5

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 5 – a

SUBIECTE:

1. Există numere naturale x, y astfel încât $x^4 + y^4 = 2023$? Justificați

(7p)

2. a) Demonstrați că produsul a două numere naturale consecutive nenule nu este pătrat perfect

(3p)

b) Fie $x = 9^{2023} + 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2022}) + 1$. Arătați că x nu este pătrat perfect

(4p)

3. Înainte de Crăciun, cei 29 de elevi ai clasei a V-a au adus pentru colegii lor din clasele primare trei tipuri de cadouri: cărți, jucării de pluș și cutii de bomboane. Au adus cărți 19 dintre elevi, jucării de pluș 23 dintre elevi, iar cutii de bomboane 21 dintre ei.
Să se arate că cel puțin 5 elevi au adus toate tipurile de cadouri (și cărți, și jucării de pluș, și cutii de bomboane).

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 2 ore.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

5/V2

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

6

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 6 – a

SUBIECTE:

1. a) Demonstraţi că numărul: $A=\frac{2023}{1012}\cdot(2+4+6+\cdots+2020+2022)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{2021\cdot2023}\right)$ este un pătrat perfect.

(3p)

b) Arătaţi că fracţia $\frac{9\cdot2023^n+20}{4\cdot2023^n+9}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n.

(4p)

2. Considerăm unghiurile în jurul unui punct $\widehat{AOB},\widehat{BOC},\widehat{COD},\widehat{DOE}$, respectiv $\widehat{EOA}$. Măsurile unghiurilor verifică condiţiile $\sphericalangle BOC=\frac{2}{3}\widehat{AOB}=\frac{1}{2}\widehat{COD}=\frac{1}{3}\widehat{DOE}$, iar semidreapta OA este bisectoarea unghiului $\widehat{BOE}$.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor $\widehat{AOB},\widehat{BOC},\widehat{COD},\widehat{DOE}$ şi $\widehat{EOA}$.

(3p)

b) Fie $AM \parallel OE$, M aparţine semidreptei OB, iar $AN \parallel OB$, N aparţine semidreptei OE. Calculaţi măsura $\sphericalangle NAM$.

(4p)

3. Determinaţi numerele naturale prime de forma $\overline{ef}$ şi numerele naturale nenule a,b care verifică egalitatea $\overline{ef}^2=9\cdot a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b]$, unde (x,y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x,y, iar $[x,y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x,y.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 2 ore.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

6/V2

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

7

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 7 – a

SUBIECTE:

1. Demonstrați că

$$(x-y)^{2023}(x-z)^{2023}+(y-x)^{2023}(y-z)^{2023}+(z-x)^{2023}(z-y)^{2023}\geq 0, \forall\, x,\ y,\ z\in\mathbb{R}.$$

(7p)

2. Fie $x, y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1209}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{31}-39\right)\left(\frac{y}{31}-39\right)}\in\mathbb{N}$. **(7p)**

3. Fie M și N mijloacele laturilor AB și respectiv AC ale unui triunghi ABC și punctele P și Q situate pe latura BC astfel încât $BP\equiv PQ\equiv QC$. Paralela prin A la BC intersectează dreptele PM și QN în punctele R, respectiv S. Dacă $T\in PS\cap QR$, $U\in PR\cap QS$, $E\in QR\cap AB$, $F\in PS\cap AC$, demonstrați că:

a) $T\in AU$; **(3p)**

b) T este centrul de greutate al triunghiului ABC; **(2p)**

c) $EF=\frac{2}{3}MN$. **(2p)**

4. În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC și 2AD = BC. Fie $DE\perp AC$, $E\in AC$, F simetricul lui E față de punctul D, G mijlocul segmentului FC și $BF\cap EG=\{H\}$. Demonstrați că punctele A, D, H sunt coliniare. **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

8

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 8 – a

SUBIECTE:

1. a) Fie numerele $a=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ și $b=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\left(7\sqrt{3}-4\right)$

Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b. **(4p)**

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ este natural, oricare ar fi $n\in N$. **(3p)**

2. Aflați numerele naturale nenule a, b, unde $a\le b$, știind că $\left[\sqrt{a^2+6b}\right]=\sqrt{b^2+6a}$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x. **(7p)**

3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $\sphericalangle AVB<45^0$. O furnică pleacă din punctul A și ajunge tot în punctul A, mergând pe toate fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața VAB este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața VBC, determinați măsurile unghiurilor feței VAB.

Supliment Gazeta Matematică-Octombrie 2023(enunț modificat)
(7p)

4. Fie punctele necoplanare A, B, C și D. Considerăm K mijlocul segmentului BD, KM bisectoarea unghiului AKB, $M\in AB$, KP bisectoarea unghiului AKD, $P\in AD$, iar N un punct pe muchia AC, astfel încât $\frac{AC}{AN}-\frac{BD}{2AK}=1$.

a) Arătați că planele (MNP) și (BCD) sunt paralele. **(4p)**

b) Demonstrați că: $AN\cdot NC+AM\cdot MB\ge 2PD\cdot\left(AN+AM-AP\right)$. **(3p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

9

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 9 – a

SUBIECTE:

1. Pe laturile pentagonului ABCDE se iau punctele M∈(AB), N∈(BC), P∈(CD), Q∈(ED) astfel încât

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PD}=\frac{EQ}{QD}=k,\ k>0$$

Notăm cu U și V mijloacele segmentelor (MP), respectiv (NQ). Arătați că UV || AE și determinați k pentru care $AE = 4048UV$. **(7p)**

2. Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\frac{x+3}{2[x]+1}=\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right],$$ **(7p)**

unde [a] reprezinta partea întreagă a numărului real a.

