PROF. HORIA-GEORGE GEORGESCU

MATEMATICA DE GIMNAZIU

Notițe de teorie cu exemple și demonstrații

BUCUREȘTI
2023

horiageorgefmi@yahoo.com

PROF. HORIA-GEORGE GEORGESCU

Dimensiunea acestui document este de aprox. 25 MB.

Dacă doriți o variantă cu o claritate a imaginilor mai bună, căutați pe scribd.com sau contactați autorul.

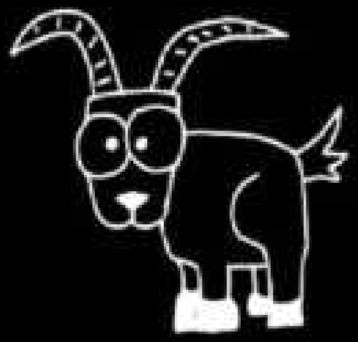
MATEMATICA DE GIMNAZIU

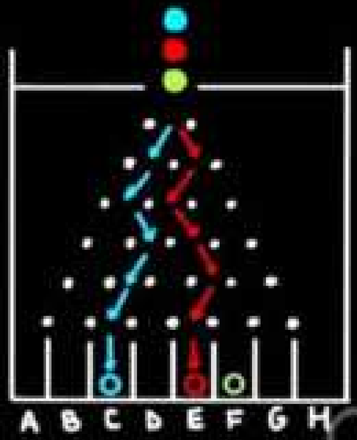
Notițe de teorie cu exemple și demonstrații

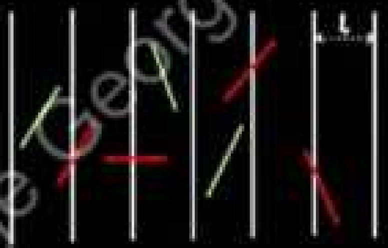
Posibila reușită vine dintr-o dorință adevărată și disciplină.

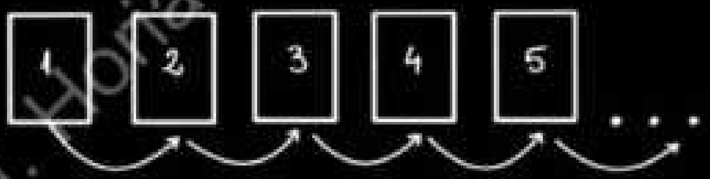
Cuprins

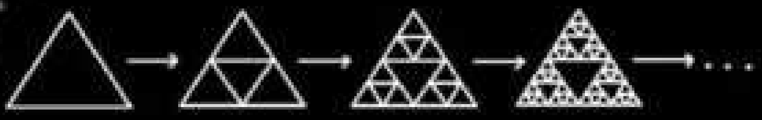
ALTE CONȚINUTURI

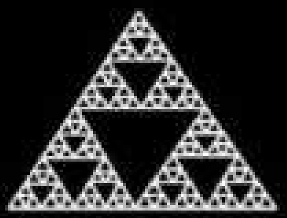












Introducere

Această lucrare reprezintă un material cu notițe personale. Documentul conține elemente de teorie fundamentală (nivel gimnazial), împreună cu exemple și demonstrații.

În plus, există subiecte care depășesc nivelul gimnazial, acestea având rolul să stârnească dorința de a cunoaște. Notițele sunt prezentate într-un mod organizat, dar nu reprezintă o sursă din care toate conceptele expuse să fie pe deplin înțelese.

Pentru o mai bună înțelegere este necesară studierea unor surse suplimentare (manuale, culegeri, notițele din timpul orelor de curs etc.)

Acest material a fost creat pentru utilizare în scopul personal al autorului în cadrul activității didactice, fiind o lucrare suport pentru elevi. Evident, noțiunile și rezultatele prezentate sunt clasice, multe dintre ele constituind subiecte fundamentale ale matematicii.

Materialul este unul informal.

Aceasta este o primă variantă. Eventualele modificări în vederea îmbunătățirii conținutului vor fi realizate în anul următor.

Contact: *horiageorgefmi@yahoo.com*

„Citiți-l pe Euler, citiți-l pe Euler!
El este profesorul nostru, al tuturor."

PIERRE-SIMON LAPLACE

HALL OF FAME

L. Euler H. Grassmann A. Cayley G. Cantor
Arhimede I. Newton G. Cardano H. Minkowski
F. Viète G. W. Leibniz F. Bernstein A. Möbius Thales
D. Hilbert A. Markov E. Galois L. Fibonacci P. Cebâşev
B. Knaster J. Hadamard E. Cartan
Fermat S. Banach N. Copernic
J. Stirling M. Rolle S. Sobolev
O. Stolz E. Cesaro B. Riemann T. Bayes
F. Hausdorff Euclid Charles C. Goldbach J. Wallis
G. Monge H. Schwarz F. Klein C. Jordan
J. Nash J. Kepler E. Borel B. Pascal Poisson
K. Gödel K. F. Gauss Frenet Eratostene K. Weierstrass
E. Noether
A. Kolmogorov Dirichlet Pitagora J. Sylvester Heron
J. Fourier A. De Morgan J. D'Alembert E. Picard
P. Erdös B. Christoffel Bernoulli
R. Dedekind J. G. Darboux A. L. Cauchy H. Poincaré
J. Liouville Koch W. Sierpinski R. Descartes
J. von Neumann S. Ramanujan B. Taylor
B. Mandelbrot
G. Fubini J. L. Lagrange O. Hesse B. Bolzano
L. Kronecker
H. Lebesgue D. Pompeiu S. Hart
P. S. Laplace G. Galilei
M. Lie Ricci G. Ţiţeica G. Cramer R. Lipschitz
C. Hermite E. Bézout
A. M. Legendre
J. Wilson A. Turing Levi-Civita I. Barbu Ptolemeu
Jacobi S. Stoilow G. Peano H. Lorentz Brahmagupta
G. Boole C. Villani G. Eisenstein N. Lobacevski

„Il est bien plus difficile de se juger soi-même
que de juger autrui."

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

Horia-George Georgescu

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

$$\mathbb{N}$$

Scrierea și citirea numerelor naturale
Axa numerelor naturale
Compararea numerelor naturale. Aproximări

Șirul numerelor naturale conține numerele folosite atunci când numărăm obiecte: 0, 1, 2, 3, 4, ..., 100, 101, ..., 523, 524, ... etc.

Cifrele sunt simboluri cu ajutorul cărora scriem numere naturale. O succesiune de cifre reprezintă scrierea unui număr natural.

Obs. Dacă un număr natural are cel puțin două cifre, atunci prima cifră nu poate să fie 0.

În sistemul zecimal (baza 10), zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare.

Cifrele din sistemul zecimal sunt:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

Pentru citirea numerelor naturale este necesară gruparea cifrelor în grupe de câte trei cifre de la dreapta la stânga. Aceste grupe s.n. clase.

Exemplu:

miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	milioane	sute de mii	zeci de mii	mii	sute	zeci	unități
2	1	2	5	7	0	8	5	1	8
clasa miliardelor	clasa milioanelor			clasa miilor			clasa unităților		

Citim:

„două miliarde o sută douăzeci și cinci de milioane șapte sute opt mii cinci sute optsprezece"

Descompunerea în baza 10

Orice număr natural se descompune în mod unic în sumă de produse între fiecare cifră şi numărul care indică ordinul cifrei respective.

Exemplu. $325 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$

În general, avem:

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \text{ etc.}$$

Obs. De la a la b sunt $b-a+1$ numere naturale.

Exemplu. De la 10 la 21 sunt $21-10+1=12$ numere naturale.

Obs. Un număr natural este par dacă se poate scrie sub forma $2K$, unde K este un număr natural.

Obs. Un număr natural este impar dacă se poate scrie sub forma $2K+1$, unde K este un număr natural.

Obs. Mulţimea numerelor naturale se poate partiţiona în $2K, 2K+1$ sau $3K, 3K+1, 3K+2$ sau $4K, 4K+1, 4K+2, 4K+3$ etc., unde K este număr natural.

Def. Axa numerelor naturale este o dreaptă pe care fixăm un punct (denumit originea axei), un sens de deplasare (de la stânga la dreapta) şi un segment denumit unitate de măsură.

Def. Fiecărui număr natural îi corespunde pe axă un punct, iar numărul respectiv s.n. coordonata punctului.

Def. Originea axei se notează în general cu „O" și are coordonata 0 (zero).

Exemplu: Punctul B are coordonata 2.
Scriem B(2); M(4); A(1) etc.

Compararea numerelor naturale (=, <, ≤, >, ≥)

Obs. Dacă două numere naturale au un număr diferit de cifre, atunci este mai mare numărul format din mai multe cifre.

Exemplu. $21213 > 2123$

Obs. Dacă două numere naturale au același număr de cifre și dorim să le comparăm, procedăm în felul următor:

Comparăm cifrele de pe fiecare ordin de la stânga la dreapta și când găsim prima cifră mai mare, atunci numărul care are respectiva cifră (mai mare) este mai mare decât celălalt număr.

Exemplu. $21\underset{\sim}{7}65 > 21\underset{\sim}{5}65$

Obs. Dintre două numere naturale este mai mare cel care se află în dreapta pe axa numerelor naturale.

Aproximări

Considerăm următoarele notații (prescurtări):

Aproximarea prin lipsă a unui număr natural
- la ordinul zecilor $\underline{a}_z$
- la ordinul sutelor $\underline{a}_s$
- la ordinul miilor $\underline{a}_m$

Aproximarea prin adaos a unui număr natural
- la ordinul zecilor $\overline{a}_z$
- la ordinul sutelor $\overline{a}_s$
- la ordinul miilor $\overline{a}_m$

Rotunjirea unui număr natural
- la ordinul zecilor: r_z
- la ordinul sutelor: r_s
- la ordinul miilor: r_m

Def. $\underline{a}_z / \underline{a}_s / \underline{a}_m$ este cel mai mare număr format din zeci/sute/mii mai mic sau egal cu numărul respectiv.

Exemplu. $\underline{a}_z(125) = 120$, deci $125 \approx 120$

Def. $\overline{a}_z / \overline{a}_s / \overline{a}_m$ este cel mai mic număr natural format din zeci/sute/mii mai mare strict decât numărul respectiv.

Exemplu. $\overline{a}_s(1235) = 1300$, deci $1235 \approx 1300$

Def. $r_z / r_s / r_m$ este aproximarea prin lipsă sau prin adaos cea mai apropiată de numărul respectiv. Dacă ambele aproximări sunt la fel de apropiate de număr, atunci se consideră drept rotunjire aproximarea prin adaos.

Exemple. $r_z(2137) = 2140$; $r_s(2150) = 2200$.
$r_s(1721) = 1700$;

Obs.
$\overline{a}_z(n) - \underline{a}_z(n) = 10$;
$\overline{a}_s(n) - \underline{a}_s(n) = 100$;
$\overline{a}_m(n) - \underline{a}_m(n) = 1000$;

Exemplu.
$n = 1356$;
$\overline{a}_s(1356) = 1400$;
$\underline{a}_s(1356) = 1300$;
$1400 - 1300 = 100$.

Adunarea numerelor naturale

Forma generală: $T_1 + T_2 = S$

termeni

sumă

Proprietățile adunării:

(i) Comutativitatea

„oricare” (orice)

$$a + b = b + a, \quad \forall\, a, b \text{ nr. naturale}$$

Ex: $2 + 3 = 3 + 2$

(ii) Asociativitatea

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall\, a, b, c \text{ nr. naturale}$$

Ex:

$(2+7)+98 = 9+98 = 107$

$2+(7+98) = 2+105 = 107$

$2+7+98 = 100+7 = 107$

$3+95+197+5 = (3+197)+(95+5)$

$= 200+100 = 300.$

(iii) Existența elementului neutru (0)

$$a+0 = 0+a = a, \quad \forall\, a \text{ nr. natural}$$

Ex: $2+0 = 0+2 = 2.$

Sume Gauss (K.F. Gauss)

I. Suma primelor n numere naturale nenule

Ex: $S = 1+2+3+\ldots+100$

$S = 1+2+3+\ldots+98+99+100$

$S = 100+99+98+\ldots+3+2+1$

$\oplus\; 2\cdot S = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$

$$2\cdot S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ de termeni}}$$

$$2\cdot S = 101\cdot 100 \Rightarrow S = (101\cdot 100) : 2 = 5050.$$

Formula generală:

$S = 1+2+3+\ldots+n$, n nr. natural

$$S = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$S = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$
$$\oplus$$
$$2S = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)$$
$$2\cdot S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n \text{ termeni}}$$

$$2S = n\cdot(n+1) \Rightarrow S = n\cdot(n+1):2$$

$$\boxed{S = 1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1):2 = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exemplu.

$$S = 1+2+3+\ldots+57 = 57\cdot(57+1):2$$
$$= 57\cdot 58:2 = 1653$$

Ⓘⓘ Suma Gauss „incompletă"

Ex.1: $S = 38+39+\ldots+95$

$S_c = 1+2+3+\ldots+36+37+38+39+\ldots+95$

„suma completă"

$S_c = 95\cdot\underbrace{96:2} = 95\cdot 48 = 4560$

$S = 1+2+3+\ldots+36+37+38+39+\ldots+95 -$
$(1+2+3+\ldots+36+37)$

$1+2+3+\ldots+36+37 = 37\cdot 38:2 = 703$

$S = 4560 - 703 = 3857$

III Sumă de numere pare consecutive

Ex: $S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 106$

Obs. Un număr par este de forma $2 \cdot K$, unde K este număr natural.

$$S = \underline{\underline{2}} \cdot 1 + \underline{2} \cdot 2 + \underline{2} \cdot 3 + \ldots + \underline{\underline{2}} \cdot 53$$

$$S = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 53) = 2 \cdot 53 \cdot 54 : 2 = 53 \cdot 54 = 2862$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 53 = 53 \cdot (53 + 1) : 2$$

IV Sumă de numere impare consecutive

Ex: $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 65$

Obs. Un număr impar este de forma $2 \cdot K + 1$, unde K este număr natural.

