SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_șt_nat, noiembrie 2023
Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I ***(30 de puncte)***

5p 1. Fie $z = \frac{a-bi}{b+ai}$, să se arate că $|z| = 1$ pentru orice numere reale *a* și *b*.
5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$. Să se determine numărul real *a* pentru care punctul A(*a;a)* este situat pe graficul funcției *f.*
5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x - 2 + \sqrt{x-1} = 0$.
5p 4. Să se determine numărul de elemente ale unei mulțimi care are 60 de submulțimi ordonate cu trei elemente.
5p 5. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctul *A(4;-3)* și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $d: 2x - y + 3 = 0$.
5p 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că AB = 15 și $\cos C = \frac{3}{5}$.

Subiectul al II-lea ***(30 de puncte)***

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, unde *x* este un număr real.
5p a) Arătați că $A(-6) - 4A(0) = -3A(2)$.
5p b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A(1)X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
5p c) Determinați perechile de numere întregi (*a,b*) , $a < b$, pentru care $\det\left(A(a)A(b) + abI_2\right) = 4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$.
5p a) Arătați că $2 * (-2) = 13$
5p b) Să se determine elementul neutru al legii. .
5p c) Să se arate că pentru orice $x, y \geq 3$ $avem$ $x * y \geq 3$.

SUBIECTUL al III-lea ***(30 de puncte)***

1. Se consideră funcția $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.
5p ***a)*** Arătați că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
5p ***b)*** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de pe grafic de abcisa $x_0 = 0$;
5p ***c)*** Studiați monotonia funcției f .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3x + \frac{1}{x}$.
5p ***a)*** Arătați că $\int_1^2 x\, f(x) dx = 11$.
5p ***b)*** Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + bx^2 + \ln x$ este o primitivă a lui f.
5p ***c)*** Calculați $\int_0^1 e^x \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$.

Examenul national de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE simulare noiembrie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I ***30 de puncte***

1	$\|z\| = \left\|\frac{a-bi}{b+ai}\right\| = \frac{\|a-bi\|}{\|b+ai\|} =$ $= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} = 1$	**2p** **3p**
2	$A(a;a) \in Gf <=> f(a) = a$ $4a^2 + 5a + 1 = a => a = -\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
3	$\sqrt{x-1} = 2 - 2x, \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - 2x \geq 0 \end{cases}$ $x = 1$ care convine	**3p** **2p**
4	$A_n^3 = 60, n \geq 3$ $n(n-1)(n-2) = 60 => n = 5$	**2p** **3p**
5	$d: 2x - y + 3 = 0 =>$ m $= 2, d_1 \perp d => m_1 m = -1, m_1 = -\frac{1}{2}$ $d_1: y - y_A = m_1(x - x_A) => d_1: x + 2y + 2 = 0$	**3p** **2p**
6	$sin^2 C + cos^2 C = 1 => \sin C = \frac{4}{5}$ $\frac{AB}{sinC} = 2R \Rightarrow \frac{15}{\frac{4}{5}} = 2R$, se obține $R = \frac{75}{8}$	**2p** **3p**

Subiectul al II-lea ***(30 puncte)***

1a	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ Finalizare	**3p** **2p**
	det(A(1)) = 1=> $A^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**

1b	$X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix} => X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	**3p**
1c	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1-ab & b\\ -a & -ab\end{pmatrix}$, $\det\left(A(a)A(b)+abI_2\right)=\begin{vmatrix}1 & b\\ -a & 0\end{vmatrix}$, a< b $ab=4 => \ (1,4),(-4,-1)$	**3p** **2p**
2a	$2*(-2)=2(2-3)(-2-3)+3$ $2*(-2)=13$	**2p** **3p**
2b	$\exists \boldsymbol{e}\in\mathbb{R}, x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R},\ x*y=y*x$ $x*e=x => e=\dfrac{7}{2}$	**2p** **3p**
2c	$x,y\geq 3 => \begin{cases}x-3\geq 0\\ y-3\geq 0\end{cases} => 2(x-3)(y-3)\geq 0$ $2(x-3)(y-3)+3\geq 3 => \ x*y\geq 3$	**3p** **2p**

Subiectul al III-lea ***30 puncte***

1.a)	$f'(x)=(1-\sqrt{1-x^2})'=-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ $=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$ este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $\Rightarrow$ ecuația tangentei este $y=0$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0 => \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 => x=0$ <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table>Se observă că f este descrescătoare pe intervalul $(-1,0]$ si crescătoare pe $[0,1)$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_1^2 x\,f(x)dx=\int_1^2 x\left(2+3x+\dfrac{1}{x}\right)dx=$ $\int_1^2 (2x+3x^2+1)dx=(x^2+x^3+x)\ \Big\|_1^2$ = 14 – 3 = 11	**1p** **2p** **2p**
b)	F primitiva a lui f => $F'(x)=f(x), x\in(0,\infty)$	**1p**

	$=> a + 2bx + \frac{1}{x} = 2 + 3x + \frac{1}{x}$ $=> a = 2, b = \frac{3}{2}$	**3p** **1p**
c)	$\int_0^1 e^x\left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 e^x\,(2 + 3x)dx$ $= (2 + 3x)e^x\|_0^1 - \int_0^1 3e^x dx$ $= 5e - 2 - 3e^x\|_0^1 = 5e - 2 - 3e + 3 = 2e + 1$	**1p** **2p** **2p**