3. Fie a,b,c>0 pentru care a + b + c = 3. Arătați că

$$\frac{a}{a^2+bc+1}+\frac{b}{b^2+ca+1}+\frac{c}{c^2+ab+1}\le 1.$$ **(7p)**

4. Calculați suma: $S_n=\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\ldots+\frac{n^2-2}{n!}+\frac{n+2}{n!}$, unde n ∈ ℕ, n≥ 2 **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

10

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 10 – a

SUBIECTE:

1. Demonstrați că $\log_9 14 < \sqrt{(\log_7 11)\cdot(\log_7 12)}$ fără a utiliza tabelele de logaritmi.

(7p)

2. Dacă f :R→R este o funcție monotonă cu proprietatea $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots . \circ f)}_{de\ 2020\ de\ ori\ f}(x) = x^{2023}$, $(\forall)x \in R$, calculați valoarea expresiei $E = f(-1) + f(0) + f(1)$.

(7p)

3. a) Să se arate că numărul $z = (a - bi)(a + bi)(a^2 + b^2i^2)(a^4 + b^4i^4) \ldots (a^{32} + b^{32}i^{32})$ este număr real, oricare ar fi $a, b \epsilon R$.

(3p)

b) Să se determine $x \epsilon R$ astfel încat $z = x + 2i$ are proprietatea că $|z - 3 - 4i|$ este minim.

(4p)

4. Numerele reale $a, b, c > 1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că :
$\frac{log_b c}{b+c-a} + \frac{log_c a}{a+c-b} + \frac{log_a b}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

11

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023–Câmpulung
Clasa a 11 – a

SUBIECTE:

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 17-9\sqrt{3} & 8-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = a \cdot A + (1-a) \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) \in G$, pentru orice $X(a), X(b) \in G$. **(3 p)**

b) Calculați $X\left(\frac{-2023}{6}\right) \cdot X\left(\frac{-2021}{6}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2021}{6}\right) \cdot X\left(\frac{2023}{6}\right)$. **(2 p)**

c) Calculați $X^n(a), n \in \mathbb{N}^*$. **(2 p)**

2. Să se rezolve în mulțimea $M_3(\mathbb{Z})$ ecuația:

$$X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7 p)

3. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{i \cdot j}$$

(7 p)

4. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n \cdot \sqrt[3]{n} \cdot \left(\sqrt[3]{(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)}$$

(7 p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

12

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 12 – a

SUBIECTE:

1. Fie $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{xe^x}$. Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)$. **(7p)**

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $c\in[a,b]$. Se presupune că f admite primitive pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$. Să se arate că f admite primitive pe $[a,b]$. **(7p)**

3. Fie $(M,\cdot)$ un monoid finit și „e" elementul său neutru. Să se demonstreze că dacă există $a,b\in M$, astfel încât $ab=e$, atunci $ba=e$. **(7p)**

4. Fie $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq2$ și G_1, respectiv G_2 două grupuri ciclice cu m, respectiv n elemente. Să se arate că dacă există un morfism injectiv $f:G_1\to G_2$ astfel încât pentru orice $r\in\{1,2,\dots,m-1\}$, $f_r:G_1\to G_2$, $f_r(x)=(f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci $m|n$ și m este număr prim.
(Se poate folosi faptul că dacă p e număr prim și $p|m$, atunci există $a\in G_1$ cu ord $a=p$.)

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 5 – a

5/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluţie orientativă

Oricare ar fi a un număr natural, $u(a^2)$ poate fi 0,1,4,5,6 sau 9, de unde $u(a^4)$ poate fi 0,1,5 sau 6	2p
$x^4 \leq 2023 \Rightarrow x < 7 (7^4 = 2401; 6^4 = 1296)$	1p
Vom analiza cazurile: $x = 0 \Rightarrow u(y^4) = 3$ contradicţie. $x = 1 \Rightarrow u(y^4) = 2$ contradicţie. $x = 2 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 2^4) = 7$ contradicţie. $x = 3 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 3^4) = 2$ contradicţie. $x = 4 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 4^4) = 7$ contradicţie. $x = 5 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 5^4) = 8$ contradicţie. $x = 6 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 6^4) = 7$ contradicţie.	3p
Aşadar nu există numere x şi y care să verifice egalitatea dată	1p

Problema 2: soluţie orientativă

a) Fie n un număr natural nenul $n \cdot (n+1) > n \cdot n = n^2$	1p
$n \cdot (n+1) < (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2$	1p
Deci $n^2 < n \cdot (n+1) < (n+1)^2$, de unde concluzia că $n \cdot (n+1)$ nu este pătrat perfect	1p
b) Fie $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2021} + 3^{2022} \Rightarrow 3S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Scăzând cele două relaţii, obţinem $2S = 3^{2023} - 1$	1p
$x = 9^{2023} + 2S + 1 = 9^{2023} + 3^{2023}$	1p
$x = (3^{2023})^2 + 3^{2023} = 3^{2023} \cdot (3^{2023} + 1)$	1p
Cum x este produsul a două numere naturale consecutive nenule, nu este pătrat perfect	1p

Problema 3: soluţie orientativă

Presupunem că fiecare elev ar fi adus cel mult câte două tipuri de cadouri. Rezultă că numărul maxim de cadouri care s-ar fi strâns ar fi fost $29 \cdot 2 = 58$	2p
Dar în total s-au strâns $19 + 23 + 21 = 63$ de cadouri	2p
Cum $63 - 58 = 5$	2p
Rezultă că cel puţin 5 elevi au adus toate tipurile de cadori	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 6 – a

6/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluţie orientativă

a)

