Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $3-4i+i(4-i)=4$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-2x$. Arătați că $(f\circ f)(1)=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-2x+6\right)=\log_5 6$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(a,0)$ și $C(0,b)$. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC=10$ și $BC=16$. Arătați că $AD=6$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 2x+1\\ x-1 & 2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(B(2)\right)=4$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot\left(B(0)-3I_2\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX-3$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=0$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)^2$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}\,dx=20$.
5p	**b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 \frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}\,dx = \frac{e^2-5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3-4i+i(4-i)=3-4i+4i-i^2=$	**3p**
	$=3+1=4$	**2p**
2.	$f(1)=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=0$	**3p**
3.	$x^2-2x+6=6$, deci $x^2-2x=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 4 numere divizibile cu 3 și cu 7, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$	**3p**
	$a=2$ și $b=4$	**2p**
6.	Triunghiul ABD este dreptunghic în D și $BD=8$	**3p**
	$AD=\sqrt{100-64}=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(2)=\begin{pmatrix}3&5\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(2))=\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}=3\cdot3-5\cdot1=$	**3p**
	$=9-5=4$	**2p**
b)	$B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=2A$	**3p**
	$aA=2A$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x, $A\cdot(B(0)-3I_2)=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$f=X^3+2X^2-3\Rightarrow f(1)=1^3+2\cdot1^2-3=$	**3p**
	$=1+2-3=0$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+m(-1)-3=-m-2$	**3p**
	$-m-2=0$, de unde obținem $m=-2$	**2p**
c)	$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$x_1x_2x_3=3$, deci $m=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{6x\left(x^2+x-2\right)-3x^2(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3x^2-12x}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,4]$	**2p**
	$1<x\le 2\Rightarrow 1<x^2\le 4$, deci $f(x)\ge f(2)$ și $f\left(x^2\right)\ge f(4)$ și, cum $f(2)=3$ și $f(4)=\dfrac{8}{3}$, obținem $f(x)+f\left(x^2\right)\ge\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}dx=\int_3^7 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_3^7=$	**3p**
	$=\dfrac{49}{2}-\dfrac{9}{2}=20$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_2^3\frac{x}{f(x)}dx=\int_2^3\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}dx=-\frac{1}{x-1}\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1\frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx=\int_0^1 x\left(e^x-1\right)^2dx=\int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)'dx+\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=x\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)\Big\vert_0^1-\left(\dfrac{e^{2x}}{4}-2e^x\right)\Big\vert_0^1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-5}{4}$	**2p**