

Gradul didactic II

Metodica predării matematicii  
Varianta 2

1. Considerăm funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + 2x - 3$ , unde  $a$  este un parametru real.

a) Pentru  $a = 1$  determinați mulțimea  $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{există } x \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } y = \frac{f(x)}{5 + f(x)} \right\}$ .

b) Determinați valorile  $a \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că pentru orice valoare  $x \in (-\infty, 1)$  are loc inegalitatea  $f(x) \leq 0$ . Prezentați o soluție completă, precum și un barem pe care l-ați utiliza la corectarea acestei probleme dacă ați da-o la o lucrare de control (punctajul posibil la această problemă este între 1 și 10 puncte).

c) Propuneți la clasă următoarea problemă:

*Determinați valorile  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția*

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{dacă } x < a \\ ax + 27 & \text{dacă } x \geq a \end{cases}$$

*este injectivă.*

Constatați că elevii din clasă nu au nicio idee de abordare. Descrieți un scenariu care să-i conducă pe elevi, pe baza unor întrebări ajutătoare relevante, la rezolvarea problemei. Prezentați respectiva rezolvare a problemei.

2. Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ , definit prin  $I_n = \int_0^1 \frac{nx^{n+1}}{x^{2n} + 1} dx$ .

a) Calculați  $I_1$  și  $I_2$ . Menționați două dificultăți pe care elevii le pot întâmpina în calculul integralei  $I_1$  și două greșeli pe care elevii le pot face în calculul integralei  $I_2$ .

b) Arătați că  $I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 2x \arctg(x^n) dx$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Considerăm următoarea problemă: *Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$* . Propuneți două exerciții ajutătoare (cu soluții) pentru rezolvarea cerinței. Apoi finalizați rezolvarea problemei inițiale.

3. Se propune elevilor următoarea problemă:

*(P) Fie un triunghi ABC neisoscel și ascuțitunghic. Fie B' piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea interioară a unghiului  $\angle BAC$ . Fie M și N mijloacele laturilor BC și AB. Demonstrați că punctele M, B' și N sunt coliniare.*

a) Construiți, folosind doar rigla și compasul, bisectoarea interioară a unui unghi dat și perpendiculara pe o dreaptă dată dintr-un punct exterior dreptei.

b) Doi elevi realizează corect figura de la problema (P). Primul elev observă însă că a obținut punctul B' în interiorul triunghiului ABC iar cel de-al doilea în exteriorul triunghiului ABC. Imaginați un dialog cu cei doi elevi pentru a le explica aceste situații.

c) În enunțul problemei (P) presupunem că  $AB < AC$ . Menționați câteva metode specifice de rezolvare pentru acest tip de probleme. Folosind una dintre metodele menționate, rezolvați complet problema.

*Toate subiectele sunt obligatorii.*