$2+4+6+\cdots+2020+2022=2\cdot\frac{1011\cdot1012}{2}=1011\cdot1012$ 1p

$\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{2021\cdot2023}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2023}\right)=\frac{2022}{2\cdot2023}$ 1p

$A=\frac{2023}{1012}\cdot1011\cdot1012\cdot\frac{2022}{2\cdot2023}$

$A=1011^2=$ pp 1p

b)

Fie $d=(9\cdot2023^n+20,\ 4\cdot2023^n+9)$

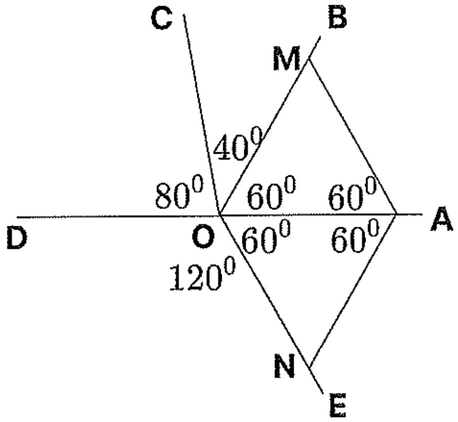
$\Rightarrow d\,|\,9\cdot2023^n+20$

$d\,|\ \ 4\cdot2023^n+9$ 2p

$d\,|\,9(4\cdot2023^n+9)-4(9\cdot2023^n+20)$ 1p

$\left.\begin{matrix}d\,|\,1\\ d\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow d=1\Rightarrow$ nr prime între ele $\Rightarrow$ fracţie ireductibilă 1p

Problema 2: soluţie orientativă



a)

$\sphericalangle BOC=x$

$\widehat{AOB}=\frac{3x}{2}$

$\widehat{COD}=2x$

$\widehat{DOE}=3x$

$\widehat{EOA}=\frac{3x}{2}$ 1p

$x+\frac{3x}{2}+2x+3x+\frac{3x}{2}=360^0\ \Rightarrow x=40^0$ 1p

$\sphericalangle BOC=40^0;\ \sphericalangle AOB=60^0;\ \sphericalangle COD=80^0;\ \sphericalangle DOE=120^0;\ \sphericalangle EOA=60^0$ 1p

b)

Desenul 1p

$AM\parallel OE, OA$ secantă $\Rightarrow \sphericalangle MAO=60^0$ 1p

$AN\parallel OB, OA$ secantă $\Rightarrow\ \sphericalangle OAN=60^0$ 1p

$\sphericalangle NAM=120^0$ 1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Problema 3: soluție orientativă

Fie $d=(a,b)$, $a=dm, b=dn, (m,n)=1, m,n\in N^* \Rightarrow \overline{ef}^2=9\cdot d^2\cdot m\cdot(m,n)+n\cdot d^2\cdot[m,n]$ și folosind $(m,n)\cdot[m,n]=m\cdot n \Rightarrow \overline{ef}^2=d^2\cdot m\cdot(n^2+9)$.

Din $\overline{ef}^2=d^2\cdot m\cdot(n^2+9)\Rightarrow d^2\,|\,\overline{ef}^2\Rightarrow d\,|\,\overline{ef}$ și cum $\overline{ef}$ este număr prim $\Rightarrow d\in\{1,\overline{ef}\}$.

.... **2p**

Cazul 1: Dacă $d=\overline{ef}\Rightarrow m\cdot(n^2+9)=1$, relație care nu are soluții.

Cazul 2: Dacă $d=1\Rightarrow m\cdot(n^2+9)=\overline{ef}^2\Rightarrow m\,|\,\overline{ef}^2$ și cum $\overline{ef}$ este număr prim $\Rightarrow m\in\{1,\overline{ef},\overline{ef}^2\}$.

.... **1p**

În acest caz avem situațiile:

Cazul a: Dacă $m=\overline{ef}^2\Rightarrow n^2+9=1$, relație care nu are soluții .

Cazul b: Dacă $m=\overline{ef}\Rightarrow \overline{ef}=n^2+9$. Cum $\overline{ef}$ este număr prim de două cifre, obținem $\overline{ef}$ este impar, deci n este par, de unde $n\in\{2,4,6,8\}$.

- dacă $n=2\Rightarrow \overline{ef}=13\Rightarrow a=13, b=2$, care verifică relația din enunț.
- dacă $n=4\Rightarrow \overline{ef}=25$, care nu este prim.
- dacă $n=6\Rightarrow \overline{ef}=45$, care nu este prim.
- dacă $n=8\Rightarrow \overline{ef}=73\Rightarrow a=73, b=8$, care verifică relația din enunț.

.... **2p**

Cazul c: Dacă $m=1\Rightarrow \overline{ef}^2=n^2+9$.

Cum $\overline{ef}$ este prim $\Rightarrow u(\overline{ef})\in\{1,3,7,9\}\Rightarrow u(\overline{ef}^2)\in\{1,9\}$, iar cum $u(n^2)\in\{0,4,6\}\Rightarrow u(n^2+9)\in\{3,5,9\}$ (deoarece n este par). Astfel relația $\overline{ef}^2=n^2+9$ are sens doar dacă $u(\overline{ef}^2)=9$ și $u(n^2+9)=9$, adică $u(\overline{ef})\in\{3,7\}$ și $u(n)=0$.

Cum $u(n)=0\Rightarrow n=10k, k\in N^*\Rightarrow \overline{ef}^2=100k^2+9$.

Cum cel mai mic număr prim de două cifre este 11, iar cel mai mare este 97, obținem că $11^2=121$ și $97^2=9409$, atunci $k\in\{2,3,4,...,9\}\Rightarrow \overline{ef}^2\in\{409,909,1609,2509,3609,4909,6409,8109\}$. **(1)**

Dar $23^2=529, 37^2=1369, 43^2=1049, 47^2=2209, 53^2=2809, 67^2=4489, 73^2=5329,$ $83^2=6889$.