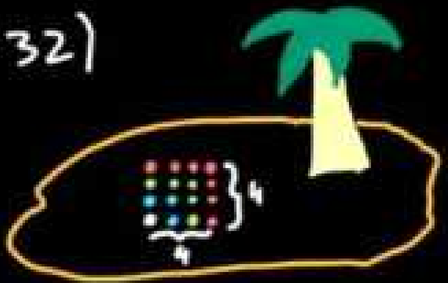
$$S = 2 \cdot 0 + \underline{1} + 2 \cdot 1 + \underline{1} + 2 \cdot 2 + \underline{1} + 2 \cdot 3 + \underline{1} + \ldots + 2 \cdot 32 + \underline{1}$$

$$S = 33 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 32$$

$$S = 33 + 2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 32)$$

$$S = 33 + \cancel{2} \cdot 32 \cdot 33 : \cancel{2}$$

$$S = 33 + 32 \cdot 33 = 33 \cdot 33 = 1089$$



Scăderea numerelor naturale

Forma generală: $\underset{\text{descăzut}}{D} - \underset{\text{scăzător}}{S} = \underset{\text{diferență}}{Dif}$

Exemplu: $10 - 3 = 7$, deoarece $7 + 3 = 10$

Obs. $D \geq S$

$D - S = Dif$

$D = Dif + S$; $S = D - Dif$;

Exemplu. $\overset{D}{7} - \overset{S}{3} = \overset{Dif}{4}$

$7 = 4 + 3$; $3 = 7 - 4$;

Înmulțirea numerelor naturale

Forma generală: $\underset{\text{factor}}{a} \cdot \underset{\text{factor}}{b} = \underset{\text{produs}}{P}$

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

(i) Comutativitatea

$a \cdot b = b \cdot c$, $\forall a, b$ numere naturale

Exemplu: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$

(ii) Asociativitatea

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c$ numere naturale

Exemplu: $(3 \cdot 2)5 = 6 \cdot 5 = 30$; $3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = 30$

(iii) Existenta elementului neutru (1)

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a$ număr natural

Exemplu: $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$.

(iv) Distributivitatea înmulțirii față de adunare și față de scădere

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall a, b, c$ numere naturale

$a \cdot (b - c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall a, b, c$ numere naturale $b \geq c$

Exemplu: $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16$

$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$.

Obs. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Obs. $a \cdot b = 0$ dacă $a = 0$ sau $b = 0$.

Factorul comun

Scriind „invers" relațiile de la proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare și față de scădere, obținem:

$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c), \ \forall a,b,c \text{ numere naturale}$$

$$a\cdot b - a\cdot c = a(b-c), \ \forall a,b,c \text{ numere naturale cu } b \geq c.$$

În ambele formule de mai sus spunem că l-am scos pe a factor comun.

Exemple: $2\cdot 5 + 2\cdot 7 = 2\cdot(5+7)$

$7\cdot 4 - 7\cdot 2 = 7\cdot(4-2)$

$3\cdot 5 + 3\cdot 7 - 3 = 3(5+7-1).$

Împărțirea numerelor naturale

① Împărțirea cu rest 0

Forma generală: $D : \uparrow = C$, $\uparrow \neq 0$

deîmpărțit împărțitor cât

Obs. Împărțirea la 0 nu are sens.

$$\left.\begin{array}{l} D : C = \uparrow \\ D = \uparrow \cdot C \end{array}\right\}$$ aflarea unor termeni dintr-o împărțire cu rest 0 (proba împărțirii)

Exemplu: $\overset{D}{10} : \overset{\uparrow}{5} = \overset{C}{2}$

$10 : 2 = 5$

$10 = 5\cdot 2$

② Împărțirea cu rest diferit de 0

Forma generală: $D : \uparrow = C$, rest R, $\uparrow \neq 0$

deîmpărțit împărțitor cât rest

Teorema împărțirii cu rest.

$$D = Î\cdot C + R, \quad \begin{matrix} Î \neq 0 \\ R < Î \end{matrix}$$

Exemplu: $\overset{D}{25} : \overset{Î}{7} = \overset{C}{3}$, rest $\overset{R}{4}$

$$25 = 7\cdot 3 + 4$$

Partiționarea mulțimii numerelor naturale

Toate numerele naturale sunt de forma $nk, nk+1, nk+2, \ldots, nk+(n-1)$.

Exemple. i) Partiționarea par-impar: $2k, 2k+1$;
ii) $3k, 3k+1, 3k+2$;
iii) $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$.

Puteri

Puterea cu exponent număr natural a unui număr natural

Def. Fie a și b două numere naturale, $n \geq 1$.

Ridicarea la puterea n a numărului a se scrie a^n și este dată de relația:

$$a^n := \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

În scrierea a^n, a s.n. bază, n s.n. exponent (putere) și citim „a la puterea n" sau, pe scurt, „a la n".

Exemple: $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ Citim: „2 la a treia este egal cu 8"

$7^2 = 7\cdot 7 = 49$ Citim: „7 la a doua este egal cu 49"

$$\underset{\text{baza}}{3}^{\overset{\text{exponent}}{4}} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81$$

Obs. $a^1 = a$, pentru orice a număr natural

Exemplu: $5^1 = 5$.

$a^0 = 1$, pentru orice a număr natural nenul

Exemplu: $6^0 = 1$;

Obs. 0^0 nu are sens

Reguli de calcul cu puteri

(i) Când înmulțim două puteri care au aceeași bază, păstrăm baza la rezultat și adunăm exponenții.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \forall a, m, n \text{ numere naturale}$$

Justificare:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}}^{m+n \text{ factori}} = a^{m+n}$$

Exemplu: $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$

(ii) Când împărțim două puteri care au aceeași bază, păstrăm baza la rezultat și scădem exponenții.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \forall a, m, n \text{ numere naturale}$$

Exemplu: $7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$

(iii) Când ridicăm o putere la o altă putere, păstrăm baza și înmulțim exponenții.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad \forall a, m, n \text{ numere naturale}$$

Justificare:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ factori}} = a^{m \cdot n}$$

Exemplu: $(3^3)^7 = 3^{3 \cdot 7} = 3^{21}$

Obs.

$(a^m)^n \neq a^{m^n}$

$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$

$(2^3)^2 = 2^6$; $2^{3^2} = 2^9$;

(iv) Când înmulțim două puteri care au același exponent, ridicăm produsul bazelor la acel exponent.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad \forall a, b, n \text{ numere naturale}$$

Exemple: $2^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 7)^3 = 14^3$; $(3 \cdot 5)^7 = 3^7 \cdot 5^7$

(v) Când împărțim două puteri care au același exponent, ridicăm câtul bazelor la acel exponent.

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \quad \forall a, b, n \text{ numere naturale}$$

Exemple: $8^3 : 4^3 = (8:4)^3 = 2^3$; $(6:3)^7 = 6^7 : 3^7$;

Sume de puteri

Forma generală: $S = 1+a+a^2+\ldots+a^n$, unde a și n sunt numere naturale nenule și $a \geq 2$.

Exemplu:

(Problema tablei de șah și a boabelor de grâu)

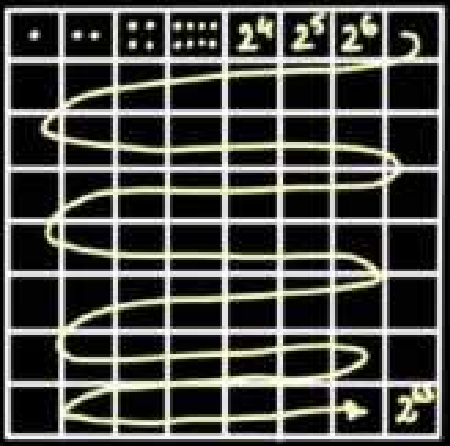
Calculați: $S = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$

$$S = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63} \mid \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$2S = 2(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}) \Leftrightarrow$$

$$2S = \underbrace{2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}}_{\overset{\shortparallel}{S-1}}+2^{64} \Leftrightarrow$$

$$2S = S-1+2^{64} \Rightarrow S = 2^{64}-1$$



Legenda șahului (Persia)

Generalizare:

$$S = 1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n, \quad a, n \in \mathbb{N}^*, \; a \geq 2.$$

$$S = 1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n \mid \cdot a \Leftrightarrow$$

$$aS = a(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n) \Leftrightarrow$$

$$aS = \underbrace{a+a^2+a^3+\ldots+a^n}_{\overset{\shortparallel}{S-1}}+a^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$aS = a^{n+1}+S-1 \Leftrightarrow aS-S = a^{n+1}-1$$

$$\Leftrightarrow S(a-1) = a^{n+1}-1 \Leftrightarrow S = (a^{n+1}-1):(a-1).$$

Compararea puterilor

Obs. Dintre două puteri care au aceeași bază este mai mare puterea cu exponentul mai mare.

Dacă $m < n$, atunci $a^m < a^n$, $a \geq 2$.

Exemplu: $17^{20} < 17^{25}$

Obs. Dintre două puteri care au același exponent (nenul) este mai mare puterea cu baza mai mare.

Dacă $a < b$, atunci $a^m < b^m$, $a, b \geq 2$

Exemplu: $2^{200} < 3^{200}$

Obs. Dacă puterile nu au aceeași bază sau același exponent căutăm să le aducem la aceeași bază sau la același exponent.

Uneori este nevoie să comparăm cu o putere intermediară.

Exemple:

$$\left.\begin{aligned} 27^{84} &= (3^3)^{84} = 3^{252} \\ 9^{130} &= (3^2)^{130} = 3^{260} \\ 3^{252} &< 3^{260} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 27^{84} < 9^{130}$$

$$\left.\begin{aligned} 5^{22} &= (5^2)^{11} = 25^{11} \\ 2^{55} &= (2^5)^{11} = 32^{11} \\ 25^{11} &< 32^{11} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5^{22} < 2^{55}.$$

Pătrate perfecte

Def. Fie a un număr natural. a^2 se numește pătratul numărului a.

Exemplu: Pătratul numărului 7 este 7^2, adică 49.

Def. Un număr natural s.n. pătrat perfect dacă se poate scrie ca pătratul unui număr natural.

Exemple: 64 este pătrat perfect deoarece $64=8^2$.

Sirul pătratelor perfecte: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, …, K^2, …, unde K este număr natural.

$2^{70}=(2^{35})^2$; $3^{12}=(3^6)^2$;

Obs. Dacă un număr natural este pătrat perfect, atunci ultima sa cifră este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Consecință. Dacă un număr natural se termină în 2, 3, 7 sau 8 atunci numărul respectiv nu este pătrat perfect.

Exemplu: 81778 nu este pătrat perfect

Obs. Dacă un număr se termină în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 nu putem să ne pronunțăm dacă este p.p doar cu această informație (vezi $25=5^2$, dar 15 nu este p.p).

Obs. Dacă un număr natural se află între două pătrate perfecte consecutive, atunci numărul respectiv nu este pătrat perfect.

Exemplu: 151 nu este pătrat perfect deoarece se află între $12^2=144$ și $13^2=169$.

Cuburi perfecte

Def. Fie a un număr natural. a^3 se numește cubul numărului a.

Exemplu: Cubul numărului 5 este 5^3, adică 125.

Def. Un număr natural s.n. cub perfect dacă se poate scrie ca fiind cubul unui număr natural.

Exemplu: 8 este cub perfect deoarece $8=2^3$.

Ultima cifră a unui număr natural

Fie n un număr natural. Notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n.

Exemple. $u(21)=1$; $u(725)=5$; $u(10^{216})=0$.

