Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timp de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $\sqrt{2\sqrt{5}-2}$ și $\sqrt{2\sqrt{5}+2}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^2+2(m-1)x+1$. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_2(\frac{3}{4}-x)+3=1$.

5p **4.** Determinați $x\in N,\ x\geq 3$ cu proprietatea $A_x^3=2\cdot x$.

5p **5.** Demonstrați că vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-a\vec{j}$ sunt perpendiculari, oricare ar fi numărul real a.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:M_2(R)\to M_2(R),\ f(X)=X^2-4X+2I_2$ și matricea $A(a)=\begin{pmatrix}4-a & 1\\ 4-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=5$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale numărului a pentru care $\det(f(A(a))+4A(a)-2I_2)=4$.

5p **c)** Demonstrați că oricare ar fi numărul real a, există o matrice $B\in M_2(R)$ astfel încât $f(I_2)=(I_2-A(a))\cdot B$.

2. Pe mulţimea R se consideră legea de compoziţie asociativă $x*y=4\left(xy+\frac{3}{8}\right)-2(x+y)$.

5p **a)** Arătați că numărul $a=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\right)$ este natural.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg a pentru care $\left|\frac{1}{2024}*\frac{1}{202}*\frac{1}{20}*\frac{1}{2}-2a\right|=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to R,\ f(x)=x\ln x-x+1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e}f(x)=1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\ln x,\ \forall x\in(0;\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to R,\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2}{x}, & x\in(0;1)\\ 2\ln x-1, & x\in[1;+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Calculați $\int\frac{x^2-2}{x}dx,\ x\in(0;1)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive.

5p **c)** Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $(0;+\infty)$.

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** Media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{xy}=\sqrt{\sqrt{2\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+2}}$ $=\sqrt{\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+2\right)}}=\sqrt{\sqrt{16}}=2$, care este număr natural.	**2p** **3p**
5p	**2.** Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta>0$, deci $4(m-1)^2-4>0$ $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$	**2p** **3p**
5p	**3.** $\log_2(\frac{3}{4}-x)+3=1 \Leftrightarrow \log_2(\frac{3}{4}-x)=-2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}-x=\frac{1}{4}$ $x=\frac{1}{2}$, care convine	**3p** **2p**
5p	**4.** $A_x^3=2\cdot x \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)=2x$. Cum $x\in N,\ x\geq 3$ ecuația devine $(x-1)(x-2)=2$ Deci $x^2-3x+2=2$ cu soluțiile $x=0$, care nu convine și $x=3$, care convine.	**3p** **2p**
5p	**5.** $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow a(a+1)+(a+1)\cdot(-a)=0$ $\Leftrightarrow a^2+a-a^2-a=0 \Leftrightarrow 0=0$, ceea ce este adevărat.	**3p** **2p**
5p	**6.** $E(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(-1)=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \det A(-1)=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=$ $=10-5=5.$	**3p** **2p**
5p	**b)** $f(A(a))+4A(a)-2I_2=(A(a))^2 \Rightarrow \det(f(A(a))+4A(a)-2I_2)=\det\left[(A(a))^2\right]$ $\det\left[(A(a))^2\right]=\left[\det(A(a))\right]^2$ și $\det(A(a))=4-a$, deci $(4-a)^2=4$. Obținem $a=2$ sau $a=6$.	**2p** **3p**
5p	**c)** $f(I_2)=-I_2 \Rightarrow$ egalitatea devine $-I_2=\left(I_2-A(a)\right)\cdot B \Leftrightarrow I_2=\left(A(a)-I_2\right)\cdot B$ Avem $\det\left(A(a)-I_2\right)=\begin{vmatrix}3-a & 1\\ 4-a & 1\end{vmatrix}=3-a-4+a=-1\neq 0$, deci matricea $A(a)-I_2$ este inversabilă $\forall a\in R$; deci oricare ar fi numărul real a, există matricea $B=\left(A(a)-I_2\right)^{-1}$ care verifică relația dată.	**2p** **3p**
5p	**2. a)** $a=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ $==\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)-2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, care este număr natural.	**2p** **3p**
5p	**b)** $x*y=4xy+\frac{3}{2}-2x-2y=4xy-2x-2y+1+\frac{1}{2}$ $=2x(2y-1)-(2y-1)+\frac{1}{2}=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$ pentru $\forall x,y\in R$.	**2p** **3p**

5p	**c)** $x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=\frac{1}{2}$ pentru orice număr real x	**2p**
	Obținem $\frac{1}{2024}*\frac{1}{202}*\frac{1}{20}*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, deci ecuația devine $\left\|\frac{1}{2}-2a\right\|=\frac{3}{2}$ cu soluțiile $a=1$, care convine și $a=-\frac{1}{2}$, care nu convine.	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $\lim\limits_{x\to e}f(x)=e\ln e-e+1$	**3p**
	$=e-e+1=1.$	**2p**
5p	**b)** $f'(x)=(x\ln x-x+1)'=x'\ln x+x\cdot(\ln x)'-x'+1=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1$	**3p**
	$=\ln x+1-1=\ln x,\ \forall x\in(0;\infty).$	**2p**
5p	**c)** $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$	**3p**
	Cum $f'(x)<0,$ pentru orice $x\in(0;1)$ și $f'(x)>0,$ pentru orice $x\in(1;+\infty)$, rezultă $f(x)\geq f(1),$ pentru $\forall x\in(0;\infty)$. Deci $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;\infty)$.	**2p**
5p	**2. a)** $\int\frac{x^2-2}{x}dx=\int\frac{x^2}{x}dx-2\int\frac{1}{x}dx=\int xdx-2\int\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\frac{x^2}{2}-2\ln x+C,\ \forall x\in(0;1).$	**2p**
5p	**b)** f continuă pe $\forall x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$ ca operație cu funcții elementare, deci continue	**3p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=f(1)=-1$. Deci f este continuă pe $(0,\infty)$, deci f admite primitive.	**2p**
5p	**c)** O primitivă a funcției f are forma $F(x)=\frac{x^2}{2}-2\ln x+c_1,\ x\in(0;1)$ și $F(x)=x(2\ln x-3)+c_2,\ x\in[1;\infty)$. Cum f este, în mod necesar, continuă în 1, obținem că $\frac{1}{2}+c_1=-3+c_2$, deci $c_2=c_1+\frac{7}{2}$.	**3p**
	Se verifică ușor că F este derivabilă pe $(0;\infty)$ și că $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(0;\infty)$.	**2p**