Cum aceste valori nu se găsesc în mulțimea din relația **(1),** obținem că ecuația $\overline{ef}^2=100k^2+9$ nu are soluții.

În concluzie, soluțiile problemei sunt: $\overline{ef}=13, a=13, b=2$ și $\overline{ef}=73, a=73, b=8$.

.... **2p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 7 – a

7/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

Fără a diminua generalitatea problemei, presupunem $x \le y \le z$.

Notăm $\begin{cases} y - x = \alpha \ge 0 \\ z - y = \beta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = z - x \\ -(\alpha + \beta) = x - z \end{cases}$ ...2p

Inegalitatea din enunț devine

$-\alpha^{2023} \cdot [-(\alpha+\beta)]^{2023} - \alpha^{2023} \cdot \beta^{2023} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \ge 0 \Leftrightarrow$ ...2p

$\Leftrightarrow [\alpha(\alpha+\beta)]^{2023} - (\alpha \cdot \beta)^{2023} + [(\alpha+\beta) \cdot \beta]^{2023} \ge 0 \Leftrightarrow$ ...1p

$\Leftrightarrow \alpha^{2023} \underbrace{[(\alpha+\beta)^{2023} - \beta^{2023}]}_{\ge 0} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \ge 0$, inegalitate evidentă. ...2p

Problema 2: soluție orientativă

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1209} - \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1209y}{y-1209}$ ...1p

$\left(\frac{x}{31} - 39\right)\left(\frac{y}{31} - 39\right) = \frac{1}{31^2}(x-1209)(y-1209) =$ ...2p

$= \frac{1}{31^2}\left(\frac{1209y}{y-1209} - 1209\right)(y-1209) =$ ...1p

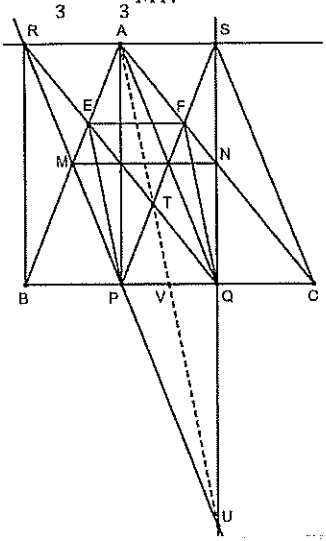
$= \left(\frac{1209}{31}\right)^2 = 39^2$ ...2p

$\sqrt{39^2} = 39, 39 \in \mathbb{N}$ ...1p

Problema 3: soluție orientativă

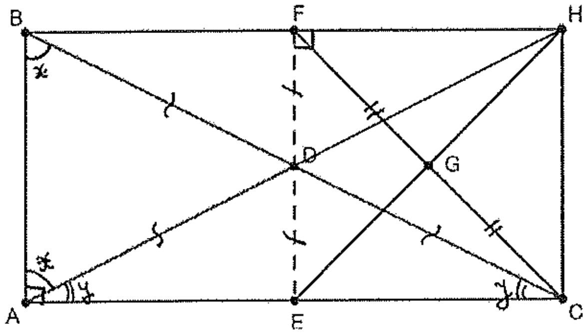
a) Se arată că BPAR și CQAS sunt paralelograme și se obține $AR = AS = \frac{BC}{3}$
$\Rightarrow$ AU este mediană în ΔSRU (1) ...1p
Se arată că ARPQ, APUQ, ASQP paralelograme $\Rightarrow$ RP ≡ PU și SQ ≡ QU
$\Rightarrow$ SP și RQ mediane în ΔSRU ...1p
Cum T ∈ PS ∩ QR $\Rightarrow$ T centrul de greutate al ΔSRU (2)
Din (1) și (2) obținem T ∈ AU ...1p
b) Din T centrul de greutate al ΔSRU $\Rightarrow AT = \frac{1}{3}AU$ (3)
Notăm $AU \cap BC = \{V\} \Rightarrow$ PV ≡ VQ (4) și AV ≡ VU (5) ...1p
Cum BP ≡ QC și din (4) $\Rightarrow$ BV ≡ CV
Din (3) și (5) $\Rightarrow AT = \frac{2}{3}AV \Rightarrow$ T centrul de greutate al ΔABC ...1p

c) P mijloc BQ și PT || BE ⇒ T mijloc EQ;
Q mijloc PC și QT || CF ⇒ T mijloc PF ...1p
⇒ EFQP paralelogram ⇒ $EF = PQ = \frac{BC}{3} = \frac{2}{3}MN$ ...1p



Problema 4: soluție orientativă

$AD \equiv BD \Rightarrow \sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA = x$
$AD \equiv CD \Rightarrow \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = y$
În triunghiul ABC, avem: $2x + 2y = 180^0$
Obținem $x + y = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90^0$ ...2p
Din DE ⊥ AC, AB ⊥ AC ⇒ DE || AB și cum BD = DC ⇒ AE = EC ...1p
Din $DE = \frac{AB}{2}$ și FD = DE ⇒ FE = AB ...1p
Din FE = AB, FE || AB, $\sphericalangle BAC = 90^0$ ⇒ ABFE dreptunghi
⇒ BF = AE și BF || AE ...1p
Demonstrăm că $\Delta EGC \equiv \Delta HGF$ (ULU)
⇒ EC = FH ⇒ ABHC dreptunghi ...1p
Din ABHC dreptunghi, BC diagonală și BD = DC,
obținem AH diagonală și AH ∩ BC = {D} ⇒ A, D, H coliniare ...1p



Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 8 – a

8/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{3} \Rightarrow a=4-\sqrt{3}$ **(2p)**

$b=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2-7\sqrt{3}+4 \Rightarrow b=4+\sqrt{3}$ **(1p)**

$m_a=4,\ m_g=\sqrt{13}$ **(1p)**

b) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1$ **(2p)**

$a=\sqrt{\left(n^2+3n+1\right)^2}=n^2+3n+1\in N$ **(1p)**

Problema 2: soluție orientativă

Cum $\left[\sqrt{a^2+6b}\right]\in Z \Rightarrow \sqrt{b^2+6a}\in Z \Rightarrow b^2+6a$ este pătrat perfect. **(2p)**

$\left[\sqrt{a^2+6b}\right]\le\sqrt{a^2+6b} \Rightarrow \sqrt{b^2+6a}\le\sqrt{a^2+6b} \Rightarrow b^2+6a\le a^2+6b.$ **(1p)**

$\Rightarrow (b-a)(b+a-6)\le 0$ și cum $b-a\ge 0 \Rightarrow a+b\le 6.$ **(2p)**

Obținem că $(a,b)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3)\}$, **(1p)**

Cum b^2+6a este pătrat perfect, convine doar $(a,b)=(2,2)$, care verifică și condiția problemei.

(1p)

Problema 3: soluție orientativă

Desfășurăm în plan fețele (VAB), (VBC), (VCD) și (VDA).

Cum $\sphericalangle AVB<45^0 \Rightarrow \sphericalangle AVA'<180^0$.

În această desfășurare $AM+MN+NP+PA'$ este minimă, dacă punctele A,M,N,P,A' sunt coliniare, unde $M\in VB, N\in VC, P\in VD$. **(1p)**

Avem $AM=2\cdot MN$ **(1p)**

$VABCD$ piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow \sphericalangle AVB\equiv\sphericalangle BVC\equiv\sphericalangle CVD\equiv\sphericalangle DVA' \Rightarrow \sphericalangle A'VC\equiv AVC$

$\Rightarrow VN$ bisectoare în triunghiul VAA'

$VA\equiv VA' \Rightarrow \triangle VA'A$ isoscel de bază $A'A$, de unde obținem că VN este înălțime $\Rightarrow VN\perp A'A$ **(1p)**

Cu teorema bisectoarei în triunghiul $VAN \Rightarrow \frac{VA}{VN}=\frac{AM}{MN}$ și cum $\frac{AM}{MN}=2 \Rightarrow VA=2\cdot VN$ **(2p)**

Cu reciproca teoremei unghiului de 30^0 în triunghiul dreptunghic $VNA \Rightarrow \sphericalangle VAN=30^0 \Rightarrow \sphericalangle AVN=60^0$ **(1p)**

Se obține că $\sphericalangle AVB=30^0$, $\sphericalangle VAB=\sphericalangle VBA=75^0$ **(1p)**

Problema 4: soluție orientativă

$a)$ KM – bisectoarea $\sphericalangle AKB \Rightarrow \dfrac{BK}{AK}=\dfrac{BM}{AM}$

KP – bisectoarea $\sphericalangle AKD \Rightarrow \dfrac{KD}{KA}=\dfrac{PD}{PA}$.

Dar $KB \equiv KD \Rightarrow \dfrac{BM}{AM}=\dfrac{PD}{PA} \overset{R.T.TH}{\Rightarrow} MP \parallel BD$ **(2p)**

$\dfrac{AC}{AN}-\dfrac{BD}{2AK} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AN}-\dfrac{KD}{AK}=1 \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AN}=1+\dfrac{KD}{AK}$ și cum $\dfrac{KD}{KA}=\dfrac{PD}{PA} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AN}=1+\dfrac{PD}{PA} \Leftrightarrow$

$\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AD}{PA} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} PN \parallel CD$ **(1p)**

Din $MP \parallel (BCD)$, $NP \parallel (BCD)$, $MP, NP \subset (MNP)$ și $NP \cap MP = \{P\} \Rightarrow (MNP) \parallel (BCD)$ **(1p)**

$b)$ Din $MP \parallel BD \overset{T.Th}{\Rightarrow} \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AM}{MB} \Rightarrow AP \cdot MB = AM \cdot PD$.

Folosind inegalitatea mediilor

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AM}+\dfrac{MB}{PD} \geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{AP}{AM}\cdot\dfrac{MB}{PD}}=2\cdot\sqrt{\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{PD}{AP}}=2 \Rightarrow \dfrac{AP}{AM}+\dfrac{MB}{PD} \geq 2$

$\Rightarrow AP\cdot PD + AM\cdot MB \geq 2\cdot AM\cdot PD\ (*)$ **(1p)**

Din $PN \parallel DC \overset{T.Th}{\Rightarrow} \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AN}{NC} \Leftrightarrow AP\cdot NC = AN\cdot PD$.