Proprietăți:

(i) $u(a+b)=u(u(a)+u(b))$

Exemplu: $u(2167+129)=u(u(2167)+u(129))$
$=u(7+9)=u(16)=6.$

(ii) $u(a\cdot b)=u(u(a)\cdot u(b))$

Exemplu: $u(213\cdot 1266)=u(u(213)\cdot u(1266))$
$=u(3\cdot 6)=u(18)=8.$

(iii) $u(a^n)=u(u(a)^n)$

Exemplu: $u(1005^{1006})=u(u(1005)^{1006})=u(5^{1006})$.

Ultima cifră a unei puteri a^n, unde $a\in\mathbb{N}$ și $n\in\mathbb{N}^*$

Obs. $u(1^n)=1$; $u(5^n)=5$; $u(6^n)=6$; $u(10^n)=0$.

Exemple: $u(1^{2010})=1$; $u(5^{173})=5$; $u(6^{123})=6$.

Obs.

$u(2^1)=2$; $u(2^2)=u(4)=4$; $u(2^3)=u(8)=8$; $u(2^4)=u(16)=6$;
$u(2^5)=u(32)=2$; $u(2^6)=u(64)=4$; $u(2^7)=u(128)=8$; $u(2^8)=u(256)=6$.

....

$$\text{Așadar, } u(2^n)=\begin{cases}2, & \text{dacă } n=4k+1 \text{ (rest 1)}\\ 4, & \text{dacă } n=4k+2 \text{ (rest 2)}\\ 8, & \text{dacă } n=4k+3 \text{ (rest 3)}\\ 6, & \text{dacă } n=4k \text{ (rest 0)}\end{cases}$$

Exemplu: $u(2^{1006})=u(2^{4\cdot 251+2})=u(2^{4\cdot 251}\cdot 2^2)$
$=u(u((2^4)^{251})\cdot u(2^2))=u(u(16^{251})\cdot u(4))$
$=u(u(6^{251})\cdot 4)=u(6\cdot 4)=u(24)=4$

Obs. $2\to 4\to 8\to 6$ (de 251 ori)
$2\to \underline{4}$ (STOP)
sau direct „:
$1006=4\cdot 251+2 \Rightarrow u(2^{1006})=\underline{4}.$

Obs. $u(4^n) = u((2^2)^n) = u(2^{2n})$;

$u(8^n) = u((2^3)^n) = u(2^{3n})$;

Exemple. $u(4^{105}) = u((2^2)^{105}) = u(2^{210})$

$u(8^{107}) = u((2^3)^{107}) = u(2^{321})$.

Obs.

$u(3^1) = 3$; $u(3^2) = 9$; $u(3^3) = 7$; $u(3^4) = 1$

$u(3^5) = 3 \ldots.$

Așadar, $u(3^n) = \begin{cases} 3, \text{ dacă } n = 4k+1 \\ 9, \text{ dacă } n = 4k+2 \\ 7, \text{ dacă } n = 4k+3 \\ 1, \text{ dacă } n = 4k \end{cases}$

Exemplu. $u(3^{121}) = u(3^{4\cdot 30+1}) = 3$, doarece $121 = 4\cdot \underbrace{30}_{k} + 1$.

Obs. $u(9^n) = u((3^2)^n) = u(3^{2n})$.

Exemplu. $u(9^{101}) = u((3^2)^{101}) = u(3^{202})$.

Obs.

$u(7^1) = 7$; $u(7^2) = 9$; $u(7^3) = 3$; $u(7^4) = 1$;

$u(7^5) = 7 \ldots.$

Așadar, $u(7^n) = \begin{cases} 7, \text{ dacă } n = 4k+1 \\ 9, \text{ dacă } n = 4k+2 \\ 3, \text{ dacă } n = 4k+3 \\ 1, \text{ dacă } n = 4k \end{cases}$

Exemplu. $u(7^{83}) = u(7^{4\cdot 20+3}) = 3$, deoarece $83 = 4\cdot \underbrace{20}_{k} + 3$.

Ordinea efectuării operațiilor

Operațiile algebrice se clasifică astfel:

- de ordinul al III-lea: ridicarea la putere și radicalul;
- de ordinul al II-lea: înmulțirea și împărțirea;
- de ordinul I: adunarea și scăderea.

Dacă într-un calcul apar doar operații de același ordin, atunci acestea se vor efectua în ordinea în care sunt scrise (de la stânga la dreapta).

Exemple:

$2+3-1=5-1=4;$

$15:3\cdot 5=5\cdot 5=25;$

Dacă într-un exercițiu apar operații de ordine diferite se efectuează întâi operațiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al doilea și într-un final cele de ordinul I.

Exemplu:

$2\cdot 3^2+2\cdot 5-8:4=2\cdot 9+10-2$

$=18+10-2=28-2=26.$

Dacă exercițiul conține toate tipurile de paranteze se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (pătrate) și în final operațiile din acolade (cu alte cuvinte „din interior spre exterior”), respectând în fiecare din ele ordinea efectuării operațiilor.

Exemplu:

$1+2\cdot\{3+4\cdot[5\cdot6-7\cdot(2^3-20:5)+5]\}=$

$1+2\cdot\{3+4\cdot[30-7\cdot(8-4)+5]\}=$

$1+2\cdot[3+4\cdot(30-7\cdot4+5)]=$

$1+2\cdot[3+4\cdot(30-28+5)]=$

$1+2\cdot(3+4\cdot7)=$

$1+2\cdot(3+28)=$

$1+2\cdot31=$

$1+62=63.$

Scrierea în baza 2
(Sistemul de numerație binar)

Scrierea în baza 10

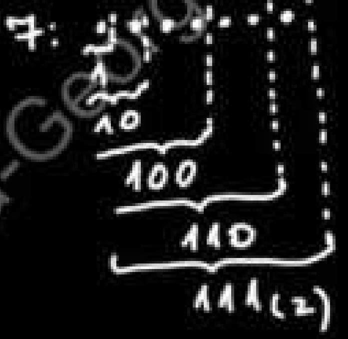
- Cifre folosite: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Zece unități de un ordin formează o unitate de ordin superior.

Scrierea în baza 2

- Cifre folosite: 0 și 1
- Două unități de un ordin formează o unitate de ordin superior.

Conversia din baza 10 în baza 2

$7 = ?_{(2)}$

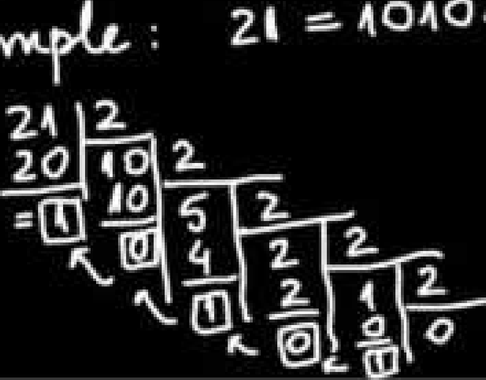


Algoritm

Ⓘ Pentru a transforma un număr din baza 10 în baza 2 împărțim numărul la 2 și apoi câturile obținute tot la 2 până când obținem câtul 0.

Ⓘⓘ Scriem resturile în ordine inversă.

Exemple: $21 = 10101_{(2)}$



$37 = 100101_{(2)}$

37 : 2 = 18, rest 1
18 : 2 = 9, rest 0
9 : 2 = 4, rest 1
4 : 2 = 2, rest 0
2 : 2 = 1, rest 0
1 : 2 = 0, rest 1

Conversia din baza 2 în baza 10

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}_{(2)} = a_1\cdot 2^{n-1} + a_2\cdot 2^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\cdot 2^1 + a_n\cdot 2^0$$

Exemplu: $\overline{a\underbrace{bcd}_{3}}_{(2)} = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2^1 + d\cdot 2^0$

$$10101_{(2)} = 1\cdot 2^4 + \underbrace{0\cdot 2^3}_{\overset{\|}{0}} + 1\cdot 2^2 + \underbrace{0\cdot 2^1}_{\overset{\|}{0}} + 1\cdot 2^0$$

$$= 16+4+1 = 21.$$

Exemple de probleme care se rezolvă prin metode aritmetice clasice

I. Principiul lui Dirichlet (Principiul cutiei)

Principiul lui Dirichlet are la bază o observație matematică simplă:

Dacă avem n cutii și n+1 obiecte, atunci există cel puțin o cutie care conține două obiecte.

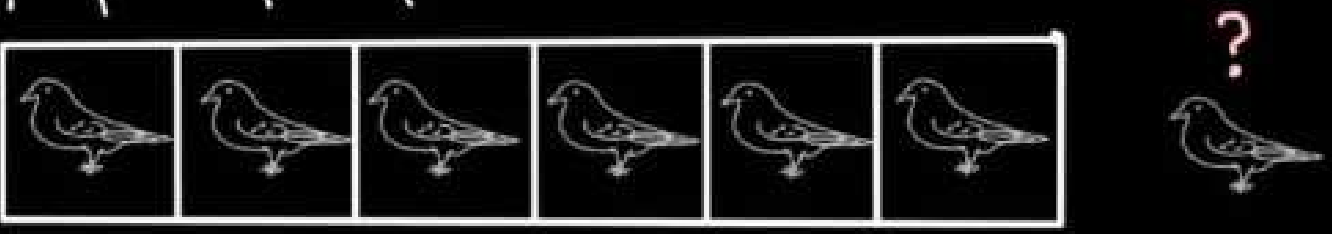
Exemple:

ⓘ Considerăm că avem 6 cuști și 7 porumbei. Demonstrați că există o cușcă cu cel puțin doi porumbei.

Evident, punând 6 porumbei în cuști diferite, al șaptelea va fi pus într-o cușcă alături de un alt porumbel.

Conform principiului cutiei rezultă concluzia.

Obs. Principiul lui Dirichlet (cutiei) se mai numește și principiul porumbeilor.



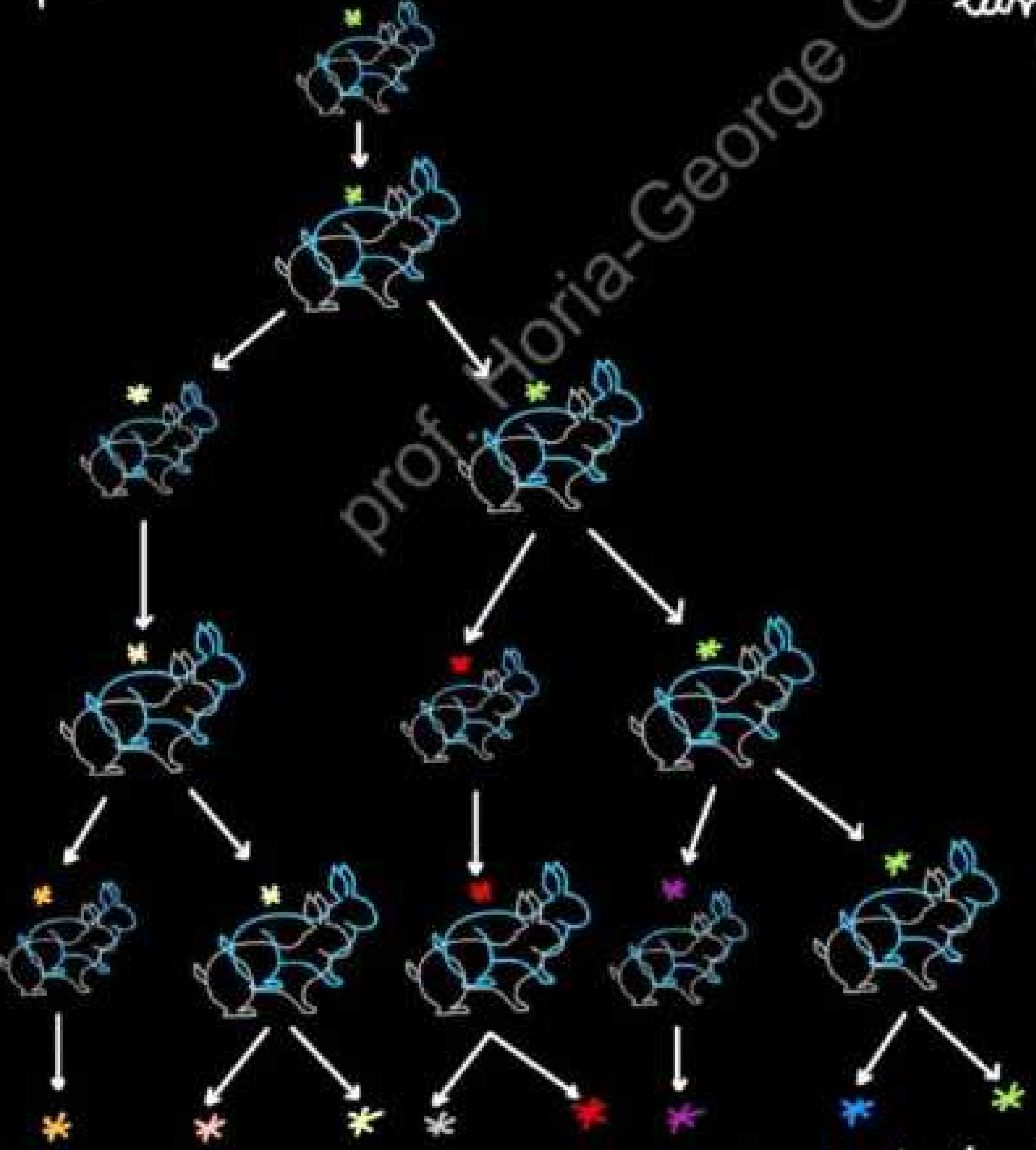
(ii) Într-o clasă cu 25 de elevi cel puțin trei elevi sunt născuți în aceași lună. (25 obiecte și 12 cutii)

II. Problema iepurilor și șirul lui Fibonacci

Pentru început avem o pereche de iepurași. Fiecare pereche produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri care ajunge la maturitate într-o lună și produce la rândul ei o altă pereche de iepuri ș.a.m.d..

