Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timp de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-3$, $g(x)=2-3x$. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ g)(x)=a+(g\circ f)(x)$, oricare ar fi numărul real x.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(x+1)=1+\log_2(x+5)$.

5p **3.** Știind că numerele reale nenule m, n, p sunt în progresie geometrică, în această ordine, să se arate că ecuația $mx^2-nx+p=0$ nu are rădăcini reale.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2)$, $N(2,5)$ și $P(3,a)$, $a\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=5$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 50^\circ\cdot\sin 130^\circ=\cos^2 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & m & 2\\ 1 & 2m-1 & 3\\ 1 & m & m-3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+my+2z=1\\ x+(2m-1)y+3z=1\\ x+my+(m-3)z=2m-1\end{cases}$, $m\in\mathbf{R}$

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$ determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) cu componente numere întregi, cu proprietatea $2x_0^2+3y_0^2+4z_0^2=2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy-5x-5y+10$.

5p **a)** Arătați că $x*y=3\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=10$.

5p **c)** Determinați $n\in\mathbf{N}$, știind că $\left(3^n+\frac{5}{3}\right)*\left(3^{n+1}+\frac{5}{3}\right)*\left(3^{n+2}+\frac{5}{3}\right)=3^{50}+\frac{5}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2x-2}{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $x-y=0$.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$.

	2. Se consideră funcțiile $f:(-2,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x+2)^2\cdot\ln(x+2)$ și $F:(-2,\infty)\to\mathbf{R}$, $F(x)=\dfrac{(x+2)^3}{3}\cdot\ln(x+2)-\dfrac{(x+2)^3}{9}+\dfrac{1}{9}$.
5p	**a)** Arătați că F este o primitivă a funcției f.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{F(x)}{(x+1)^2}$.
5p	**c)** Aflați primitiva funcției f, al cărei grafic conține punctul $A(-1,1)$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2-3x)=2-3x-3=-1-3x$. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=2-3(x-3)=11-3x$ $-1-3x=a+11-3x\Rightarrow a=-12\in\mathbf{R}$	**2p** **2p** **1p**
5p	**2.** $\log_2(x+1)^2=\log_2 2(x+5)\Rightarrow(x+1)^2=2(x+5)\Rightarrow x^2-9=0$ $\Rightarrow x=3$ care convine; $x=-3$ care nu convine	**3p** **2p**
5p	**3.** $n^2=mp$ $\Delta=n^2-4mp=-3n^2$ $-3n^2<0,\forall n\in\mathbf{R}^*\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ ecuația nu are rădăcini reale	**1p** **2p** **2p**
5p	**4.** Sunt $C_5^3=10$ submulțimi cu câte 3 elemente și numai una singură cu toate trei impare: $\{1,3,5\}$. Deci, avem $10-1=9$ submulțimi cu proprietatea cerută	**3p** **2p**
5p	**5.** $\overrightarrow{MN}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{MP}=2\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=3a-4$ $3a-4=5\Rightarrow a=3\in\mathbf{R}$	**2p** **2p** **1p**
5p	**6.** $\sin 50^\circ\cdot\sin 130^\circ=\sin 50^\circ\cdot\sin(180^\circ-130^\circ)=\sin^2 50^\circ$ $\sin^2 50^\circ=\cos^2(90^\circ-50^\circ)=\cos^2 40^\circ=\cos^2 140^\circ$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(2)=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&3\\1&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3&3\\1&2&-1\end{vmatrix}$ $\det(A(2))=-3+6+4-6-6+2=-3$	**2p** **3p**
5p	**b)** $\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&m&2\\1&2m-1&3\\1&m&m-3\end{vmatrix}\overset{L_3-L_1}{=}\begin{vmatrix}1&m&2\\1&2m-1&3\\0&0&m-5\end{vmatrix}=(m-5)(2m-1-m)$ $\det(A(m))=(m-5)(m-1)$ Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbf{R}\setminus\{1,5\}$	**3p** **2p**
5p	**c)** Matricea sistemului pentru $m=1$ este $A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\1&1&-2\end{pmatrix}$, $\det(A(1))=0\Rightarrow\operatorname{rang}A(1)<3$ $d_2=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow\operatorname{rang}A(1)=2$, $d_{car}=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat .	**1p**

