Soluţii şi repere de corectare – Matematica - de drag, 2023

Clasa a V-a

1. La o împărțire de numere naturale se obține câtul 4 și restul 1. Dacă mărim deîmpărțitul cu 10 și refacem împărțirea, câtul devine 5. Determinați numerele inițiale.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Soluție. Fie D deîmpărțitul inițial. Atunci $D - 1$ este de 4 ori mai mare decât împărțitorul I **2p**

Deoarece prin mărirea lui $D - 1$ cu 11 câtul crește cu 1, I se cuprinde în 11 exact o dată, deci I poate fi 6, 7, 8, 9, 10 sau 11 .... **3p**

Obținem soluțiile $(25, 6)$, $(29, 7)$, $(33, 8)$, $(37, 9)$, $(41, 10)$ și $(45, 11)$ **2p**

2. a) Câte numere de trei cifre au în scrierea lor zecimală doar cifrele 5 și 6?

b) Care număr este mai mare: suma A a numerelor de trei cifre, care în scrierea lor zecimală au doar cifrele 7, 8 și 9, sau suma B a numerelor de patru cifre, care în scrierea lor zecimală au doar cifrele 1 și 2?

Soluție. a) Prima cifră poate fi aleasă în două feluri; pentru fiecare alegere a primei cifre există două alegeri ale celei de-a doua cifre; pentru fiecare posibilitate de alegere a primelor două cifre există două posibilități de alegere a celei de-a treia cifre, deci avem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ numere **2p**

b) Cu un raționament ca mai sus, suma A are 27 de termeni **1p**

În termenii sumei A, pe poziția sutelor apare de câte 9 ori fiecare dintre cifrele 7, 8, 9; analog pentru zeci și unități. Reiese că $A = 9\cdot(7+8+9)100+9\cdot(7+8+9)10+9\cdot(7+8+9) = 9 \cdot 24 \cdot 111$ **2p**

Analog, $B = 8(1 + 2)1000 + 8(1 + 2)100 + 8(1 + 2)10 + 8(1 + 2) = 24 \cdot 1111$, deci $B > A$ **2p**

3. Determinați cel mai mic număr natural $n \geqslant 2$ cu proprietatea: putem așeza numerele $1, 2, 3, \ldots, 25$ pe un cerc, astfel încât suma oricărui grup de n numere consecutive de pe cerc se împarte exact la n.

Soluție. Pentru $n = 5$, dacă așezăm numerele în ordine crescătoare, atunci suma oricăror 5 numere consecutive se împarte exact la 5, deci $n = 5$ convine **3p**

Arătăm că pentru $2 \leqslant n \leqslant 4$ nu există o astfel de așezare. Suma numerelor de pe cerc este $1 + 2 + \ldots + 25 = 325$ **1p**

Dacă o astfel de așezare ar fi posibilă, dându-l la o parte pe 6, cele 24 de numere rămase ar trebui să se poată asocia în grupe care să se împartă exact la n. Dar, suma numerelor rămase este 319 și nu se împarte exact la niciun n, cu $2 \leqslant n \leqslant 4$. Astfel, nu există nicio așezare posibilă pentru $2 \leqslant n \leqslant 4$ **3p**

Clasa a VI-a

1. Calculați media aritmetică a numerelor naturale de forma $\overline{abcd}$, care verifică relația $\overline{abcd} - \overline{dabc} = 2025$.

Gheorghe Radu, Râmnicu Vâlcea

Soluție. Avem $\overline{abc0} - \overline{abc} = 9 \cdot \overline{abc}$ și $\overline{d000} - d = \overline{ddd}$ **2p**

Relația dată este echivalentă cu $\overline{abc} = 225 + \overline{ddd}$ **1p**

Pentru $d > 6$, $225 + \overline{ddd} > 999$, deci în aceste cazuri nu avem soluții. Pentru $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, înlocuind în relația anterioară găsim soluțiile $\overline{abcd} \in \{3361, 4472, 5583, 6694, 7805, 8916\}$ **3p**

Media aritmetică a acestor valori este $\dfrac{3361 + 4472 + 5583 + 6694 + 7805 + 8916}{6} = 6138{,}5$.

2. Determinați cifra a astfel încât numărul $\overline{\underbrace{111\ldots1}_{2023 \text{ cifre } 1}a}$ să fie divizibil cu 13.

Soluție. Fie N numărul dat.

Observăm că 111111 se împarte exact la 13 .... **2p**

Rezultă că numărul $\overline{\underbrace{111\ldots1}_{2022 \text{ cifre } 1}00} = N - \overline{1a}$ se împarte exact la 13 .... **2p**

Astfel, pentru ca N să fie divizibil cu 13, este necesar și suficient ca a să fie 3 ... **3p**

3. În jurul punctului O se formează unghiurile $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, ..., $\widehat{A_{239}OA_{240}}$ și $\widehat{A_{240}OA_1}$, având măsurile numere întregi de grade.

a) Arătați că cel puțin 180 dintre aceste unghiuri au măsuri de cel mult $2°$.

b) Arătați că există numerele $1 \leqslant i < j < k \leqslant 200$ astfel încât OA_j este bisectoarea unghiului $\widehat{A_iOA_k}$.