Câte perechi de iepuri vor fi după n luni?

(Problemă propusă de Împăratul Frederik al II-lea la un concurs de matematică la care a participat și Leonardo Fibonacci, Pisa)



Numărul lunilor	Numărul perechilor
0	1 *
1	1 *
2	2 **
3	3 ***
4	5 *****
5	8 ********

Obținem șirul lui Fibonacci:

$F_0 = 1; F_1 = 1; F_2 = 2; F_3 = 3; F_4 = 5; F_5 = 8; F_6 = 13$

... .

$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$;

În concluzie, după n luni vom avea F_n perechi de iepuri.

Obs. Problema a apărut în 1202 în Liber Abaci și presupune un model matematic ideal, ignorând caracterul biologic nerealist.

III. Sume utile în anumite exerciții și probleme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

IV. Regula produsului

Câte ținute poate să-și alcătuiască o doamnă care are 3 perechi de pantofi, 5 fuste și 4 bluze? (Ignorăm eventuala asortare a culorilor)

Pentru fiecare bluză dintre cele 4 avem 5 variante de fuste, iar pentru fiecare ținută de tip bluză - fustă avem 3 variante de perechi de pantofi.

În total, obținem $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ de ținute.

V. Metoda reducerii la unitate și regula de trei simplă

Cazul I. Mărimi direct proporționale (Reducerea la unitate prin împărțire)

Patru pixuri costă 12 lei. Cât costă opt pixuri de același fel?

Met I. (Reducerea la unitate)

Cât costă un pix?

$12 : 4 = 3$ lei

Cât costă opt pixuri?

$3 \cdot 8 = 24$ lei.

Met II. (Regula de trei simplă)

:4 pixuri . . . . . 12 lei

8 pixuri . . . . . x lei

$x = 8 \cdot 12 : 4 = 96 : 4 = 24$ lei

Met III. (Comparăm datele din problemă).

Dacă patru pixuri costă 12 lei, atunci 8 pixuri costă de două ori mai mult, adică 24 lei.

Cazul II. Mărimi invers proporționale (Reducerea la unitate prin înmulțire)

Patru robinete cu același debit umplu un bazin în 12 ore. În câte ore vor umple bazinul opt robinete?

Met I (Reducerea la unitate)

În câte ore umple un robinet bazinul?

$4 \cdot 12 = 48$ ore.

În câte ore umplu bazinul opt robinete?

$48 : 8 = 6$ ore.

Met II (Regula de trei simplă)

4 robinete . . . : . . . 12 ore

: 8 robinete . . . . . x ore

$x = 4 \cdot 12 : 8 = 48 : 8 = 6$ ore

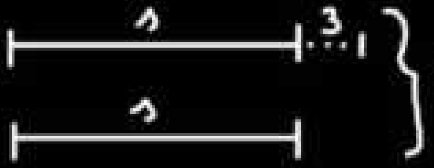
Met III (Comparăm datele din problemă)

Dacă patru robinete umplu un bazin în 12 ore, atunci opt robinete vor umple bazinul într-un timp de două ori mai scurt, adică în 6 ore.

VI. Metoda figurativă

Suma a două numere naturale este egală cu 31, iar diferența lor este egală cu 3. Aflați cele două numere naturale.

Sol:



31, deci $s = (31-3):2$

$s = 28:2 = 14$

Cele două numere sunt 14 și $14+3=17$.

VII. Metoda comparației

4 caiete și 2 stilouri costă împreună 32 de lei, iar două caiete și 6 stilouri costă 66 de lei.

Cât costă un caiet și cât costă un stilou?

Sol:

4 caiete ..... 2 stilouri ..... 32 lei

2 caiete ..... 6 stilouri ..... 66 lei | ·2

4 caiete ..... 2 stilouri ..... 32 lei

4 caiete ..... 12 stilouri ..... 132 lei

⊖ $12-2=10$ stilouri ..... $132-32=100$ lei, deci un stilou costă $100:10=10$ lei.

↳ 2 stilouri costă $2 \cdot 10 = 20$ lei, deci 4 caiete costă $32-20=12$ lei.

Ca atare, un caiet costă $12:4=3$ lei.

În concluzie, un caiet costă 3 lei, iar un stilou costă 10 lei.

VIII. Metoda mersului invers

Alegem un număr, îl înmulțim cu 4, la rezultat adunăm 23, suma obținută o împărțim la 7, la cât adunăm 1 și obținem numărul 10.

La ce număr ne-am gândit?

Sol: $(x \cdot 4 + 23) : 7 + 1 = 10$

$$(4x + 23) : 7 = 10 - 1$$

$$(4x + 23) : 7 = 9$$

$$4x + 23 = 9 \cdot 7$$

$$4x + 23 = 63$$

$$4x = 63 - 23$$

$$4x = 40$$

$$x = 40 : 4$$

$$x = 10.$$

Un călător parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge o treime din drum, a doua zi parcurge $\frac{1}{4}$ din drumul rămas, iar a treia zi face ultimii 18 Km.

Ce lungime are drumul?

Sol:

A doua zi a mai avut de parcurs $(18:3)\cdot 4=24$ Km

Lungimea drumului a fost de $(24:2)\cdot 3=36$Km

IX. Metoda falsei ipoteze

O persoană are struți și oi. Numărul capetelor este 20, iar numărul picioarelor este 50.

Câte oi și câți struți are persoana respectivă?

Soluție:

Presupunem că sunt doar oi.

Dacă sunt 20 de capete, atunci obținem $20\cdot 4=80$ de picioare.

Diferența între cele 80 de picioare obținute și cele 50 din enunț apare deoarece persoana respectivă are și struți, deci ipoteza (presupunerea) noastră este falsă.

Dorim să înlocuim oile cu struți până când ajungem la 50 de picioare în total.

Dacă înlocuim o oaie cu un struț se scad 2 picioare din cele 80.

Vrem să înlocuim oile cu struți până

când scădem $80-50=30$ de picioare.

Așadar, facem $30:2=15$ înlocuiri („transformări" din oaie în struț).

În concluzie, persoana are 15 struți și $20-15=5$ oi.

Obs. Puteam presupune că persoana are doar struți. (Continuare: exercițiu).

X. Metoda reducerii la absurd

Suma a zece numere naturale nenule este 54. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere egale.

Dem.

Presupunem prin reducere la absurd că ar exista zece numere naturale, toate distincte cu suma 54.

Cele mai mici astfel de numere sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 10.

Cum suma lor este $1+2+3+\ldots+10=(10\cdot 11):2=55$ și $55>54$ rezultă că presupunerea a fost falsă deoarece contrazice ipoteza.

Așadar, printre numerele considerate există cel puțin două egale.

Să se arate că nu există numere naturale care împărțite la 5 să dea restul 1 și împărțite la 10 să dea restul 5.

Sol. Presupunem prin reducere la absurd că există un număr natural n a.î.:

$$n : 5 = c, \text{ rest } 1 \overset{\text{T.Î.R.}}{\Longrightarrow} n = 5 \cdot c + 1$$

$$n : 10 = q, \text{ rest } 5 \overset{\text{T.Î.R.}}{\Longrightarrow} n = 10 \cdot q + 5$$

Atunci

$$5c + 1 = 10q + 5$$

$5c + 1 = 5(2q + 1)$ imposibil deoarece cantitatea din dreapta se împarte exact la 5, iar cantitatea din stânga nu se împarte exact la 5.

În concluzie, nu există numere naturale care să respecte condițiile din ipoteză. (ceea ce știam)

Tehnica generală:

Presupunem concluzia falsă și sub această presupunere folosim teoreme și rezultate cunoscute ca adevărate (sau axiome) pentru a ajunge la o contradicție cu un rezultat/ axiomă/ teoremă cunoscută.

Cu alte cuvinte, dacă presupunem concluzia falsă și ajungem la ceva absurd, atunci concluzia este adevărată.

XI. Despre conjecturi (termen introdus de către D. Hilbert)

Prin conjectură înțelegem o afirmație care pare a fi adevărată, dar pentru care nu a fost găsită o demonstrație.

Ca atare, o conjectură poate fi o afirmație adevărată sau falsă.

Pentru a „rezolva" o conjectură este necesar să prezentăm o demonstratie riguroasă sau să găsim un contraexemplu care să infirme afirmatia respectivă.

Exemple de conjecturi celebre:

i) Conjectura lui Fermat (1637)

Autor: Pierre de Fermat

Enunt: Pentru orice număr natural $n \geq 3$, ecuația $a^n + b^n = c^n$ nu are soluții naturale.

Prima demonstratie: Andrew Wiles 1994-1995 => Marea Teoremă a lui Fermat

ii) Conjectura lui Catalan

Autor: Eugène Catalan (1844)

Enunț: Singura solutie naturală a ecuației $x^a - y^b = 1$ cu $b > 1$ este

$$x = 3, a = 2, y = 2, b = 3.$$

Prima demonstratie: Preda Mihăilescu (2002) => Teorema lui Mihăilescu.

iii) Conjectura lui Collatz (Problema $3n+1$)

Autor: Lothar Collatz (1937)

Enunt: Se alege un număr natural. Dacă numărul este par, se împarte la 2, iar dacă este impar, se triplează și se adună 1 la rezultat. Repetăm acest procedeu, iar și iar pentru rezultatele obținute.

Această repetare ne va conduce mereu la rezultatul 1 (șirul de rezultate se va termina mereu în 4-2-1.)

Prima demonstrație: —

„Este posibil ca matematica să nu fie pregătită pentru astfel de probleme."

Paul Erdös.

iv) Conjectura lui Goldbach

Autor: Christian Goldbach (1742) într-o scrisoare către Leonhard Euler.

Enunț: Orice număr par mai mare decât 2 se poate scrie ca sumă de două numere prime.

Prima demonstrație: —.

v) Cele trei probleme ale Antichității

vi) Ipoteza Riemann etc.

XII. Despre teoreme

Teorema este o afirmație matematică de o importanță deosebită validată prin cel puțin o demonstrație.

Afirmațiile matematice care nu au o importanță deosebită (în mai multe domenii) și sunt validate prin demonstrație s.n. propoziții.

Afirmațiile matematice validate prin demonstrație și care joacă un rol important în demonstrațiile unor alte teoreme sau propoziții s.n. leme.

Consecințele unor teoreme s.n. corolare.

Exemple:

- Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$ (T.Î.R.$\mathbb{N}$)•

Pentru două numere naturale d și $\hat{\imath}$ cu $\hat{\imath}\neq 0$, există și sunt unice numerele naturale q și r astfel încât $d=\hat{\imath}\cdot q+r$ și $r<\hat{\imath}$.

Dem.

Demonstrăm în primă fază existența.

Considerăm mulțimea

$$A=\{s\in\mathbb{N} \mid \exists k\in\mathbb{N} \text{ a.î. } d=\hat{\imath}\cdot k+s\}$$

Se observă că $A\neq\emptyset$ deoarece $\underset{(s=d,\,k=0)}{d=\hat{\imath}\cdot 0+d}$, deci $d\in A$.

Cum $\mathbb{N}$ este bine ordonată, mulțimea A are un cel mai mic element pe care o să-l notăm cu r.

Așadar, $d=\hat{\imath}\cdot q+r$ pentru un $q\in\mathbb{N}$.

Trebuie arătat că $r<\hat{\imath}$.

Presupunem că $r\geq\hat{\imath}$, deci $\underset{(r\geq u)}{r=\hat{\imath}+u}$, pentru $u\in\mathbb{N}$.

Prin urmare,

$$d=\hat{\imath}\cdot q+r=\hat{\imath}\cdot q+\hat{\imath}+u=\hat{\imath}(q+1)+u,$$ deci $u\in A$.

