru orice $x\in M$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție, deci $\left(3^x-3\right)\left(3^e-4\right)=0$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem $e=\log_3 4\in M$ Cum $(\log_3 4)*x=x$ pentru orice $x\in M$, obținem că $e=\log_3 4$ este elementul neutru al legii de compoziție ,,*”.	**3p** **2p**
c)	$x*x*x=\log_3\left(\left(3^x-3\right)^3+3\right)=x\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)^3+3=3^x\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)^3=3^x-3$ Deci $3^x-3=0$ sau $\left(3^x-3\right)^2=1$, de unde $x=1$ sau $x=\log_3 4$, care convin.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-(x+3)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=$ $=\dfrac{x^2+3-x^2-3x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{3(1-x)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}},x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x+3)^2}{x^2+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{6x+6}{x^2+3}\right)^x=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6x+6}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6x+6}}\right)^{\frac{6x^2+6x}{x^2+3}}=e^6$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1)=2$, obținem că $f(x)\leq 2$ pentru orice număr real x $f\left(e^x\right)\leq 2\Rightarrow\dfrac{e^x+3}{\sqrt{e^{2x}+3}}\leq 2\Rightarrow 2\sqrt{e^{2x}+3}\geq e^x+3\Rightarrow 2\sqrt{e^{2x}+3}-e^x-3\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**

2. a)	$\int \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx = \int \frac{\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}}{\ln(x+2)}dx =$	**3p**
	$= \int \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx + C, C \in \mathbb{R}, x \in (-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\int f(x)(x^2+1)dx = \int \frac{\ln(x+2)}{x^2+1}(x^2+1)dx = \int \ln(x+2)dx =$	**2p**
	$= x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) = (x+2)\ln(x+2) - x + C$	**3p**
c)	F este o primitivă a lui f, deci $F'(x) = f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$, de unde obținem că $F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$	**3p**
	Cum $-1 < -\frac{1}{2023} < -\frac{1}{2024}$, obținem că $F\left(-\frac{1}{2023}\right) < F\left(-\frac{1}{2024}\right)$.	**2p**