Soluție. a) Avem $360 = \underbrace{(3 + 3 + \ldots + 3)}_{60 \text{ de termeni}} + \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{180 \text{ de termeni}}$ **1p**

Dacă mărim numărul de termeni ai primei sume, micșorând corepunzător numărul termenilor celei de-a doua sume, valoarea sumei va depăși 360, în contradicție cu faptul că suma măsurilor unghiurilor în jurul lui O este $360°$. Astfel, numărul unghiurilor cu măsuri $\geqslant 3°$ este cel mult 60 .... **2p**

b) Dacă există 60 de unghiuri $\geqslant 3°$, atunci celelalte 180 de unghiuri au $1°$. În acest caz există două unghiuri consecutive $\widehat{A_iOA_{i+1}} = \widehat{A_{i+1}OA_{i+2}} = 1°$, deci OA_{i+1} este bisectoarea unghiului A_iOA_{i+2} **1p**

Dacă există cel mult 59 de unghiuri $\geqslant 3°$, atunci există cel puțin $181 > 3 \cdot 59$ unghiuri $\leqslant 2°$. În acest caz există patru unghiuri „consecutive” cu măsuri $\leqslant 2°$. Cum măsurile lor succesive pot fi doar $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 2, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 2, 2, 1)$, $(1, 2, 2, 2)$ și „răsturnatele” acestora, în fiecare caz găsim trei semidrepte care îndeplinesc concluzia **3p**

Clasa a VII-a

1. Fie numerele naturale p, q și r mai mari ca 2. Arătați că printre numerele $\sqrt{\dfrac{pq-2}{3}}$, $\sqrt{\dfrac{qr-2}{3}}$ și $\sqrt{\dfrac{rp-2}{3}}$ se află cel puțin unul irațional.

Cristina și Mihai Vijdeluc, Baia Mare

Soluție. Presupunem că toate numerele sunt raționale. Atunci există $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $pq - 2 = 3a^2$, $qr - 2 = 3b^2$ și $rp - 2 = 3c^2$ **2p**

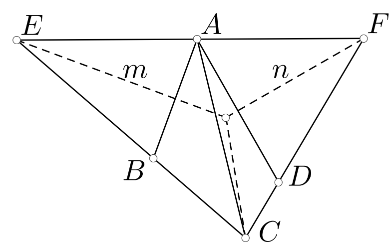
Obținem $pq = 3a^2 + 2$, $qr = 3b^2 + 2$ respectiv $rp = 3c^2 + 2$ **1p**

Prin înmulțirea relațiilor se obține $(pqr)^2 = \left(3a^2 + 2\right) \cdot \left(3b^2 + 2\right) \cdot \left(3c^2 + 2\right) = \mathcal{M}_3 + 2$. Această relație este falsă, deoarece un pătrat perfect are doar una din formele $\mathcal{M}_3$ sau $\mathcal{M}_3 + 1$, astfel că se verifică cerința problemei **4p**

2. Un patrulater convex $ABCD$ are $\angle BAD = 50^\circ$ și $\angle BCD = 80^\circ$. Dreapta BC taie mediatoarea m a segmentului AB în E, iar dreapta CD taie mediatoarea n a segmentului AD în F.

a) Arătați că punctele E, A, F sunt coliniare.

b) Arătați că dreptele m, n și bisectoarea unghiului BCD sunt concurente.

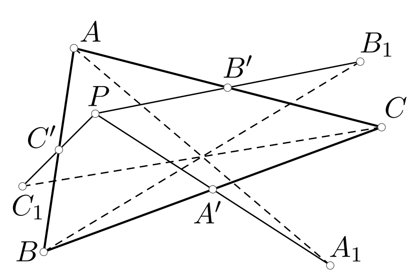


Soluție. a) Triunghiurile AEB și AFD sunt isoscele, deci $\angle EAB = \angle EBA$ și $\angle FAD = \angle FDA$ **2p**

Rezultă $\angle BAD + \angle EAB + \angle DAF = \angle BAD + \angle EBA + \angle FDA = 50^\circ + (\angle BAC + \angle BCA) + (\angle DAC + \angle DCA) = 50^\circ + \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, ceea ce arată că punctele E, A, F sunt coliniare....................... **2p**

b) În triunghiurile isoscele EAB și FAD, dreptele m și n sunt bisectoarele unghiurilor AEB, respectiv AFD. Cum (A, E, F), (C, B, E) și (C, D, F) sunt coliniare, reiese că m, n și bisectoarea unghiului BCD sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului CEF, deci sunt concurente **3p**

3. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ABC și A_1, B_1, C_1 simetricele unui punct P față de A', B', respectiv C'. Arătați că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.