Dar r este cel mai mic element din A, deci $r\leq u$.

Obținem $r=u$, de unde $\hat{\imath}=0$, fals. Deci $r<n$.

Am demonstrat existenta.

Rămâne de demonstrat unicitatea.

Presupunem că există alte două numere naturale $q' \neq q$ și $r' \neq r$ a.î.

$$d = \hat{\imath} \cdot q + r = \hat{\imath} \cdot q' + r', \text{ unde } r, r' < \hat{\imath}.$$

Dacă $q < q'$, atunci $q' = q + u$, $u \neq 0$, $u \geq 1$.

Obținem $\hat{\imath} \cdot q + r = \hat{\imath}(q+u) + r' = \hat{\imath} q + (\hat{\imath} u + r')$, deci $r = \hat{\imath} u + r'$.

Cum $\hat{\imath} \neq 0$ și $u \geq 1$ rezultă că $\hat{\imath} u \geq \hat{\imath}$, deci

$r = \hat{\imath} u + r' \geq \hat{\imath} + r' \geq \hat{\imath}$ cea ce contrazice faptul că $r < m$.

Ca atare, $q = q'$, de unde rezultă imediat $r = r'$, deci r și q sunt unic determinate.

□

<u>Obs.</u> Numerele q și r care apar în enuntul Teoremei s.n. câtul și restul împărțirii lui d la $\hat{\imath}$.

• Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{Z}$ ($T.\hat{I}.R.\mathbb{Z}$) •

Pentru două numere întregi a și b cu $b \neq 0$, există și sunt unice numerele întregi q și r astfel încât $a = bq + r$ și $0 \leq r < |b|$.

<u>Dem.</u>

C_I. Pentru $a = 0$, avem $a = b \cdot 0 + 0$ și $0 < |b|$.

Luăm astfel $q = r = 0$.

C_{II}. Dacă $a>0$ și $b>0$, aplicăm T.Î.R.ℕ și rezultă concluzia.

C_{III}. Dacă $a>0$ și $b<0$, aplicăm T.Î.R.ℕ pentru a și $-b$.

Obținem că $a=(-b)q'+r'$, $q', r' \in \mathbb{N}$, $0 \leq r' < -b = |b|$.

Luăm $q=-q'$ și $r=r'$ și rezultă că $a=bq+r$ cu $0 \leq r < -b = |b|$.

C_{IV}. Dacă $a<0$ și $b>0$, aplicăm T.Î.R.ℕ pentru $-a$ și b.

Obținem că $-a=bq'+r'$, $0 \leq r' < b$.

C_{IV1}. Dacă $r'=0$, atunci $a=-bq$ și alegem $q=-q'$, $r=0$.

C_{IV2}. Dacă $r'>0$, atunci $-a=bq'+r'$, adică $a=-bq'-r'=b(-q'-1)+(b-r')$.

Luăm $q=-q'-1$ și $r=b-r'$.

Cum $0<r'<b$, obținem că $0<r<b=|b|$.

C_{V}. Dacă $a<0$ și $b<0$, atunci aplicăm T.Î.R.ℕ pentru numerele naturale $-a$ și $-b$.

Obținem $-a=-bq'+r'$, $0 \leq r' < -b$.

C_{V1}. Dacă $r'=0$ alegem $q=q'$ și $r=0$.

C_{V2}. Dacă $r'>0$, atunci $-a=-bq'+r'$, adică $a=bq'-r'=b(q'+1)+(-b-r')$.

Luăm $q=q'+1$ și $r=-b-r'$.

Cum $0<r'<-b$, rezultă că $0<r<-b=|b|$.

Rămâne de demonstrat unicitatea numerelor q și r astfel determinate.

Presupunem că $bq+r=bq'+r'$ cu $0 \leq r, r' < |b|$.
Rezultă că $b(q-q')=r'-r$, deci $|b| \cdot |q-q'|=|r-r'|$.
Cum r și r' sunt numere naturale cu $0 \leq r, r' < |b|$, avem $|r-r'|<|b|$.

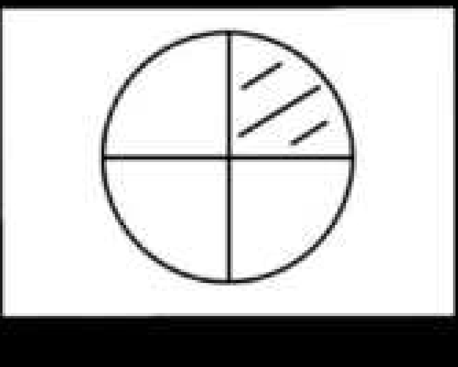
Așadar, $|b| \cdot |q-q'| < |b|$, de unde obținem că $|q-q'|<1$, deci $|q-q'|=0$, ceea ce ne conduce la faptul că $q=q'$ și implicit că $r=r'$, unicitatea fiind astfel demonstrată.

□

„halmos"

Horia-George Georgescu

FRACȚII ORDINARE



Fracții ordinare

ordinar = obișnuit, normal.

Def. O pereche de numere naturale a și b cu $b \neq 0$ scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ s.n. fracție ordinară.

Forma generală a unei fracții ordinare:

$$\text{linie de fracție} \longrightarrow \frac{\overset{\text{numărător}}{a}}{\underset{\text{numitor}}{b}}$$

, unde a și b sunt numere naturale cu $b \neq 0$.

Numitorul unei fracții ordinare arată în câte părți egale a fost împărțit întregul, iar numărătorul reprezintă numărul de părți care au fost luate din întreg.

Fracția $\frac{a}{b}$ poate fi privită și ca un cât neefectuat.

Obs. $\frac{a}{b}$ reprezintă câtul neefectuat al împărțirii $a:b$, $b \neq 0$.

Exemple: $\frac{15}{3}=5$; $\frac{8}{4}=2$; $\frac{12}{4}=3$ etc.

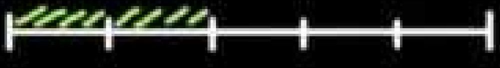
Obs. $\frac{0}{n}=0$, $n \neq 0$; Exemple: $\frac{0}{5}=0$;

$\frac{n}{1}=n$; $\frac{17}{1}=17$;

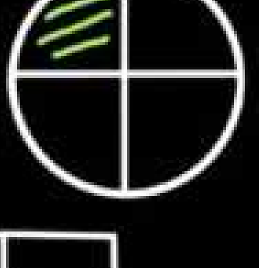
Obs. Orice număr natural se poate scrie cu ușurință ca fracție ordinară (cu numitorul egal cu 1. ($5=\frac{5}{1}$; $7=\frac{7}{1}$; $8=\frac{8}{1}$ etc.)

Exemple de fracții ordinare

$\frac{2}{5}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{5}{7}$

Fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ este:

ⓘ subunitară, dacă $a < b$; Exemplu: $\frac{2}{3}$;

(ii) echiunitară, dacă $a = b$; Exemplu: $\frac{5}{5}$;

(iii) supraunitară, dacă $a > b$; Exemplu: $\frac{8}{3}$;

Scoaterea întregilor din fracție (supraunitară)

$$\overset{„0"\to}{}\frac{a}{b} = c\,\frac{r}{b} \leftarrow „c \text{ întregi și } \frac{r}{b}"$$

$$„\uparrow" \to b \qquad b \leftarrow „\uparrow"$$

unde $a : b = c$, rest r.

Pentru a scoate întregii din fracția supraunitară $\frac{a}{b}$ îl împărțim pe a la b, obținând un cât și un rest.
Câtul reprezintă numărul de întregi, iar fracția subunitară rezultată va avea la numărător restul obținut și numitorul va fi cel inițial.

Exemple:

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}, \text{ deoarece } 7:3 = 2, \text{ rest } 1$$

$$\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}; \quad \frac{34}{7} = 4\frac{6}{7};$$

Introducerea întregilor în fracție

$$\text{„c"} \to n\,\overset{\text{„R"}}{\frac{a}{b}}\Big)^{+} = \frac{n\cdot b + a}{b} \qquad \text{„î"}$$

Introducând n întregi în fracția $\frac{a}{b}$ obținem o fracție supraunitară care va avea la numărător produsul dintre n și b la care se adaugă a, iar la numitor, numitorul inițial.

Exemple:

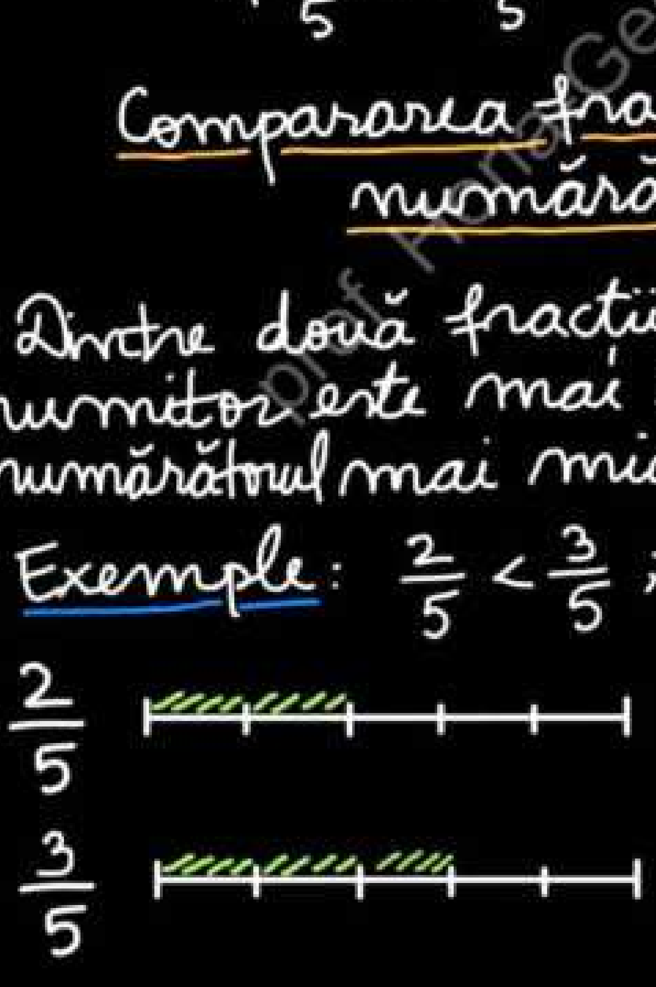
$$\text{„c"} \to 2\,\frac{1}{3} = \overbrace{\frac{2\cdot 3+1}{3}}^{\text{„D"}} = \frac{7}{3}; \qquad \text{„r"},\ \text{„î"}$$

$$4\,\frac{2}{5} = \frac{4\cdot 5+2}{5} = \frac{22}{5}; \quad 2\,\frac{3}{13} = \frac{2\cdot 13+3}{13} = \frac{29}{13}.$$

Compararea fracțiilor cu același numărător/numitor

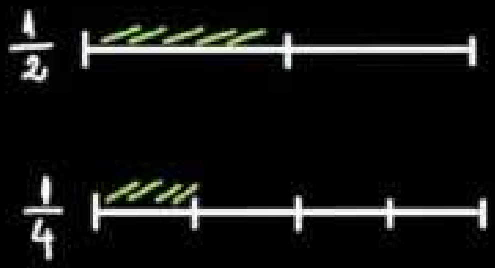
Dintre două fracții care au același numitor este mai mică fracția cu numărătorul mai mic.

Exemple: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; $\frac{7}{3} < \frac{10}{3}$; $\frac{17}{2} > \frac{13}{2}$.

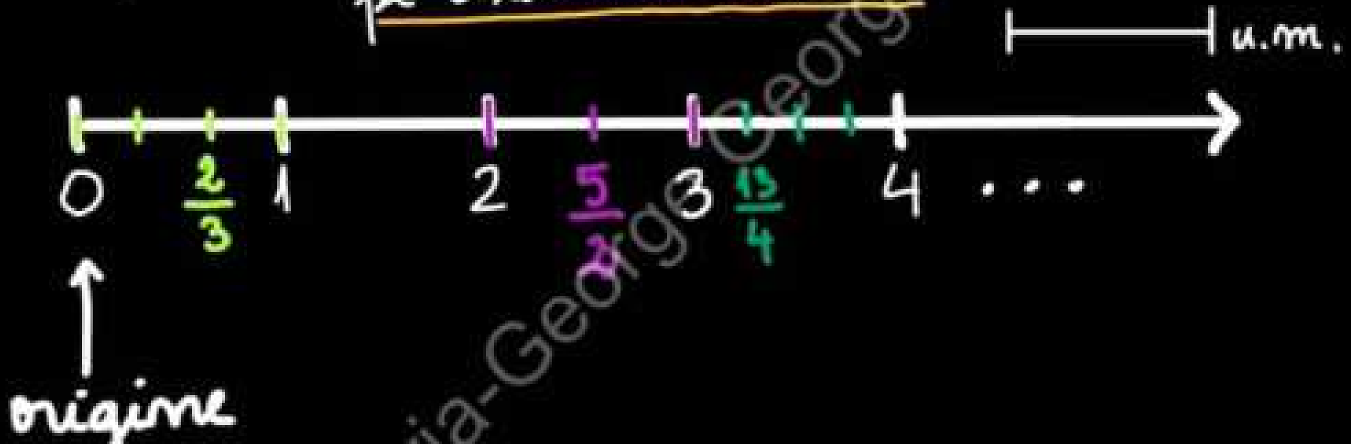


Dintre două fracții care au același numărător este mai mică fracția cu numitorul mai mare.

