Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\overline{z} = 9 + 4i$, $\overline{z}$ este conjugatul lui z. Arătați că modulul numărului z este egal cu 5.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=mx+1$. Determinați numărul real m pentru care $(g\circ f)(2)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}+2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x}=99$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(y)=M(x+y-3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi impare x și y, astfel încât $M(x)\cdot M(y)=M(2024)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1=1$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=e^3$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(e)<\frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției f.

5p	**b)** Calculați $\int \frac{1}{f(x)}dx$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați primitiva $H:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x)$, știind că $H(1) = 1$.

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z = x + yi$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow 3x - yi = 9 + 4i$ $\Rightarrow z = 3 - 4i$ $\lvert z \rvert = 5$	**3p** **2p**
2.	$f(2) = 3$ $g(f(2)) = 4 \Rightarrow g(3) = 4 \Rightarrow 3m + 1 = 4 \Rightarrow m = 1$	**2p** **3p**
3.	$3^x(9 + 6 - 4) = 99$ $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$	**3p** **2p**
4.	$\overline{abc} \in \{100, 101, ..., 999\} \Rightarrow$ Numărul cazurilor posibile este 900 $a = c \in \{1, 2, ..., 9\} \Rightarrow$ 9 valori, iar b poate avea 10 valori. Numărul cazurilor favorabile este $9 \cdot 10 = 90$ $\Rightarrow P = \frac{1}{10}$	**2p** **3p**
5.	M, mijlocul segmentului AB, are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \Rightarrow M(2,2)$ $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{3}$. Fie d mediatoarea segmentului $AB \Rightarrow M \in d, m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = 3,$ $\Rightarrow d: y - 2 = 3(x - 2) \Rightarrow d: 3x - y - 4 = 0$	**2p** **3p**
6.	$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right) =$ $= \cos\frac{\pi}{2} = 0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(M(1)) = -3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = -2$	**2p** **3p**
b)	$M(x) \cdot M(y) = I_2 + (x + y)A + xyA \cdot A$ $A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = -3A$ $\Rightarrow M(x) \cdot M(y) = M(x + y - 3xy)$	**2p** **3p**

c)	$M(x+y-3xy)=M(2024)\Rightarrow x+y-3xy=2024$ Dacă $x=2k+1$ şi $y=2p+1$ unde $k,p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $2k+1+2p+1-3(2k+1)(2p+1)=2024\ \Rightarrow -4(k+p+3kp)=2025$ contradicție	2p 3p
2.a)	$2\circ 1=2^{\ln\sqrt[3]{1}}=2^{\ln 1}=$ $=2^0=1$	3p 2p
b)	$x\circ E=x^{\ln\sqrt[3]{E}}=x^{\frac{1}{3}\ln E}=E^{\ln\sqrt[3]{x}}=E^{\frac{1}{3}\ln x}=E\circ x$, pentru orice $x\in(0,\infty)$ $x\circ E=x\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\ln E-1\right)\ln x=0\Rightarrow\ln E=3$, pentru orice $x\in(0,\infty)$, deci $E=e^3\in(0,+\infty)$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	2p 3p
c)	$x\circ x=e^3\Rightarrow x^{\ln\sqrt[3]{x}}=e^3\Rightarrow\frac{1}{3}\ln^2 x=3\Rightarrow$ $\Rightarrow\ln x=3\Rightarrow x_1=e^3,\ \ \Rightarrow\ln x=-3\Rightarrow x_2=\frac{1}{e^3}$ care convin.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=$ $\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, oricare ar fi $x\in(1,\infty)$	2p 3p
b)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0\ \Rightarrow y=x$ este ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .	2p 3p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ f este descrescătoare pe $(1,2]$ și f crescătoare pe $[2,\infty)$ $2<e<3$ și f crescătoare pe $[2,\infty)\Rightarrow f(e)<f(3)\Rightarrow f(e)<\frac{7}{2}$	3p 2p
2.a)	F derivabilă, $F'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2}=$ $=\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}=f(x)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	2p 3p
b)	$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)'dx=$ $=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$	2p 3p

c)	$\int f^2(x)dx = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x} - arctgx$	**3p**
	$H(x) = -\frac{1}{x} - arctgx + k$, $H(1) = 1 \Rightarrow k = 2 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow H(x) = -\frac{1}{x} - arctgx + 2 + \frac{\pi}{4}$	**2p**