

## Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023

## Proba E.c)

Matematică *M\_tehnologic*

## Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timp de lucru efectiv este de trei ore.

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Arătați că  $(\sqrt{12} + 1)(2\sqrt{3} - 1) + \sqrt{196} = 25$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $m$  știind că  $f(m) = -1$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5 - \sqrt{x+3} = 2$ .
- 5p 4. Un obiect costă 475 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 20%.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3;1), B(0;1), C(0;5)$ . Determinați perimetrul triunghiului determinat de cele trei puncte.
- 5p 6. Arătați că  $\sin^2 105^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$ .

## SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele  $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 4 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A(1) = 9$ .
- 5p b) Arătați că  $A(1) + A(-3) = 2 \cdot A(-1)$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A(a) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot I_2$ .
- 5p 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 5x - 3y + 20$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 4 = 7$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x = x$ .
- c) Determinați numerele  $n$  naturale nenule pentru care numărul  $N = n * \frac{1}{n}$  este întreg.

## SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
- 5p b) Arătați că  $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$  pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
2. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x - 4$  și  $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ .
- 5p a) Verificați dacă funcția  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Determinați mulțimea primitivelor funcției  $f + g$ .
- 5p c) Determinați primitive  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a funcției  $g$  pentru care  $G(1) = 3$ .

**Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2023**

**Proba E.c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**Barem de evaluare și de notare**

**Varianta 2**

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 puncte)**

<b>5p</b>	1. $(\sqrt{12} + 1)(2\sqrt{3} - 1) + \sqrt{196} = (2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1) + 14 =$ $= (2\sqrt{3})^2 - 1 + 14 = 12 - 1 + 14 = 25$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	2. $3m + 5 = -1 \Rightarrow 3m = -6$ $m = -2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	3. $5 - \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow x+3 = 9$ , plus condiția de existență $x = 6$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	4. $20\% \cdot 475 \text{ lei} = \frac{20}{100} \cdot 475 \text{ lei} = \frac{1}{5} \cdot 475 \text{ lei} = 95 \text{ lei}$ (reducerea) Prețul după ieftinire este $475 \text{ lei} - 95 \text{ lei} = 380 \text{ lei}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	5. $AB = 3, BC = 4, AC = 5$ $P_{AOB} = 3 + 4 + 5 = 12$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	6. $\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 105^\circ) = \sin 75^\circ$ $\sin^2 105^\circ + \cos^2 75^\circ = \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 puncte)**

<b>5p</b>	1.a) $A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $= 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) = 8 + 1 = 9$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	b) $A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A(-3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) + A(-3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot A(-1)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	c) $A(a) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4a+8 & a+8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4a+8 & a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4a+8=0 \text{ și } a+8=6 \Rightarrow a=-2$ , care convine.	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	2. a) $1 * 4 = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 20 = 4 - 5 - 12 + 20$ $= -1 - 12 + 20 = -13 + 20 = 7$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	b) $x * x = x \cdot x - 5x - 3x + 20 = x^2 - 8x + 20$ , unde $x$ este un număr real $x^2 - 8x + 20 = x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$ , deci $x = 4$ sau $x = 5$ .	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	c) $N = 21 - 5n - \frac{3}{n}$ pentru orice număr $n$ natural, nenul $N \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 1 \text{ sau } n = 3$ .	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 puncte)**

<b>5p</b>	1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 + 1} =$ $= \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{4 + 1} = \frac{2}{5}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
-----------	---	------------------------

<b>5p</b>	<p><b>b)</b> <math>f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}</math></p> <p><math>\Rightarrow f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}</math> pentru orice <math>x</math> număr real.</p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>5p</b>	<p><b>c)</b> <math>f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1</math> și <math>x_2 = 1</math></p> <p><math>f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe interval</p> <p><math>f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1] \Rightarrow f</math> este crescătoare pe interval</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>5p</b>	<p><b>2. a)</b> Funcția <math>g</math> este derivabilă pe <math>\mathbb{R}</math> și <math>g'(x) = (3x^2 - 4x + 1)' = 6x - 4</math></p> <p><math>= f'(x)</math>, pentru orice număr real <math>x</math>, deci funcție <math>g</math> este o primitivă a funcției <math>f</math>.</p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>5p</b>	<p><b>b)</b> <math>\int (f + g)(x) dx = \int (3x^2 + 2x - 3) dx =</math></p> <p><math>= x^3 + x^2 - 3x + c</math>, unde <math>c \in \mathbb{R}</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>5p</b>	<p><b>c)</b> <math>\int g(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + c</math>, deci <math>G(x) = x^3 - 2x^2 + x + c</math>, unde <math>c \in \mathbb{R}</math></p> <p>Cum <math>G(1) = 3 \Rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = 3</math> obținem <math>G(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>