Exemple: $\frac{10}{5} < \frac{10}{2}$; $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$;



Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor



$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow 2 < \frac{5}{2} < 3$;

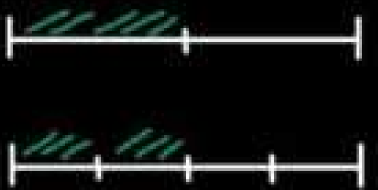
$\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4} \Rightarrow 3 < \frac{13}{4} < 4$;

Fracții echivalente

Def. Două fracții sunt echivalente dacă reprezintă aceeași parte dintr-un întreg.

Dacă fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt echivalente, scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemplu:



$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

„o jumătate" = „două sferturi".

Obs. Fracțiile echivalente arată „diferit" dar reprezintă aceeași parte din întreg.

Regulă:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{\times}{\iff} a \cdot d = b \cdot c$$

Două fracții sunt echivalente dacă și numai dacă produsele numerelor „din colțuri" opuse (pe diagonală) sunt egale.

Exemple: $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$, deoarece $2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 42$;

$\frac{5}{7} \neq \frac{15}{20}$, deoarece $5 \cdot 20 = 100$ și $7 \cdot 15 = 105$, deci $5 \cdot 20 \neq 7 \cdot 15$.

• Amplificarea fracțiilor ordinare

Regulă: Pentru a amplifica o fracție ordinară cu un număr natural nenul, înmulțim atât numărătorul cât și numitorul cu acel număr.

$$^{n)}\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ , n, b \neq 0$$

Exemple:

$$^{5)}\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{15};$$

$$^{2)}\frac{1}{7} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 7} = \frac{2}{14};$$

$$^{3)}\frac{5}{11} = \frac{15}{33}.$$

Obs. În urma amplificării unei fracții cu un număr, obținem o fracție echivalentă cu fracția dată (verificați).

Aducerea fracțiilor la acelasi numitor
(la un numitor comun)

Pentru a aduce două sau mai multe fractii la acelasi numitor, căutăm în primă fază un multiplu comun al numitorilor (ideal ar fi c.m.m.m.c.) și apoi amplificăm convenabil fiecare fracție pentru a obține la numitor valoarea acelui multiplu comun.

Exemplu: $\frac{3}{6}; \frac{1}{12}; \frac{7}{8}$.

c.m.m.m.c.$(6,12,8)=24$.

Asadar,

$$ {}^{4)}\frac{3}{6}=\frac{12}{24};\quad {}^{2)}\frac{1}{12}=\frac{2}{24};\quad {}^{3)}\frac{7}{8}=\frac{21}{24}; $$

$$ \frac{3}{6}; \frac{1}{12}; \frac{7}{8} \longrightarrow \frac{12}{24}; \frac{2}{24}; \frac{21}{24}. $$

Utilitate: ne poate ajuta să comparăm două fracții ordinare cu numitori diferiți.

Exemplu: $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$, deoarece ${}^{3)}\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ și ${}^{2)}\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$ iar $\frac{9}{6} < \frac{10}{6}$.

• Simplificarea fracțiilor ordinare

Regulă: Pentru a simplifica o fracție ordinară printr-un divizor comun (mai mare decât 1) al numitorului și numărătorului, împărțim atât numărătorul, cât și numitorul la acel divizor comun.

$$\frac{a^{(d}}{b} = \frac{a:d}{b:d}, \quad d \mid a,\ d \mid b,\ b \neq 0. \quad d > 1.$$

<u>Exemple</u>:

$$\frac{4^{(2}}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}; \qquad \frac{23\cancel{0}^{(10}}{170\cancel{0}} = \frac{23}{170};$$

$$\frac{15^{(3}}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6}; \qquad \frac{120\cancel{0}\cancel{0}}{19\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{120}{19};$$

$$\frac{11^{(11}}{22} = \frac{1}{2}. \qquad \frac{17\cancel{0}\cancel{0}}{34\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{17^{(17}}{34} = \frac{1}{2}.$$

<u>Obs.</u> În urma simplificării unei fracții printr-un număr, obținem o fracție echivalentă cu fracția dată (verificați).

<u>Utilitate:</u> obținem fracții echivalente cu numere mai mici și ne ușurăm eventualele calcule.

Fracții ireductibile

Def. O fracție ordinară este ireductibilă dacă nu se mai poate simplifica prin niciun număr natural.

Exemple: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{32}{25}$ etc.

Obs. În urma simplificărilor, orice fracție ordinară poate să fie adusă la forma ireductibilă.

Exemple:

$$\frac{30^{(2}}{66}=\frac{15^{(3}}{33}=\frac{5}{11},$$

$$\frac{210^{(2}}{294}=\frac{105^{(3}}{147}=\frac{35^{(7}}{49}=\frac{5}{7}.$$

Obs.

Pentru a aduce fracția $\frac{a}{b}$ la forma ireductibilă în urma unei singure simplificări, alegem să simplificăm cu c.m.m.d.c(a,b).

Exemplu:

$$\frac{24^{(12}}{84}=\frac{2}{7}.$$

c.m.m.d.c$(24,84)=12$.

Obs.

$\frac{a}{b}$ ireductibilă $\Longleftrightarrow$ c.m.m.d.c.$(a,b)=1$
(a și b prime între ele)

Operații cu fracții ordinare

- Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare

Cazul I. (Fracțiile au același numitor)

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$$

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$$

Regula: păstrez numitorul și adun/scad numărătorii.

$n \neq 0$

Exemple:

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=\frac{8}{7};$$

$$\frac{26}{35}+\frac{23}{35}=\frac{26+23}{35}=\frac{49}{35}^{(7}=\frac{7}{5};$$

$$\frac{17}{3}-\frac{6}{3}=\frac{17-6}{3}=\frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{121}-\frac{4}{121}=\frac{15-4}{121}=\frac{11}{121}^{(11}=\frac{1}{11}.$$

Cazul II. (Fracțiile au numitori diferiți)

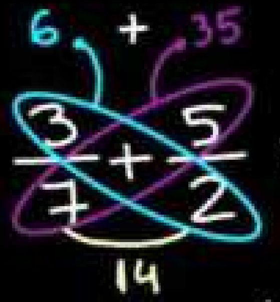
Regula: Aducem fracțiile la același numitor și aplicăm regula de la cazul I.

Exemple:

$${}^{5)}\frac{2}{3}+{}^{3)}\frac{7}{5}=\frac{10}{15}+\frac{21}{15}=\frac{31}{15};$$

$${}^{7)}\frac{17}{12}-{}^{3)}\frac{5}{28}=\frac{119}{84}-\frac{15}{84}=\frac{104}{84}^{(2}=\frac{52}{42}^{(2}=\frac{26}{21}.$$

Metoda fluturelui:



$$\frac{3}{7}+\frac{5}{2}=\frac{41}{14}.$$

- Înmulțirea fracțiilor ordinare

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Regula: înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

Exemple:

$b, d \neq 0$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15};$$

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6\cdot 1}{11\cdot 5}=\frac{6}{55}.$$

$$\frac{3}{5}\cdot 7=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{1}=\frac{3\cdot 7}{5}=\frac{21}{5}.$$

Obs. Atunci când înmulțim o fracție ordinară cu un număr natural, înmulțim numărătorul cu acel număr și păstrăm numitorul.

Obs. Atunci când înmulțim două (sau mai multe) fracții ordinare, putem simplifica un numărător cu un numitor printr-un număr pentru a ne ușura calculele.

Exemple:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{35}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{17}{\cancel{102}}} = \frac{1\cdot 3}{5\cdot 17} = \frac{3}{85}.$$

Justificare:

$$\frac{6}{35}\cdot\frac{21}{102} = \frac{6\cdot 21}{35\cdot 102} = \frac{21^{(7}}{35}\cdot\frac{6^{(6}}{102} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{17} = \frac{3\cdot 1}{5\cdot 17} = \frac{3}{85}.$$

Alt exemplu:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{11}}} = \frac{1\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

• Împărțirea fracțiilor ordinare

Preliminarii:

Def. Inversa fracției $\frac{a}{b}$ este fracția $\frac{b}{a}$.

Exemple:

$$\mathrm{inv}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}; \quad \mathrm{inv}\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{3}{7} \text{ etc.}$$

Obs. Deoarece orice număr natural nenul se poate scrie ușor ca fracție ordinară cu numitorul 1 ($3 = \frac{3}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$ etc.), atunci inversul numărului natural nenul a este egal cu $\frac{1}{a}$.

Exemple:

$$\mathrm{inv}(5) = \mathrm{inv}\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{5};$$

$$\mathrm{inv}(11) = \mathrm{inv}\left(\frac{11}{1}\right) = \frac{1}{11}$$

Împărțirea fracțiilor ordinare

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}, \quad b,c,d\neq 0.$$

Regula: înmulțim prima fracție cu inversa celei de-a doua fracții.

Exemple:

$$\frac{3}{5}:\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35};$$

$$\frac{9}{5}:3=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{15}^{(3}=\frac{3}{5};$$

$$\frac{12}{5}:\frac{42}{25}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{7}{\cancel{42}}}=\frac{2\cdot 5}{1\cdot 7}=\frac{10}{7}.$$

- Ridicarea la putere a unei fracții ordinare cu exponent număr natural.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ \text{factori}}=\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{factori}}}=\frac{a^n}{b^n}. \quad b\neq 0$$

Concluzia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Regula: ridicăm atât numărătorul, cât și numitorul la puterea respectivă.

Obs. $\frac{a}{b}$ s.n bază și n s.n exponent.

Exemple:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27};$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1^2}{5^2}=\frac{1}{25};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}.$$

Obs. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \neq \frac{a^n}{b}$

Exemplu:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}, \text{ iar } \frac{5^2}{3}=\frac{25}{3}.$$

- Reguli de calcul cu puteri

Regulile de calcul cu puteri cu fracții ordinare sunt similare regulilor de calcul cu puteri cu numere naturale, doar că de data aceasta baza este o fracție.

Concret:

ⓘ $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$; Exemplu: $\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}$;

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$; Exemplu: $\left(\frac{7}{5}\right)^0=1$;

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$.

Exemplu:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$, $m \geq n$.

Exemplu:

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{15} : \left(\frac{3}{10}\right)^8 = \left(\frac{3}{10}\right)^{15-8} = \left(\frac{3}{10}\right)^7.$$

v) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$.

Exemplu:

$$\left[\left(\frac{3}{11}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^{3\cdot 2} = \left(\frac{3}{11}\right)^6$$

vi) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$.

Exemplu:

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{4}^{1}}{25} \cdot \frac{9}{\cancel{4}_{1}} = \frac{9}{25}.$$

ⓥⓘⓘ $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$.

Exemplu:

$$\left(\frac{3}{5}:\frac{7}{25}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2:\left(\frac{7}{25}\right)^2=\frac{9}{25}:\frac{49}{625}=\frac{9}{\underset{1}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\overset{25}{\cancel{625}}}{49}=\frac{225}{49}.$$

- Aflarea unei fracții dintr-un număr

Pentru a afla cât reprezintă o fracție dintr-un număr, înmulțim fracția respectivă cu acel număr.

$$\frac{a}{b} \text{ din } n=\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b},\ b\neq 0.$$

Exemple:

$$\frac{2}{5} \text{ din } 60=\frac{2}{5}\cdot 60=\frac{2\cdot 60}{5}=\frac{120}{5}=24.$$

$$\frac{3}{7} \text{ din } 11=\frac{3}{7}\cdot 11=\frac{3\cdot 11}{7}=\frac{33}{7}.$$

Într-o clasă sunt 27 de elevi. Două treimi din numărul elevilor sunt fete. Câte fete sunt în clasă?

$$\frac{2}{3} \text{ din } 27=\frac{2}{3}\cdot 27=\frac{2\cdot 27}{3}=\frac{54}{3}=18.$$

În clasă sunt 18 fete.

- Aflarea unei fracții dintr-o fracție

Pentru a afla cât reprezintă o fracție dintr-o fracție, înmulțim cele două fracții.

$$\frac{a}{b} \text{ din } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},\ b, d \neq 0.$$

Exemple:

$$\frac{2}{3} \text{ din } \frac{8}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$$

$$\frac{1}{2} \text{ din } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ („jumătate din jumătate reprezintă un sfert").