Soluție. Patrulaterul PAB_1C este paralelogram, deoarece diagonalele PB_1 și AC au același mijloc B' **2p**

Rezultă $PC \parallel AB_1$ și $PC = AB_1$ **1p**

Analog $PC \parallel BA_1$ și $PC = BA_1$, deci BAB_1A_1 este paralelogram **2p**

Reiese că segmentele AA_1 și BB_1 au același mijloc M. Analog, segmentele AA_1 și CC_1 au același mijloc M, deci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în M **2p**

Rezervă. Arătați că, dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au perimetre egale, $BC = B'C'$ și $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, atunci ele sunt congruente.

Clasa a VIII-a

1. Vom spune că o piramidă se numește *olimpică* dacă putem numerota vârfurile sale și mijloacele muchiilor cu numerele consecutive $1, 2, 3, \ldots$, astfel încât fiecare număr din mijlocul unei muchii să fie media aritmetică a numerelor poziționate în capetele sale. Arătați că nu există piramide olimpice ce au ca bază un poligon convex cu 2023 de laturi.

Ștefan Gobej, elev, Curtea de Argeș

Soluție. Presupunem că există. Deoarece piramida are baza cu 2023 vârfuri, 2023 muchii ale bazei, 2023 muchii laterale și un vârf rezultă că vom folosi $3 \cdot 2023 + 1 = 6070$ numere, adică toate numerele naturale de la 1 la 6070 .... **2p**

Numerele 1 și 6070 nu pot fi pe laturi, deoarece nu pot fi medie aritmetică a unor numere din această listă. Astfel, ele sunt așezate în două vârfuri ale piramidei **2p**

Mai mult, pentru că numerele de pe muchii sunt naturale, vârfurile de pe muchii comune cu vârful numerotat cu 1 conțin numere impare și astfel, succesiv, toate vârfurile piramidei vor fi numerotate cu numere impare. Acest lucru este în contradicție cu faptul că unul din vârfuri are numărul 6070 .... **3p**

2. Determinați numerele reale a pentru care mulțimea soluțiilor ecuației $[x]+[x+a] = 2023$ este un interval nevid.

Soluție. Dacă a este un număr întreg par $2n$, atunci ecuația devine $2([x]+n) = 2023$ și nu are soluții **1p**

Dacă a este un număr întreg impar $2n+1$, atunci ecuația devine $[x] = 1011 - n$ și are ca mulțime S a soluțiilor intervalul nevid $[1011-n, 1012-n)$.......... **1p**

Dacă a nu este număr întreg, ecuația devine $[x] + [x + A] = 2023 - [a]$, unde $A = \{a\} \in (0, 1)$.......... **1p**

Dacă $2023 - [a]$ este un număr par $2n$, atunci: pentru $x \in [n, n+1-A)$ avem $[x] + [x + a] = 2n$; pentru $x \geq n+1-A$ avem $[x] + [x+a] \geq n+n+1 > 2n$; pentru $x < n$ avem $[x] + [x + a] \leq n - 1 + n < 2n$, deci S este intervalul $[n, n + 1 - A)$

Dacă $2023 - [a]$ este un număr impar $2n + 1$, atunci: pentru $x \in [n + 1 - A, n + 1)$ avem $[x]+[x+a] = 2n+1$; pentru $x \geq n+1$ avem $[x]+[x+a] \geq n+1+n+1 > 2n+1$; pentru $x < n + 1 - A$ avem $[x] + [x + a] \leq n + n < 2n + 1$, deci S este intervalul $[n + 1 - A, n + 1)$ **3p**

Valorile cerute sunt toate numerele reale, în afară de numerele întregi pare **1p**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} 2x = 1 + \frac{2}{y^2+1} \\ 2y = 1 + \frac{2}{z^2+1} \\ 2z = 1 + \frac{2}{x^2+1}. \end{cases}$

Soluție. Avem soluția $(1, 1, 1)$ **1p**

Presupunem că avem soluția (a, b, c). Atunci $a, b, c > 0$.......... **1p**

Dacă presupunem $a < 1$, atunci, cum $a > 0$, $2c = 1 + \frac{2}{a^2+1} > 1 + \frac{2}{2} = 2$, deci $c > 1$, iar $2b = 1 + \frac{2}{c^2+1} < 2$, de unde $b < 1$ și $2a = 1 + \frac{2}{b^2+1} > 2$ – contradicție.

Dacă presupunem $a > 1$, atunci toate inegalitățile precedente se inversează și obținem o altă contradicție.......... **4p**

Reiese $a = 1$, de unde $c = 1$, $b = 1$ **1p**