Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2(1-2i)+i(4+i)=1$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3,-3)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+8\right)=\log_2(8-2x)$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB=5$, $C=\frac{\pi}{4}$ și înălțimea $AD=4$. Arătați că $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&-1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.
	2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.
5p	**a)** Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Se consideră funcția $f:M\to M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x,y\in M$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 f(x)\left(x^2+1\right)^2 dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{4}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătați că $I_n-I_{n+4}=\dfrac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1-2i)+i(4+i)=2-4i+4i+i^2=$	**3p**
	$=2+(-1)=1$	**2p**
2.	$f(3)=-3\Rightarrow 9+3a-a=-3$	**3p**
	$a=-6$	**2p**
3.	$x^2+8=8-2x$, de unde obținem $x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$, care convin	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{OA}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}$	**2p**
	$\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+3\vec{j}$, deci punctul C are coordonatele $(4,3)$	**3p**
6.	$DC=4$	**2p**
	$BD=3$, deci $BC=BD+DC=3+4=7$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&0&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-1)-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-b+a&1&a-b\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&0&0\\a-b&0&a-b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$(A(1))^{-1}=A(1)$, $(A(0))^{-1}=A(0)$	**2p**
	$X=(A(1))^{-1}\cdot(A(0))^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$3\circ 5=m(3-3)(5-3)+3=$	**3p**
	$=m\cdot 0\cdot 2+3=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$	**2p**

b)	$x \circ \frac{7}{2} = 2(x-3)\left(\frac{7}{2}-3\right)+3 = x-3+3 = x$, pentru orice $x \in M$	**2p**
	$\frac{7}{2} \circ x = 2\left(\frac{7}{2}-3\right)(x-3)+3 = x-3+3 = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$f(x \circ y) = 3+\sqrt{(x-3)(y-3)+3-3} = 3+\sqrt{(x-3)(y-3)} =$	**2p**
	$= 3+\left(3+\sqrt{x-3}-3\right)\left(3+\sqrt{y-3}-3\right) = \left(f(x)-3\right)\left(f(y)-3\right)+3 = f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x, y \in M$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}}{(x-1)^2} =$	**3p**
	$= 1+\frac{xe^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{x(x-1)}\right) = 1$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1,+\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_1^3 f(x)\left(x^2+1\right)^2 dx = \int_1^3 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2}-\frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{1}{x^2+1}\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n - I_{n+4} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}\left(1-x^4\right)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{n+1}\left(1-x^2\right)dx = \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right\|_0^1 - \left.\frac{x^{n+4}}{n+4}\right\|_0^1 = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4} =$ $= \frac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**