EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de patru ore.**

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu rația diferită de zero și $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, pentru orice număr natural nenul n.

7p **a)** Arătați că $2S_{25} = 25(a_5 + a_{21})$.

8p **b)** Determinați numerele a_1, a_3 și a_{10}, știind că acestea sunt în progresie geometrică în această ordine și că suma lor este egală cu 134.

2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul M aparținând laturii AB astfel încât $\Delta AMC \equiv \Delta DMB$.

7p **a)** Arătați că punctul M este mijlocul laturii AB.

8p **b)** Demonstrați că $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$, unde $AC \cap DB = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{N\}$.

3. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$, unde a și b sunt numere reale, $a - b \neq -2$.

7p **a)** Determinați numărul real b, știind că $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

8p **b)** Știind că rădăcinile x_1, x_2 și x_3 ale polinomului f sunt numere reale mai mari sau egale cu zero, demonstrați că $a + b \leq \frac{8}{27}$.

4. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$.

7p **a)** Arătați că $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

8p **b)** Se consideră numărul real $a \in (0,1)$. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_a^1 \frac{f(x^{2n})}{x^n} dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime - *Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor de numere reale* - *Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor făcând legătura între tipurile de intervale și submulțimile dreptei* - *Identificarea apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei*

2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei **-** *Reprezentarea pe axa numerelor a intersecției a două intervale* **-** *Reprezentarea pe axa numerelor a reuniunii a două intervale cu intersecția nevidă* **-** *Verificarea faptului că un număr este soluția unei inecuații* **-** *Verificarea apartenenței unui obiect la o mulțime pe baza unei/unor proprietăți a/ale elementelor acesteia*
3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$ **-** *Aproximarea numerelor reale pentru reprezentarea unor intervale* **-** *Reprezentarea unui interval sub forme echivalente (notație, reprezentarea pe axa numerelor)* **-** *Transformarea unei inecuații într-o inecuație echivalentă folosind proprietățile relației de ordine*
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații **-** *Utilizarea terminologiei specifice intervalelor de numere reale în contexte interdisciplinare* **-** *Rezolvarea unei inecuații de forma* $\lvert ax+b\rvert < c$, $(\leq)$, *unde* $a\in\mathbb{R}^*$, b, $c\in\mathbb{R}$ **-** *Selectarea, dintr-o mulțime dată, a elementelor care verifică o condiție suplimentară*
5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații **-** *Rezolvarea unor inecuații de forma* $ax+b<0$, $(>,\leq,\geq)$, unde $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ **-** *Descrierea mulțimii soluțiilor unei probleme printr-o proprietate care le caracterizează* **-** *Rezolvarea de inecuații de forma* $\frac{a}{bx+c}<0$, $(>,\leq,\geq)$, *unde* $a,b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$
6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații **-** *Estimarea erorii unui calcul aproximativ cu numere reale* **-** *Utilizarea de estimări pentru a compara/ordona numere reale în diferite contexte* **-** *Modelarea unei situații concrete utilizând inecuații studiate* **-** *Interpretarea soluțiilor unei inecuații în rezolvarea unor probleme concrete*

[...]

Domeniu de conținut	**Conținuturi**
Mulțimi. Numere	**1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$** • Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor • Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor • Inecuații de forma $ax+b\geq 0$, $(\leq,<,>)$, unde a, $b\in\mathbb{R}$

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată.*

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit în barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1.	**a)** $2S_{25} = 25(a_1 + a_{25}) =$	**3p**
	$= 25(a_5 - 4r + a_{21} + 4r) = 25(a_5 + a_{21})$, unde r este rația progresiei aritmetice	**4p**
	b) $a_3 = a_1 + 2r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ și, cum $a_3^2 = a_1 a_{10}$, obținem $(a_1 + 2r)^2 = a_1(a_1 + 9r)$	**3p**
	$4r^2 = 5a_1 r$ și, cum $r \neq 0$, obținem $4r = 5a_1$	**2p**
	Cum $a_1 + a_3 + a_{10} = 134$, obținem $a_1 = 8$, $a_3 = 28$ și $a_{10} = 98$	**3p**
2.	**a)** $\Delta AMC \equiv \Delta DMB \Rightarrow AC = DB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$	**4p**
	Triunghiurile AMD și BMC sunt isoscele cu vârful în M, deci $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$, de unde obținem $MA = MB$	**3p**
	b) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow OA = OB$ și, cum M este mijlocul lui AB, obținem $OM \perp AB$; ΔANB isoscel, punctul M este mijlocul lui $AB \Rightarrow NM \perp AB$, deci punctele N, O și M sunt coliniare	**3p**
	$MA = MC = MB \Rightarrow MC = \dfrac{AB}{2}$, deci triunghiul ACB este dreptunghic în C	**2p**
	$\Delta NCO \sim \Delta NMB \Rightarrow \dfrac{CN}{MN} = \dfrac{OC}{BM}$ și, cum $OC = OD$ și $BM = MD$, obținem $\dfrac{CN}{MN} = \dfrac{OD}{MD}$	**3p**
3.	**a)** $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$, $x_1x_2x_3 = -b$	**3p**
	$\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dfrac{1}{1+x_3} = \dfrac{3 + 2(x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{1 + (x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + x_1x_2x_3} = \dfrac{5+a}{2+a-b}$ și, cum $\dfrac{5+a}{2+a-b} = 1$, obținem $b = -3$	**4p**
	b) $a + b = f(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$	**2p**
	Cum x_1, x_2 și x_3 sunt numere reale mai mari sau egale cu zero și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, rezultă $1 - x_1 \geq 0$, $1 - x_2 \geq 0$ și $1 - x_3 \geq 0$	**2p**
	$\sqrt[3]{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \leq \dfrac{(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3)}{3} = \dfrac{2}{3}$, deci $a + b \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$	**4p**
4.	**a)** $g:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1) - x$, $g'(x) = \dfrac{-x}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$; pentru $x \in (-1,0]$, $g'(x) \geq 0$, deci funcția g este crescătoare pe $(-1,0]$; pentru $x \in [0,+\infty)$, $g'(x) \leq 0$, deci funcția g este descrescătoare pe $[0,+\infty)$	**4p**
	Cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$, deci $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1,+\infty)$	**3p**

	b) $0 < a \le x \le 1 \Rightarrow \frac{f\left(x^{2n}\right)}{x^n} \ge 0$, deci $I_n \ge 0$, pentru orice număr natural n	**3p**
	$f\left(x^{2n}\right) \le x^{2n}$, pentru orice $x \in [a,1]$, deci $I_n \le \int_a^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_a^1 = \frac{1}{n+1}\left(1-a^{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural n	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Itemul de tip completare elaborat:	
- menționarea competenței specifice evaluate	**1p**
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	**1p**
- respectarea formatului itemului	**2p**
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	**3p**
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	**3p**
Itemul de tip alegere multiplă elaborat:	
- menționarea competenței specifice evaluate	**1p**
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	**1p**
- respectarea formatului itemului	**2p**
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	**3p**
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	**3p**
Itemul de tip întrebare structurată elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate	**1p**
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	**1p**
- respectarea formatului itemului	**2p**
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	**3p**
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	**3p**