Folosind inegalitatea mediilor $\Rightarrow \dfrac{AP}{AN}+\dfrac{NC}{PD} \geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{AP}{AN}\cdot\dfrac{NC}{PD}}=2\cdot\sqrt{\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{PD}{AP}}=2 \Rightarrow \dfrac{AP}{AN}+\dfrac{NC}{PD} \geq 2$

$\Rightarrow AP\cdot PD + AN\cdot NC \geq 2\cdot AN\cdot PD\ (**)$ **(1p)**

Însumând relațiile $(*)$ și $(**) \Rightarrow 2\cdot AP\cdot PD + AN\cdot NC + AM\cdot MB \geq 2\cdot PD\cdot(AN+AM) \Leftrightarrow$

$AN\cdot NC + AM\cdot MB \geq 2\cdot PD\cdot(AN+AM-AP)$. **(1p)**

<u>Notă:</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 9 – a

9/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluţie orientativă

$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ şi analoagele 1p

$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$ şi analoagele 1p

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VQ} + \overrightarrow{QE}$ 1p

$\overrightarrow{AE} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{UV} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NQ} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{DE} = \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{UV} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}\right)$ 1p

$\overrightarrow{AE} = \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{UV} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ}\right) =$

$= \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{UV} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CD} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{DE}\right)$ 1p

$\overrightarrow{AE} = \frac{2k+1}{2(k+1)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{UV} = \frac{2k+1}{2(k+1)}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{UV} \Rightarrow \frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{UV} \Rightarrow UV \mid\mid AE$-1p

$\frac{1}{2(k+1)}\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{UV}\right| \Rightarrow AE = 2(k+1)UV \Rightarrow k = 2023$ 1p

Problema 2: soluţie orientativă

$x = (2[x] + 1)\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right] - 3$ 1p

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$ 1p

Ecuaţia devine $\frac{x+3}{2x+1} = \left[\frac{5x-2}{3x+2}\right]$ **şi cum** $\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+3}{2x+1} \in \mathbb{Z}$ 1p

$2x + 1 \mid x + 3$ şi $2x + 1 \mid 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 \mid 5$ 1p

$2x + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ 1p

$x \in \{-3, -1, 0, 2\}$ 1p

Verificăm valorile lui x în ecuaţia din enunţ şi obţinem $x = 2$ 1p

Problema 3: soluţie orientativă

Notăm $s=\frac{a}{a^2+bc+1}+\frac{b}{b^2+ca+1}+\frac{c}{c^2+ab+1}$, $a^2+1\geq 2a, b^2+1\geq 2b,\ c^2+1\geq 2c$, egalitate

dacă a=b=c=1 ....1p

$\frac{a}{a^2+bc+1}\leq\frac{a}{2a+bc}, \frac{b}{b^2+ca+1}\leq\frac{b}{2b+ca}, \frac{c}{c^2+ab+1}\leq\frac{c}{2c+ab}$ 1p

$s\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{2a+bc}+\frac{2b}{2b+ca}+\frac{2c}{2c+ab}\right)$ 1p

$s\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{bc}{2a+bc}+1-\frac{ca}{2b+ca}+1-\frac{ab}{2c+ab}\right)$ 1p

$s\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{(bc)^2}{2abc+(bc)^2}+\frac{(ca)^2}{2abc+(ca)^2}+\frac{(ab)^2}{2abc+(ab)^2}\right]\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(bc+ca+ab)^2}{6abc+(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}$ 1p

$s\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{(bc+ca+ab)^2}{2abc(a+b+c)+(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}$ 1p

$s\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc+ca+ab)^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ 1p

Problema 4: soluţie orientativă

Notăm $S_n=\frac{2}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)^2-2}{(n-1)!}+\underbrace{\frac{n^2-2}{n!}+\frac{n+2}{n!}}$

$\frac{n^2+n}{n!}=\frac{n(n+1)}{n!}=\frac{n+1}{(n-1)!}=\frac{(n-1)+2}{(n-1)!}$ 2p

$\Rightarrow S_n=S_{n-1}, \forall\, n\geq 3$ 2p

$\Rightarrow S_n=S_{n-1}=\ldots=S_2, \forall\, n\geq 2$

Dar $S_2=\frac{2}{2!}+\frac{4}{2!}=\frac{6}{2!}=3$ 2p

$\Rightarrow S_n=3$ 1p

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 10 – a

10/V2

Mate.info.ro profu' de mate

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1 – Soluție orientativă:	**Punctaj**
Prin ridicare la pătrat relația din enunț este echivalentă cu $f_1=\frac{log_9 14}{log_7 11}<\frac{log_7 12}{log_9 14}=f_2$.	
Vom demonstra că $f_1<1$ și $f_2>1$. (R_1)	1p
Cum $f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}$, facem observația: $\log_{\frac{14}{9}}7<\log_{\frac{14}{9}}9 \Leftrightarrow \log_7\frac{14}{9}>\log_9\frac{14}{9}$ (R_2).	1p
Dar $\frac{14}{9}<\frac{11}{7}\Rightarrow \log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{11}{7}$ și folosind (R_2) obținem	1p
$\log_9\frac{14}{9}<\log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{11}{7}\Leftrightarrow \log_9 14-1<\log_7 11-1\Rightarrow \log_9 14<\log_7 11\Rightarrow$ $f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}<1$ și prima inegalitate din (R_1) este demonstrată.	1p
Pentru a doua inegalitate din (R_1) observăm $\frac{12}{7}>\frac{14}{9}\Leftrightarrow \log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{12}{7}\Leftrightarrow \log_{\frac{14}{9}}7>\log_{\frac{12}{7}}7$ și (R_2) se completează	1p
$\log_7\frac{12}{7}>\log_7\frac{14}{9}>\log_9\frac{14}{9}\Leftrightarrow \log_7 12-1>\log_9 14-1\Rightarrow \log_7 12>\log_9 14\Rightarrow$	1p
$\Rightarrow f_2=\frac{\log_7 12}{\log_9 14}>1$ și problema este demonstrată.	1p