Procente

Def.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{procent}}}{p}\% = \frac{p}{100} \leftarrow \text{raport procentual}$$

Citim: „p la sută".

Exemple:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2};\ 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5};\ 17\% = \frac{17}{100}.$$

Obs. Aflarea unui procent dintr-un număr n se face înmulțind raportul procentual cu acel număr.

$$p\% \text{ din } n = \frac{p}{100}\cdot n$$

Exemple:

$$25\% \text{ din } 24 = \frac{25}{100}\cdot 24 = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6;$$

$$60\% \text{ din } 70 = \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}\cdot 7\cancel{0} = 42.$$

Într-o clasă sunt 28 de elevi. 75% din numărul elevilor sunt băieți. Câți băieți sunt în clasă?

$$75\% \text{ din } 28 = \frac{75}{100}\cdot 28 = \frac{3}{\cancel{4}}\cdot \overset{7}{\cancel{28}} = 21.$$

În clasă sunt 21 de băieți.

Informații interesante

Brahmagupta scria fracțiile ordinare așa cum sunt scrise astăzi, însă fără a reprezenta linia de fracție orizontală.

Linia de fracție (orizontală) a fost introdusă de către arabi.

L. Fibonacci a fost primul matematician european care a scris fracțiile ordinare așa cum le scriem astăzi.

Există numere care nu se pot scrie sub formă de fracție ordinară. Se spune că Pitagora nu credea că este posibil acest lucru și atunci când a aflat că $\sqrt{2}$ este un astfel de număr, a ascuns acest fapt. Filozofia lui Pitagora despre numere nu putea include astfel de numere „ciudate". Legende...

Egiptenii din antichitate foloseau doar fracții cu numărătorul egal cu 1.

De exemplu: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{101}$ etc.

Horia-George Georgescu

FRACȚII ZECIMALE

$$\frac{1}{2}=0,5$$

Fracții zecimale

Motivație: o altă modalitate de a scrie fracții

$\frac{1}{10} = 0,1$ (o zecime)

$\frac{1}{100} = 0,01$ (o sutime)

$\frac{1}{1000} = 0,001$ (o miime)

Forma generală a unei fracții zecimale:

$$\overline{\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{\text{parte întreagă}}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_m}_{\text{parte zecimală}}}$$

$b_1, b_2, \dots, b_m$ s.n. zecimale.

Exemple:

$$\frac{23}{100} = \frac{20+3}{100} = \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{3}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 0,\underset{\text{zecimi}}{2}\underset{\text{sutimi}}{3}$$

$$\frac{173}{1000} = \frac{100+70+3}{1000} = \frac{1\cancel{00}}{10\cancel{00}} + \frac{7\cancel{0}}{100\cancel{0}} + \frac{3}{1000} = \frac{1}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}$$

Deci $\frac{173}{1000} = 0,173$.

Alte exemple de fracții zecimale:

2,1 ; 1,003 ; 3,14 ; 213,5 ; 0,71423 ;

Fracții zecimale periodice:

Sunt fracții zecimale cu o infinitate de zecimale care se repetă.

ⓘ simple (perioada începe imediat după virgulă)

$0,33333\ldots \overset{not}{=} 0,(3)$; Citim: „zero virgulă perioadă 3"

$17,525252\ldots = 17,(52)$.

ⓘⓘ mixte (între virgulă și perioadă există și alte cifre)

$3,077777\ldots = 3,\overset{\downarrow}{0}(7)$;

$6,23575757\ldots = 6,\underset{\uparrow}{\underline{23}}(57)$.

Pentru moment ne interesează fracțiile zecimale care nu sunt periodice (neperiodice).

Obs. Orice număr natural se poate scrie ușor ca fracție zecimală.

Exemple: $5 = 5,0$; $17 = 17,0$; $3 = 3,0$ etc.

Obs. Putem adăuga oricâte cifre de zero (zerouri) dorim la finalul părții zecimale.

Exemple: $2,14 = 2,140 = 2,14000 = 2,14000\ldots$

$3,2 = 3,20 = 3,200\ldots$.

• Transformarea unei fracții zecimale neperiodice în fracție ordinară.

Regulă: la numărător scriem numărul fără să ținem cont de virgulă, iar la numitor scriem 1 urmat de atâtea zerouri câte zecimale are numărul nostru.

Exemple concrete:

$2{,}3 = \frac{23}{10}$; $\quad 4{,}051 = \frac{4051}{1000}$;

$7{,}21 = \frac{721}{100}$; $\quad 0{,}12 = \frac{12}{100}$;

$0{,}02 = \frac{2}{100}$;

Obs.

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, deci 0,5 reprezintă jumătate dintr-un întreg.

$0{,}25 = \frac{25}{100}^{(25} = \frac{1}{4}$, deci 0,25 reprezintă un sfert dintr-un întreg.

Aproximări. Rotunjiri.

① Aproximări la unități prin lipsă ($\underline{a}_u$) și prin adaos ($\overline{a}_u$)

$\underline{a}_u(9{,}1) = 9$; $\quad \underline{a}_u(7{,}35) = 7$;

$\overline{a}_u(9{,}1) = 10$; $\quad \overline{a}_u(7{,}35) = 8$.

② Aproximări la zecimi prin lipsă ($\underline{a}_z$) și prin adaos ($\overline{a}_z$)

$\underline{a}_z(8{,}346) = 8{,}3$; $\quad \underline{a}_z(7{,}15) = 7{,}1$;

$\overline{a}_z(8{,}346) = 8{,}4$; $\quad \overline{a}_z(7{,}15) = 7{,}2$;

③ Aproximări la sutimi prin lipsă ($\underline{a}_s$) și prin adaos ($\overline{a}_s$)

$\underline{a}_s(5,768) = 5,76$; $\underline{a}_s(1,1234) = 1,12$;

$\overline{a}_s(5,768) = 5,77$; $\overline{a}_s(1,1234) = 1,13$;

④ Rotunjirile reprezintă aproximări prin lipsă sau prin adaos a.î. să obținem cel mai apropiat număr de numărul dat.

Dacă din ambele aproximări rezultă numere la fel de depărtate de numărul dat, atunci rotunjirea se face aproximând prin adaos.

Exemple concrete:

$r_u(9,3) = 9$; $r_u(9,5) = 10$; $r_u(7,25) = 7$;

$r_u(8,60) = 9$; $r_u(4,5) = 5$; $r_u(6,45) = 6$;

$r_z(7,33) = 7,3$; $r_z(7,37) = 7,4$; etc.

Obs. În practică, atunci când lucrăm cu fracții zecimale, păstrăm cel mult trei zecimale din acel număr.

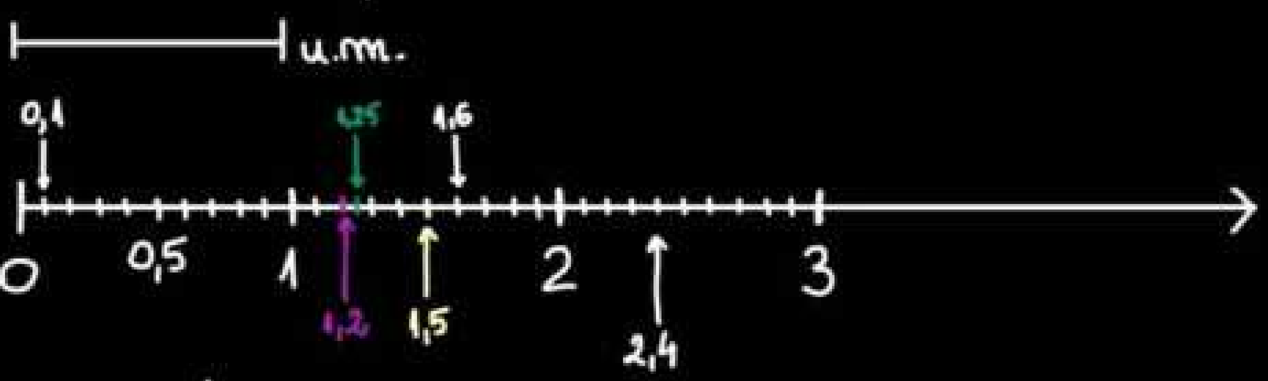
Exemple: $2,71352 \simeq 2,7$;

$3,1235621 \simeq 3,12$;

$9,512 \simeq 9,5$; etc.

Obs. Dacă dorim să obținem rezultate cât mai precise, trebuie să păstrăm cât mai multe zecimale

• Reprezentarea fracțiilor zecimale pe axa numerelor •



$0{,}5 = \frac{1}{2}$;

• Compararea fracțiilor zecimale •

Cazul I. Dacă două fracții zecimale au părțile întregi diferite, atunci este mai mică fracția zecimală cu partea întreagă mai mică.

Exemple:

$\underline{\underline{2}}{,}5 < \underline{\underline{3}}{,}7$; $\underline{\underline{23}}{,}6 > \underline{\underline{17}}{,}3$;

$\underline{\underline{2}}{,}3 < \underline{\underline{7}}{,}1$; $\underline{\underline{8}}{,}217 < \underline{\underline{9}}{,}1$ etc.

Cazul II. Dacă două fracții zecimale au aceeași parte întreagă, atunci distingem două situații:

1. Dacă ambele fracții au același număr de zecimale, atunci comparăm numerele formate cu acele zecimale.

Exemple: $2{,}\underline{\underline{13}} < 2{,}\underline{\underline{37}}$; $5{,}\underline{\underline{07}} < 5{,}\underline{\underline{17}}$;

$17{,}\underline{\underline{835}} > 17{,}\underline{\underline{825}}$; $6{,}\underline{\underline{003}} > 6{,}\underline{\underline{001}}$;

$17{,}\underline{\underline{0104}} > 17{,}\underline{\underline{0003}}$;

2. Dacă fracțiile zecimale au un număr diferit de zecimale, atunci adăugăm zerouri la finalul părții zecimale până când obținem același număr de zecimale și revenim la situația anterioară.

Exemple: $3,57 \ ? \ 3,8$ $\qquad$ $7,31 \ ? \ 7,2156$

$3,\underline{\underline{57}} < 3,\underline{\underline{80}}$ $\qquad$ $7,\underline{\underline{3100}} > 7,\underline{\underline{2156}}$

$0,3 \ ? \ 0,03$

$0,30 > 0,03$ etc.

Operații cu fracții zecimale (neperiodice)

• Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale•

Regulă: Așezăm fracțiile zecimale una sub cealaltă (în scris) a.î. virgula să fie sub virgulă, partea întreagă sub partea întreagă și partea zecimală sub partea zecimală.

Facem adunarea/scăderea fără să ținem cont de virgulă, iar la rezultat „colorăm" virgula.

Exemple concrete:

i) $2,3 + 5,8 = ?$

$$\begin{array}{r} 2,3\,+ \\ 5,8 \\ \hline 8,1 \end{array}$$

$2,3 + 5,8 = 8,1$

ii) $12,61 + 5,99 = ?$

$$\begin{array}{r} 12,61+ \\ 5,99 \\ \hline 18,60 \end{array}$$

$12,61 + 5,99 = 18,60 = 18,6.$

iii) $5,317 + 0,91 = ?$

$$\begin{array}{r} 5,317+ \\ 0,910 \\ \hline 6,227 \end{array}$$

$5,317 + 0,91 = 6,227.$

iv) $6,25 - 4,13 = ?$

$$\begin{array}{r} 6,25- \\ 4,13 \\ \hline 2,12 \end{array}$$

$6,25 - 4,13 = 2,12.$

v) $5,27 - 1,98 = ?$

$$\begin{array}{r} 5,27- \\ 1,98 \\ \hline 3,29 \end{array}$$

$5,27 - 1,98 = 3,29.$

vi) $8,02 - 3,7124 = ?$

$$\begin{array}{r} \dot{8},0\dot{2}\overset{9}{0}0- \\ 3,7124 \\ \hline 4,3076 \end{array}$$

$8,02 - 3,7124 = 4,3076$

• Înmulțirea fracțiilor zecimale •

Cazul I. Înmulțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10 (10, 100, 1000 ... etc.)

Regula: Atunci când înmulțim cu 10, 100, 1000 etc., mutăm virgula spre dreapta peste atâtea cifre câte zerouri are numărul cu care înmulțim.

Exemple:

$$5,\underset{\curvearrowright}{1}74\cdot 10=51,74;$$

$$5,\underset{\curvearrowright}{21}7\cdot 100=521,7;$$

$$14,\underset{\curvearrowright}{726}54\cdot 1000=14726,54;$$

$$5,1\cdot 1000=5,\underset{\curvearrowright}{100}\cdot 1000=5100;$$

$$0,42\cdot 10000=0,\underset{\curvearrowright}{4200}\cdot 10000=4200;$$

(„completăm cu zerouri")

Cazul II. Înmulțirea a două fracții zecimale.

