

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
24 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu rația diferită de zero și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pentru orice număr natural nenul n .
- 7p a) Arătați că $2S_{25} = 25(a_5 + a_{21})$.
- 8p b) Determinați numerele a_1 , a_3 și a_{10} , știind că acestea sunt în progresie geometrică în această ordine și că suma lor este egală cu 134.
2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul M aparținând laturii AB astfel încât $\triangle AMC \equiv \triangle DMB$.
- 7p a) Arătați că punctul M este mijlocul laturii AB .
- 8p b) Demonstrați că $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$, unde $AC \cap DB = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{N\}$.
3. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$, unde a și b sunt numere reale, $a - b \neq -2$.
- 7p a) Determinați numărul real b , știind că $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = 1$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 8p b) Știind că rădăcinile x_1 , x_2 și x_3 ale polinomului f sunt numere reale mai mari sau egale cu zero, demonstrați că $a + b \leq \frac{8}{27}$.
4. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$.
- 7p a) Arătați că $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
- 8p b) Se consideră numărul real $a \in (0, 1)$. Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul
- $$I_n = \int_a^1 \frac{f(x^{2n})}{x^n} dx.$$
- Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime - Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor de numere reale - Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor făcând legătura între tipurile de intervale și submulțimile drepte - Identificarea apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei

<p>2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reprezentarea pe axa numerelor a intersecției a două intervale - Reprezentarea pe axa numerelor a reuniunii a două intervale cu intersecția nevidă - Verificarea faptului că un număr este soluția unei inecuații - Verificarea apartenenței unui obiect la o mulțime pe baza unei/unor proprietăți a/ale elementelor acesteia
<p>3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în \mathbb{R}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Aproximarea numerelor reale pentru reprezentarea unor intervale - Reprezentarea unui interval sub forme echivalente (notație, reprezentarea pe axa numerelor) - Transformarea unei inecuații într-o inecuație echivalentă folosind proprietățile relației de ordine
<p>4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizarea terminologiei specifice intervalelor de numere reale în contexte interdisciplinare - Rezolvarea unei inecuații de forma $ax + b < c$, (\leq), unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ - Selectarea, dintr-o mulțime dată, a elementelor care verifică o condiție suplimentară
<p>5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații</p> <ul style="list-style-type: none"> - Rezolvarea unor inecuații de forma $ax + b < 0$, $(>, \leq, \geq)$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ - Descrierea mulțimii soluțiilor unei probleme printr-o proprietate care le caracterizează - Rezolvarea de inecuații de forma $\frac{a}{bx + c} < 0$, $(>, \leq, \geq)$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$
<p>6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estimarea erorii unui calcul aproximativ cu numere reale - Utilizarea de estimări pentru a compara/ordona numere reale în diferite contexte - Modelarea unei situații concrete utilizând inecuații studiate - Interpretarea soluțiilor unei inecuații în rezolvarea unor probleme concrete

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	<p>1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor • Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor • Inecuații de forma $ax + b \geq 0$, $(\leq, <, >)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R} ”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați trei itemi: un item de tip completare, un item de tip alegere multiplă și un item de tip întrebare structurată.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
24 iulie 2024

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $2S_{25} = 25(a_1 + a_{25}) =$ $= 25(a_5 - 4r + a_{21} + 4r) = 25(a_5 + a_{21})$, unde r este rația progresiei aritmetice	3p
	b) $a_3 = a_1 + 2r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ și, cum $a_3^2 = a_1 a_{10}$, obținem $(a_1 + 2r)^2 = a_1(a_1 + 9r)$ $4r^2 = 5a_1 r$ și, cum $r \neq 0$, obținem $4r = 5a_1$ Cum $a_1 + a_3 + a_{10} = 134$, obținem $a_1 = 8$, $a_3 = 28$ și $a_{10} = 98$	3p 2p 3p
	2. a) $\triangle AMC \equiv \triangle DMB \Rightarrow AC = DB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$ Triunghiurile AMD și BMC sunt isoscele cu vârful în M , deci $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$, de unde obținem $MA = MB$	4p 3p
b) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow OA = OB$ și, cum M este mijlocul lui AB , obținem $OM \perp AB$; $\triangle ANB$ isoscel, punctul M este mijlocul lui $AB \Rightarrow NM \perp AB$, deci punctele N , O și M sunt coliniare $MA = MC = MB \Rightarrow MC = \frac{AB}{2}$, deci triunghiul ACB este dreptunghic în C $\triangle NCO \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{CN}{MN} = \frac{OC}{BM}$ și, cum $OC = OD$ și $BM = MD$, obținem $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$	3p 2p 3p	
3.	a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a$, $x_1 x_2 x_3 = -b$ $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = \frac{3+2(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3} = \frac{5+a}{2+a-b}$ și, cum $\frac{5+a}{2+a-b} = 1$, obținem $b = -3$	3p 4p
	b) $a+b = f(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ Cum x_1 , x_2 și x_3 sunt numere reale mai mari sau egale cu zero și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, rezultă $1-x_1 \geq 0$, $1-x_2 \geq 0$ și $1-x_3 \geq 0$ $\sqrt[3]{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \leq \frac{(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3)}{3} = \frac{2}{3}$, deci $a+b \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	2p 2p 4p
	4. a) $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1) - x$, $g'(x) = \frac{-x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$; pentru $x \in (-1, 0]$, $g'(x) \geq 0$, deci funcția g este crescătoare pe $(-1, 0]$; pentru $x \in [0, +\infty)$, $g'(x) \leq 0$, deci funcția g este descrescătoare pe $[0, +\infty)$ Cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	4p 3p

<p>b) $0 < a \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{f(x^{2n})}{x^n} \geq 0$, deci $I_n \geq 0$, pentru orice număr natural n</p>	3p
<p>$f(x^{2n}) \leq x^{2n}$, pentru orice $x \in [a, 1]$, deci $I_n \leq \int_a^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _a^1 = \frac{1}{n+1}(1 - a^{n+1}) < \frac{1}{n+1}$,</p> <p>pentru orice număr natural n</p>	3p
<p>Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$</p>	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de tip completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 1p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat 1p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 3p 	
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 1p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat 1p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 3p 	
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor specifice evaluate 1p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat 1p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 3p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 3p 	