Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 3$ și $a_5 = 23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A, care au cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(4,4)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overline{OA} = \overline{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 6$ și înălțimea $AD = 3$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y) - A(xy) = (x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x) = A(y)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 3$.

5p **b)** Pentru $m = 0$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3e^x}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_1^2 \left(f(x) - \ln(x+1)\right)dx = 9$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(x^2\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $a\pi+\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4r = a_5 - a_1 = 20$, deci $r = 5$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 28$	**2p**
2.	$f(m) = -1$, de unde obținem $m^2 - 6m + 9 = 0$	**3p**
	$m = 3$	**2p**
3.	$3^{2x-1} = 3^{x+3}$, de unde obținem $2x - 1 = x + 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	$C_5^1 + C_5^2 =$	**3p**
	$= 5 + 10 = 15$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = (x_C - 4)\vec{i} + (y_C - 4)\vec{j}$	**3p**
	$x_C = 7$ și $y_C = 5$	**2p**
6.	Triunghiul ADB este dreptunghic în D, deci $BD = 3\sqrt{3}$	**2p**
	$BC = 4\sqrt{3}$, deci $R = 2\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0$	**3p**
b)	$A(x) \cdot A(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y + x - 2 & 0 & y + x - 2 \\ -y - x + 2 & 0 & -y - x + 2 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= (y + x - 2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(-3) \cdot A(x) = A(-3x) + (x - 5)A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$A(-3x) + (x - 5)A(0) = A(y)$, de unde obținem $x = 5$ și $y = -15$	**3p**
2.a)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 6X + 2 \Rightarrow f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 =$	**3p**
	$= 1 + 2 - 8 + 6 + 2 = 3$	**2p**
b)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 = X^2(X^2 + 2X - 8)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -4$, $x_4 = 2$	**3p**
c)	Polinomul f are coeficienți raționali, deci $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f	**2p**
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$, unde x_3 și x_4 sunt celelalte rădăcini ale polinomului f, de unde obținem $x_3 + x_4 = -4$ și $x_3x_4 = 2$ și, cum $x_1x_2x_3x_4 = m$, rezultă $m = -4$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1\right)-3e^x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1-2x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{2x}}{4x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{3e^x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{x^2+x+1}{4x^2+2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$; pentru orice $x\in(0,1)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$; pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(0)=3$, $f(1)=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\ln(x+1)\right)dx=\int_1^2 6x\,dx=3x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
b)	$\int_0^{e-1}\dfrac{f(x)-6x}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\ln(x+1)\left(\ln(x+1)\right)'dx=\dfrac{\ln^2(x+1)}{2}\Big\vert_0^{e-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e}{2}-\dfrac{\ln^2 1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$g(x)=6x^2+\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^1\lvert g(x)\rvert dx=2x^3\Big\vert_0^1+\int_0^1 x'\ln\left(x^2+1\right)dx=2+\ln 2-\int_0^1\dfrac{2x^2}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=2+\ln 2-2x\Big\vert_0^1+2\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{2}+\ln 2$, deci $\dfrac{\pi}{2}+\ln 2=a\pi+\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**