Concursul IMAR - Panaitopol
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea din Bucureşti
Bucureşti 16.12.2023

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D, E, F picioarele înălţimilor sale din A, B, respectiv C. Dreptele AB şi DE se intersectează în K, iar dreptele AC şi DF se intersectează în L. Fie M mijlocul laturii BC şi fie N punctul în care dreapta AM intersectează a doua oară cercul ABC. În fine, paralela prin M la EF intersectează dreapta KL în P. Arătaţi că triunghiul MNP este isoscel.

Problema 2. Fixăm un număr întreg $n \geq 6$. Considerăm n drepte coplanare, oricare două neparalele şi oricare trei neconcurente. Aceste drepte descompun planul în regiuni poligonale nemărginite şi poligoane cu interioarele disjuncte două câte două. Două poligoane sunt *nea-diacente*, dacă nu au o latură comună. Arătaţi că există cel puţin $\frac{1}{12}(n-3)(n-2)$ poligoane neadiacente două câte două, care au acelaşi număr de laturi fiecare.

Problema 3. Fie p un număr prim impar. Există o permutare a_1, a_2, …, a_p a numerelor 1, 2, …, p, astfel încât $(i-j)a_k + (j-k)a_i + (k-i)a_j \neq 0$, oricare ar fi i, j, k, distincte două câte două?

Problema 4. Fie n un număr natural şi fie $\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ dezvoltarea polinomului

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{2k}(X-1)^{2(n-k)},$$

Mate.info.ro
profu' de mate

în funcţie de puterile lui X. Toţi coeficienţii a_{2k+1} sunt nuli, deoarece polinomul este invariat de schimbarea $X \mapsto -X$. Arătaţi că toţi coeficienţii a_{2k} sunt strict pozitivi.