Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)=10$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3}=3^x$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2\le 23$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Arătați că perimetrul triunghiului OAB este egal cu 12.
5p	**6.** Arătați că $\left(1+2\cos 60^\circ\right)\cdot\sin 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=3$.
5p	**b)** Arătați că $B(8)-3B(2)=2A$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=3$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\frac{2}{3}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^2\frac{4x}{f(x)}dx=2\ln 3$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=f(n)-\frac{4}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=4\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2$	**2p**
	$f(1)=5\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=2\cdot 5=10$	**3p**
3.	$2x-3=x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $n^2\le 23$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$OA=3$, $OB=4$	**2p**
	$AB=5$, deci $P_{\Delta OAB}=3+4+5=12$	**3p**
6.	$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$(1+2\cos 60^\circ)\cdot\sin 30^\circ=\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-0\cdot 1=$	**3p**
	$=3-0=3$	**2p**
b)	$B(8)-3B(2)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-2X+3\Rightarrow f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1-2-2+3=0$	**2p**

b)	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$ și $x_1x_2x_3=-m \Rightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=-2-m$	**3p**
	$-2-m=1$, de unde obținem $m=-3$	**2p**
c)	$f(-2)=m-12$, pentru orice număr real m	**2p**
	$m-12=0$, de unde obținem $m=12$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)-1)\,dx=\int_0^1 2x^2dx=\left.\dfrac{2x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2\cdot 1^3}{3}-\dfrac{2\cdot 0^3}{3}=\dfrac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^2 \dfrac{4x}{f(x)}dx=\int_0^2\dfrac{4x}{2x^2+1}dx=\int_0^2\dfrac{(2x^2+1)'}{2x^2+1}dx=\ln(2x^2+1)\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\ln 9-\ln 1=2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{2}{x^2}+1\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(-\dfrac{2}{x}+x\right)'\cdot\ln x\,dx=\left(-\dfrac{2}{x}+x\right)\cdot\ln x\Big\|_1^e-\left(\dfrac{2}{x}+x\right)\Big\|_1^e=3-\dfrac{4}{e}$	**3p**
	$3-\dfrac{4}{e}=2n^2+1-\dfrac{4}{e}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**