Problema 2 – Soluție orientativă:	**Punctaj**
Soluție:	1p
Notez g :R→R , $g(x)=x^{2023}$ și $(\underbrace{f\circ f\circ f\circ \ldots\circ f}_{de\ 2020\ de\ ori})(x)=f_{2020}(x)$	2p
Compunând la dreapta și la stânga cu „f" relația $f_{2020}(x)=g(x)$, obținem $f_{2021}(x)=f(x)^{2023}$, respectiv $f_{2021}(x)=f(x^{2023})$ și rezultă $f(x)^{2023}=f(x^{2023})$.	2p
Înlocuind x=1 obținem $f(1)^{2023}=f(1)$ cu soluțiile -1, 0, 1.Deci $f(1)\in\{-1,0,1\}$. Analog $f(0)\in\{-1,0,1\}$ și $f(-1)\in\{-1,0,1\}$.	
Funcția g este injectivă, f_{2020} este injectivă, deci f este injectivă și monotonă⟹strict monotonă ⇒$(f(-1),f(0),f(1))$ = (-1, 0, 1) sau (1, 0, - 1). În concluzie E=0.	2p

Problema 3 – Soluție orientativă:	Punctaj
a) Aplicăm formula produsului sumei prin diferență de mai multe ori $$(a-bi)(a+bi)=a^2-b^2i^2$$	1p
$$(a^2-b^2i^2)(a^2+b^2i^2)=a^4-b^4i^4$$	2p
$$z=a^{64}-b^{64}i^{64}=a^{64}-b^{64}\epsilon R$$	
b) $\lvert z-3-4i\rvert=\lvert x+2i-3-4i\rvert=\lvert x-3-2i\rvert=$	1p
$=\sqrt{(x-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{0+4}=2$	2p
Egalitate avem cand x – 3 = 0 ⇒ x=3	1p

Problema 4 – Soluție orientativă:	Punctaj
$a,b,c>1 => log_a b > log_a 1 = 0$ (baze supraunitare) *Aplicăm inegalitatea Titu Andreescu generalizată* $\frac{log_b c}{b+c-a}+\frac{log_c a}{a+c-b}+\frac{log_a b}{a+b-c}=\frac{\sqrt{log_b c}^2}{b+c-a}+\frac{\sqrt{log_c a}^2}{a+c-b}+\frac{\sqrt{log_a b}^2}{a+b-c}\geq$	1p
$\geq\frac{(\sqrt{log_b c}+\sqrt{log_c a}+\sqrt{log_a b})^2}{a+b+c}$ (*)	1p
Aplicăm inegalitatea mediilor $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz} <=> x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$	1p
$\sqrt{log_b c}+\sqrt{log_c a}+\sqrt{log_a b}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{log_b c}\cdot\sqrt{log_c a}\cdot\sqrt{log_a b}}=$	1p
$=3\sqrt[6]{log_b c\cdot log_c a\cdot log_a b}=3\sqrt[6]{\frac{lnc}{lnb}\cdot\frac{lna}{lnc}\cdot\frac{lnb}{lna}}=3\sqrt[6]{1}=3$	2p
Înlocuind în relația (*) avem $\frac{log_b c}{b+c-a}+\frac{log_c a}{a+c-b}+\frac{log_a b}{a+b-c}\geq\frac{(\sqrt{log_b c}+\sqrt{log_c a}+\sqrt{log_a b})^2}{a+b+c}\geq\frac{3^2}{a+b+c}=\frac{9}{a+b+c}$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 11 – a

11/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluţie orientativă

a) Se observă că $Tr(A) = 8$ şi $\det(A) = 7$. Din relaţia lui H.C. $\Rightarrow A^2 = 8A - 7I_2$.
Fie $X(a), X(b) \in G \Rightarrow X(b) \cdot X(b) = (a \cdot A + (1-a) \cdot I_2)(b \cdot A + (1-b) \cdot I_2) = abA^2 +$
$+\left(a(1-b) + b(1-a)\right)A + (1-a)(1-b)I_2 = (6ab + a + b)A + \left(1 - (6ab + a + b)\right)I_2 =$
$= cA + (1-c)I_2 = X(c) \in G$, unde $c = 6ab + a + b \in \mathbb{R}$...2 p
Cum $6ab + a + b = 6\left(a + \frac{1}{6}\right)\left(b + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{6}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, atunci
$X(a) \cdot X(b) = X\left(6\left(a + \frac{1}{6}\right)\left(b + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{6}\right) \in G$, pentru orice matrice $X(a), X(b) \in G$......................1 p

b) $X(a) \cdot X\left(-\frac{1}{6}\right) = X\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot X(a) = X\left(-\frac{1}{6}\right)$, pentru orice $X(a) \in G$..1 p
Deci $X\left(\frac{-2023}{6}\right) \cdot X\left(\frac{-2021}{6}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2021}{6}\right) \cdot X\left(\frac{2023}{6}\right) = X\left(-\frac{1}{6}\right)$..1 p

c) $X^2(a) = X(a) \cdot X(a) = X\left(6\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right)$
$X^3(a) = X^2(a) \cdot X(a) = X\left(6\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right) \cdot X(a) = X\left(6^2\left(a + \frac{1}{6}\right)^3 - \frac{1}{6}\right)$...1 p
Conform inducţiei matematice $X^n(a) = X\left(6^{n-1}\left(a + \frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{6}\right), n \in \mathbb{N}^*$...1 p

Problema 2: soluţie orientativă

Notăm $X \in M_3(\mathbb{Z}), X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ şi $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$X \cdot / X^{2023} = E / \cdot X \Rightarrow X^{2024} = XE = EX$. ....1 p
Prin calcul se obţine $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = M(a, b, c)$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ....1 p

Prin inducţie obţinem $\left(M(a, b, c)\right)^n = M(a_n, b_n, c_n)$ cu $a_n + b_n + c_n = (a + b + c)^n, n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow a_{2023} + b_{2023} + c_{2023} = 1 = (a + b + c)^{2023} \Rightarrow a + b + c = 1$..1 p