	Necunoscutele y și z sunt necunoscute principale, x este necunoscută secundară. $x=\alpha\in\mathbf{R}\Rightarrow y=1-\alpha,\ z=0$ (din primele două ecuații)	2p
	$2x_0^2+3y_0^2+4z_0^2=2$ devine $5\alpha^2-6\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=1$, care convine; $\alpha=\frac{1}{5}$, care nu convine $\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$	2p
5p	**2. a)** $x*y=3xy-5x-5y+\frac{25}{3}+\frac{5}{3}=3\left(xy-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y+\frac{25}{9}\right)+\frac{5}{3}=$	3p
	$=3\left(x\left(y-\frac{5}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(y-\frac{5}{3}\right)\right)+\frac{5}{3}=3\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	2p
5p	**b)** $3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{3}=10\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$	2p
	$x-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ sau $x-\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}$, deci $x=\frac{10}{3}\in\mathbf{R}$ sau $x=0\in\mathbf{R}$	3p
5p	**c)** legea "*" este asociativă $9\left(3^n+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(3^{n+1}+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(3^{n+2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}=3^{50}+\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3^{2+n+n+1+n+2}=3^{50}$	3p
	$3n+5=50\Rightarrow n=15\in\mathbf{N}$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x)=\left(\frac{2x-2}{x}\right)'-(\ln x)'=\frac{(2x-2)'x-(2x-2)(x)'}{x^2}-\frac{1}{x}$	2p
	$f'(x)=\frac{2-x}{x^2}=-\frac{x-2}{x^2},\ \forall x\in(0,\infty)$	3p
5p	**b)** Tangenta d la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta d_1 de ecuație $x-y=0\Leftrightarrow m_d=m_{d_1}$	1p
	$f'(a)=1\Leftrightarrow\frac{2-a}{a^2}=1\Leftrightarrow a\in\{-2,1\}$	2p
	$a=-2\notin(0,+\infty)$, nu convine $a=1\Rightarrow d:x-y-1=0, d_1\neq d$, care convine	2p
5p	**c)** $f'(x)>0,\forall x\in(0,2)\Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $(0,2)$	2p
	$0<\frac{\pi}{4}<1<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f(1)$. Cum $f(1)=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0.$	3p
5p	**2.a)** F derivabilă pe $(-2,\infty)$ **(1)**	1p
	$F'(x)=\frac{3(x+2)^2}{3}\cdot(x+2)'\cdot\ln(x+2)+\frac{(x+2)^3}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot(x+2)'-\frac{3(x+2)^2}{9}\cdot(x+2)'+0=$ $=(x+2)^2\cdot\ln(x+2)+\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+2)^2}{3}=(x+2)^2\cdot\ln(x+2)=f(x),\ \forall x\in(-2,\infty)$ **(2)**	3p
	Din (1) și (2) $\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	1p
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{F(x)}{(x+1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to-1}\frac{F'(x)}{2(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+2)^2\cdot\ln(x+2)}{2(x+1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{l'H}{=}}$	3p
	$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(x+2)\cdot\ln(x+2)+x+2}{2}=\frac{1}{2}$	2p
5p	**c)** din $a)\Rightarrow G(x)=F(x)+k, k\in\mathbf{R}$ este o primitivă oarecare a lui f	2p
	$A(-1;1)$ aparține graficului funcției $G\Leftrightarrow G(-1)=1$ și $G(-1)=0+k=k\Rightarrow k=1$	2p
	Deci, $G(x)=F(x)+1,\ x\in(-2,\infty)$	1p