

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $0,5 + 10 \cdot (1 - 0,75) = 3$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 1$ . Arătați că  $f(m) + g(-m) = m$ , pentru orice număr real  $m$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{5x}$ .
- 5p 4. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A$ , acesta să fie divizor al lui 30.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,1)$ ,  $B(2,2)$  și  $C(4,0)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $B$ .
- 5p 6. Se consideră  $E(x) = 3 \cos^2 x - \cos \frac{x}{2} \cdot \sin x$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(6)) = 12$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A(4) \cdot A(4) = aA(4)$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale nenule, cu  $m < n$ , pentru care  $\det(A(m) + A(n)) = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy(x + y - xy)$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 3 = 3$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * 2 = -x^2$ .
- 5p c) Determinați numărul întreg nenul  $m$  pentru care  $\frac{1}{2m} * m = m$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - 3 \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3 \ln x}{x + 1} = 1$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3 \ln x$ , pentru orice  $x \in (0, 2]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^2 (f(x) - x^3) dx = 4$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x} dx = \frac{\ln 2}{3}$ .

**5p** c) Determinați  $a \in (-\infty, 0)$ , știind că  $\int_a^0 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx = 1 - a^3 e^{-a}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2024**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$0,5 + 10 \cdot (1 - 0,75) = 0,5 + 10 \cdot 0,25 = 0,5 + 2,5 = 3$	2p 3p
2.	$f(m) = 2m - 1$ , pentru orice număr real $m$ $g(-m) = -m + 1 \Rightarrow f(m) + g(-m) = 2m - 1 - m + 1 = m$ , pentru orice număr real $m$	2p 3p
3.	$x^2 + 6 = 5x$ , deci $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2$ sau $x = 3$ , care convin	2p 3p
4.	Mulțimea $A$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea $A$ sunt 5 divizori ai lui 30, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{9}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = 1$ $m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ , deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $B$	2p 3p
6.	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(6)) = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - (-12) \cdot 1 = 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$A(4) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , $A(4) \cdot A(4) = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = 2A(4)$ $aA(4) = 2A(4)$ , de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A(m) + A(n) = \begin{pmatrix} m+n & -2m-2n \\ 2 & m+n-12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(m) + A(n)) = (m+n)(m+n-8)$ , pentru orice numere naturale nenule $m$ și $n$ $(m+n)(m+n-8) = 0$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, cu $m < n$ , obținem perechile $(1, 7)$ , $(2, 6)$ și $(3, 5)$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 1 \cdot 3(1 + 3 - 1 \cdot 3) = 3 \cdot 1 = 3$	3p 2p
b)	$x * 2 = 2x(2 - x)$ , pentru orice număr real $x$ $2x(2 - x) = -x^2$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 4$	2p 3p

<b>c)</b>	$\frac{1}{2m} * m = \frac{2m^2 - m + 1}{4m}$ , pentru orice număr real nenul $m$	<b>2p</b>
	$\frac{2m^2 - m + 1}{4m} = m$ , deci $2m^2 + m - 1 = 0$ și, cum $m$ este număr întreg nenul, obținem $m = -1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2)}{x^2} - \frac{3}{x} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3 \ln x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$ ; pentru orice $x \in (0, 1]$ , $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ și pentru orice $x \in [1, 2]$ , $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 2]$ , de unde obținem $f(x) \leq f(1)$ , pentru orice $x \in (0, 2]$	<b>3p</b>
	$f(1) = -1$ , deci $\frac{x^2 - 2}{x} - 3 \ln x \leq -1$ , de unde obținem $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3 \ln x$ , pentru orice $x \in (0, 2]$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 (f(x) - x^3) dx = \int_0^2 (x + 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^2 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2^2}{2} + 2 = 4$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{\ln 2}{3}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_a^0 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx = \int_a^0 (e^{-x} f(x))' dx = e^{-x} f(x) \Big _a^0 = 1 - e^{-a} (a^3 + a + 1)$ , unde $a \in (-\infty, 0)$	<b>3p</b>
	$1 - e^{-a} (a^3 + a + 1) = 1 - a^3 e^{-a}$ , de unde obținem $a = -1$ , care convine	<b>2p</b>