Din $X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow det(X^{2023}) = detE \Rightarrow (\det(X))^{2023} = 1 \Rightarrow \det(X) = 1$..................1 p
Dar $\det(X) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 1$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 1 / \cdot 2 \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 2$......................2 p
$\Rightarrow$ unul dintre termeni este 0, iar ceilalţi doi sunt egali cu 1. Analizând cele 6 situaţii posibile $a = b, b - c = 1, a - c = -1$ şi analoagele şi folosind $a + b + c = 1 \Rightarrow X \in \{I_3; E; E^2\}$, iar prin verificare doar $X = E$ satisface ecuaţia din enunţ...1 p

Problema 3: soluție orientativă

Notăm

$$a_n=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{i\cdot j},\ n\ge 2$$

Atunci $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{3\cdot n}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$ 1p

Aplicând Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln^2 n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{(\ln n)^2-(\ln(n-1))^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}{\ln(n\cdot(n-1))\cdot\ln\frac{n}{n-1}}\ (*)$$

....1p

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\frac{n}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\ln e}=1\ (R_1)$

....2p

iar $\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}}^{x_n}}{\ln(n\cdot(n-1))}\overset{\text{Stolz-Cesaro}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\ln(n\cdot(n-1))-\ln((n-1)(n-2))}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-1}}{\ln\frac{n}{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{\ln e^2}=\frac{1}{2}\ (R_2)$$

....2p

$\overset{(*)}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln^2 n}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$ 1p

Problema 4: soluție orientativă

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1},\alpha>0\Rightarrow$$

....1 p

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}}=\frac{3}{4}$$

....2 p

Deci rămâne de calculat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^3+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + 1 - n^3 - 1}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}^2 + \sqrt[3]{(n+1)^3+1}\cdot\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3+1}^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}^2 + \sqrt[3]{(n+1)^3+1}\cdot\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3+1}^2} = 1$$

Deci limita cerută este $\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$..4 p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 12 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1 (G.M. 9/2023, autor Cezar Apostolescu, Ploiești)

$F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{xe^x}>0, \forall x>0,$ rezultă F strict crescătoare și există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)$. **2p**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{xe^xF(x)}{xe^x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\left(xe^xF(x)\right)'}{\left(xe^x\right)'}$ (cazul $\dfrac{0}{0}$, l'Hospital) **2p**

Dacă $l=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)\in\mathbb{R}$, se obține $l=1\to l$, absurd. **2p**

Deoarece F este strict crescătoare, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)=-\infty$. **1p**

Problema 2

Fie F_1 o primitivă a lui f pe $[a,c]$, F_2 o primitivă a lui f pe $[c,b]$ și $F(x)=\begin{cases}F_1(x)+C_1, & x\in[a, c]\\ k, & x=c\\ F_2(x)+C_2, & x\in[c, b]\end{cases}$ **3p**

Punând condiția ca F să fie continuă, se obține $F_1(c)+C_1=k$, $F_2(c)+C_2=k$. **2p**

Cu $C_1=k-F_1(c)$, $C_2=k-F_2(c)$, $k\in\mathbb{R}$ se obține că F este și derivabilă și $F'(x)=f(x)$. **2p**

Problema 3

Fie $a, b\in M$, astfel încât $ab=e$ și $f:M\to M$, $f(x)=bx$. **2p**

Se arată că f este injectivă și cum M este finită, rezultă f surjectivă. **3p**

Prin urmare, există $c\in M$, astfel încât $bc=e$. Rezultă $a(bc)=a$ și $(ab)c=a$, care duce la $c=a$, deci $ba=e$. **2p**

Problema 4 (autor Marin Ionescu, Pitești)

Se știe că dacă $f:G_1\to G_2$ este morfism de grupuri, atunci $\operatorname{Im} f=\{f(x)|x\in G_1\}$ este subgrup în G_2. Cum f este morfism injectiv, avem $|G_1|=|\operatorname{Im} f|=m$. Folosind teorema lui Lagrange avem $\operatorname{ord}\operatorname{Im} f\,|\operatorname{ord} G_2$, deci $m|n$. **2p**

Vom arăta că m este un număr prim. Presupunem prin metoda reducerii la absurd contrariul. Deci există p prim astfel încât $p|m$, $p\neq m$. **1p**

Deoarece G_1 este grup ciclic cu m elemente, există $x\in G_1\setminus\{e_1\}$ astfel încât $G_1=\{e_1, x, x^2,..., x^{m-1}\}$, unde e_1 este elementul neutru al grupului G_1. Dacă $f(x)=y$, $y\in G_2$, iar f este morfism injectiv, rezultă $\{e_2, y, y^2,..., y^{m-1}\}=\operatorname{Im} f\subset G_2$, unde e_2 este elementul neutru al grupului G_2. **1p**

$f_p : G_1 \to G_2$, $f_p(a) = (f(a))^p$ este şi el morfism de grupuri.

Într-adevăr, deoarece grupurile ciclice G_1, G_2 sunt comutative, putem scrie:

$f_p(ab) = (f(ab))^p = (f(a) \cdot f(b))^p = (f(a))^p \cdot (f(b))^p = f_p(a) \cdot f_p(b)$, $\forall a, b \in G_1$. **1p**

Deoarece f_p este morfism, avem, $f_p(a) = f(a^p)$, $\forall a \in G_1$ (*). **1p**

Dacă $p|m$ şi p este număr prim, din teorema lui Cauchy rezultă că există $a \in G_1$, cu $\operatorname{ord} a = p$. Deci $a \neq e_1$ şi $a^p = e_1$. Din (*) rezultă $f_p(a) = f(a^p) = f(e_1) = f_p(e_1)$, contradicţie cu faptul că f_p este injectivă.

Deci, presupunerea făcută este falsă şi rezultă că m este număr prim. **1p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.