Regulă: Așezăm fracțiile una sub cealaltă (nu este necesar ca virgula să fie sub virgulă) și facem înmulțirile fără să ținem cont de virgulă.

Punem virgula la rezultat a.î. să avem atâtea zecimale câte zecimale au cele două numere în total.

Exemple:

i) $2,5\cdot 1,3=?$

$2,5\cdot 1,3=3,25.$

$$\begin{array}{r}
2,5\cdot\\
1,3\\
\hline
75\\
25\\
\hline
3,25
\end{array}$$

ii) $3,175\cdot 2,12=?$

$3,175\cdot 2,12=6,73100=6,731.$

$$\begin{array}{r}
3,175\cdot\\
2,12\\
\hline
6350\\
3175\\
6350\\
\hline
6,73100
\end{array}$$

iii) $0{,}72 \cdot 4 = ?$

$0{,}72 \cdot 4 = 2{,}88.$

$$\begin{array}{r} 0{,}72\cdot \\ 4 \\ \hline 2{,}88 \end{array}$$

• Împărțirea fracțiilor zecimale •

Cazul I. Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală.

Regulă: Împărțim numerele naturale așa cum știm, iar în momentul în care ajungem la rest, punem virgula la cât și continuăm algoritmul împărțirii coborând zerouri până la finalul împărțirii.

Exemple:

i) $28 : 5 = ?$

$28 : 5 = 5{,}6;$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{25} & 5{,}6 \\ =30 & \\ \underline{30} & \\ == & \end{array}$$

ii) $475 : 2 = ?$

$475 : 2 = 237{,}5$

$$\begin{array}{r|l} 475 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{4} & 237{,}5 \\ =7 & \\ \underline{6} & \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ =10 & \\ 10 & \end{array}$$

iii) $27 : 4 = ?$

$27 : 4 = 6{,}75$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{24} & 6{,}75 \\ =30 & \\ \underline{28} & \\ =20 & \\ \underline{20} & \\ == & \end{array}$$

iv) $3:8 = ?$

$3:8 = 0{,}375$

3 | 8
0 | 0,375
30
24
=60
56
=40
40
==

v) $22:3 = ?$

$22:3 = 7{,}(3)$

22 | 3
21 | 7,333...
=10
9
=10
9
=10
9
=10

vi) $41:33 = ?$

$41:33 = 1{,}(24)$

41 | 33
33 | 1,242424...
=80
66
140
132
==80

vii) $32:15 = ?$

$32:15 = 2{,}1(3).$

32 | 15
30 | 2,13333...
=20
15
=50
45
=50

viii) $1:3 = 0{,}(3).$

Obs. Pentru a transforma o fracție ordinară în fracție zecimală împărțim numărătorul la numitor.

$$„\frac{a}{b} = a:b"$$

• Transformarea unei fracții zecimale periodice simple în fracție ordinară •

$$\overline{a_1a_2\dots a_p,(b_1b_2b_3\dots b_n)} = \overline{a_1a_2\dots a_p}\,\frac{\overline{b_1b_2b_3\dots b_n}}{\underbrace{999\dots99}_{n\ \text{cifre}}}$$

Regula: Scoatem partea întreagă ca întregi în dreptul unei fracții care va avea la numărător numărul format din cifrele din perioadă, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre avem în perioadă.

Exemple:

i) $1,(3) = 1\frac{3}{9} = \frac{12}{9}^{(3} = \frac{4}{3}$;

ii) $2,(31) = 2\frac{31}{99} = \frac{229}{99}$;

iii) $0,(7) = \frac{7}{9}$; $0,(8) = \frac{8}{9}$; $0,(5) = \frac{5}{9}$;

$0,(2173) = \frac{2173}{9999}$; $0,(12341) = \frac{12341}{99999}$

Dem:

I. Caz particular: $0,(5)=\frac{5}{9}$ (de ce?)

$$0,(5)=0,55555\ldots \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot 0,(5)=5,5555\ldots \Leftrightarrow 10\cdot 0,(5)=5+0,(5) \mid -0,(5)$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot 0,(5)-0,(5)=5 \Leftrightarrow 9\cdot 0,(5)=5,$$ deci

$$0,(5)=5:9=\frac{5}{9}.$$

II. Caz general:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_p,(b_1b_2b_3\ldots b_n)}=\overline{a_1a_2\ldots a_p}\,\frac{\overline{b_1b_2b_3\ldots b_n}}{\underbrace{999\ldots99}_{n\text{ cifre}}}$$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_p,(b_1b_2b_3\ldots b_n)}=\overline{a_1a_2\ldots a_p}+\overline{0,(b_1b_2\ldots b_n)}$$

$$\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}=\overline{0,b_1b_2\ldots b_mb_1b_2\ldots b_mb_1b_2\ldots} \mid \cdot 10^m$$

$$\Leftrightarrow 10^m\cdot\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}=\overline{b_1b_2\ldots b_m,b_1b_2\ldots b_mb_1b_2\ldots}$$

$$\Leftrightarrow 10^m\cdot\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}=\overline{b_1b_2\ldots b_m}+\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}$$

$$\Leftrightarrow (10^m-1)\cdot\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}=\overline{b_1b_2\ldots b_m},$$ deci

$$\overline{0,(b_1b_2\ldots b_m)}=\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_m}}{10^m-1}=\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_m}}{\underbrace{999\ldots99}_{n\text{ cifre}}}.\ \square$$

Obs. Din fracția ordinară $\frac{a}{b}$ se obține o fracție zecimală finită dacă descompunerea în factori primi a numitorului conține doar factorii 2 și/sau 5 ($b=2^p\cdot 5^q$).

Exemple: $\frac{213}{4}$; $\frac{1217}{25}$; $\frac{1213}{20}$ etc.

Obs. Din fracția ordinară $\frac{a}{b}$ se obține o fracție zecimală periodică simplă dacă descompunerea în factori primi a numitorului nu conține factorii 2 și 5, adică

$$b = 3^{p} \cdot 7^{q} \cdot 11^{r} \cdot 13^{s} \cdot \ldots$$

Exemple: $\frac{27}{21}$; $\frac{123}{7}$; $\frac{1275}{77}$ etc.

• Transformarea unei fracții zecimale periodice mixte în fracție ordinară •

$$\overline{a_1a_2\ldots a_p,q_1q_2\ldots q_s(b_1b_2\ldots b_m)} =$$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_p}\,\frac{\overline{q_1q_2\ldots q_sb_1b_2\ldots b_m}-\overline{q_1q_2\ldots q_s}}{\underbrace{999\ldots99}_{m\text{ cifre}}\underbrace{000\ldots00}_{s\text{ cifre}}}$$

Regula: Scoatem partea întreagă ca întregi în dreptul unei fracții care va avea la numărător diferența dintre numărul format din toate cifrele de după virgulă și numărul format cu cifrele dintre virgulă și perioadă, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre avem în perioadă urmate de atâtea cifre de 0 câte cifre avem între virgulă și perioadă.

Exemple:

i) $0,2(3) = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90}^{(3} = \frac{7}{30}$;

ii) $0,231(4) = \frac{2314-231}{9000} = \frac{2083}{9000}$;

iii) $3,08(3) = 3\,\frac{83-8}{900} = 3\,\frac{75}{900}^{(3}$

$= 3\,\frac{25}{300}^{(5} = 3\,\frac{5}{60}^{(5} = 3\,\frac{1}{12} = \frac{3\cdot 12+1}{12} = \frac{37}{12}$.

Obs. Dintr-o fracție ordinară se obține o fracție zecimală periodică mixtă dacă descompunerea în factori primi a numitorului conține cel puțin un factor de 2 sau 5 și cel puțin un factor diferit de 2 și 5.

Exemple: $\frac{17}{12}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{11}{30}$ etc.

Cazul II. Împărțirea unei fracții zecimale la o putere a lui 10 (10, 100, 1000 ... etc.)

Regula: Atunci când împărțim la 10, 100, 1000 etc., mutăm virgula spre stânga peste atâtea cifre câte zerouri are numărul la care împărțim.

Exemple:

i) $3\underbrace{5},73 : 10 = 3,573$;

ii) $1\underbrace{237},2 : 1000 = 1,2372$;

iii) $\underbrace{01},2 : 100 = 0,012$; $3 : 1000 = 0,003$; $2,5 : 10000 = 0,00025$;

(„completăm cu zerouri")

Cazul III. Împărțirea unei fracții zecimale la un număr natural.

Regulă: Împărțim așa cum știm, iar în momentul în care ajungem în dreptul virgulei, punem virgula la rezultat și continuam algoritmul împărțirii, coborând eventual zerouri, până la final.

Exemple:

i) 21,24 : 2 = ?

21,24 : 2 = 10,62.

21,24 | 2
2 | 10,62
=1
0
12
12
==4
4
=

ii) 23,248 : 5 = ?

23,248 : 5 = 4,6496

23,248 | 5
20 | 4,6496
=32
30
=24
20
=48
35
=30
30
==

iii) $0,2 : 4 = ?$

$0,2 : 4 = 0,05.$

```
0,2 |4
0   |0,05
=2  |
 0
 20
 20
 ==
```

Cazul $\underline{\text{IV}}$. Împărțirea unei fracții zecimale la o fracție zecimală.

Regulă: Înmulțim ambele fracții zecimale cu 10, 100, 1000... (puteri ale lui 10) până când numitorul devine număr natural. Din acel moment știm să efectuăm împărțirea (cazul $\underline{\text{III}}$).

Exemple:

i) $21,2 : 0,4 \overset{\cdot 10}{=} 212 : 4 = 53.$

ii) $24,23 : 0,8 \overset{\cdot 10}{=} 242,3 : 8 = 30,2875$

iii) $2,2233 : 0,002 \overset{\cdot 1000}{=} 2223,3 : 2$
$= 1111,65.$

```
242,3 |8
24    |30,2875
==2   |
  0
  23
  16
  =70
   64
   =60
    56
    =40
     40
     ==
```

```
2223,3 |2
2      |1111,65
=2     |
 2
 =2
  2
  =3
   2
   13
   12
   =10
    10
    ==
```

Media aritmetică a n numere

Def. Media aritmetică a mai multor numere este egală cu rezultatul împărțirii sumei tuturor numerelor la câte numere avem (adunăm toate numerele și împărțim la câte numere sunt).

Exemple:

i) $ma(8;12) = (8+12):2 = 20:2 = 10.$

ii) $ma(7;12) = (7+12):2 = 19:2 = 9,5.$

iii) $ma(3,2;1,5;6,4) = (3,2+1,5+6,4):3$

$= 11,1:3 = 3,7.$

$$\begin{array}{r|l} 11,1 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{9} & 3,7 \\ =21 & \\ \underline{21} & \\ == & \end{array}$$

• Ridicarea la putere a unei fracții zecimale cu exponent număr natural •

Ținând cont de faptul că fracțiile zecimale reprezintă o altă modalitate de a scrie fracții ordinare, ridicarea la putere a unei fracții zecimale(a) la un exponent natural n se definește în sens clasic ($a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ factori}$) și are aceleași proprietăți ca ridicarea la putere a unei fracții ordinare la un exponent natural.

Exemple:

i) $(1,2)^3 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,44 \cdot 1,2 = 1,728;$

$$\begin{array}{r} 1,44\cdot \\ 1,2 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1,728 \end{array}$$

ii) $(2,5)^3 \cdot (2,5)^7 = (2,5)^{3+7} = (2,5)^{10};$

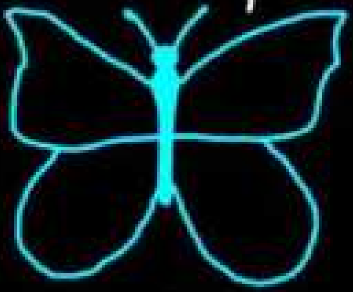
iii) $\left[(2,3)^7\right]^6 = (2,3)^{7\cdot 6} = (2,3)^{42}.$

Def. Orice număr care se poate scrie sub formă de fracție ordinară (deci și sub formă de fracție zecimală) s.n. număr rațional (pozitiv).

Exemple: $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{2}{4}$; 0,7; 5,73; 8; 4,65; etc.

O introducere în Teoria haosului

În practică, numărul 2,9997 se aproximează cu 3. Evident, diferența este „foarte mică" și nu ar putea influența în mod spectaculos rezultatul. Oare?



Efectul fluturelui: Dacă un fluture bate din aripi în București, atunci poate provoca o furtună în New York.

Să presupunem că avem o cutie cu ace ca în figura de mai jos.

Lăsăm să cadă în cutie o bilă de culoare verde.

Observăm că această bilă cade într-o anumită zonă. De exemplu, în zona F.

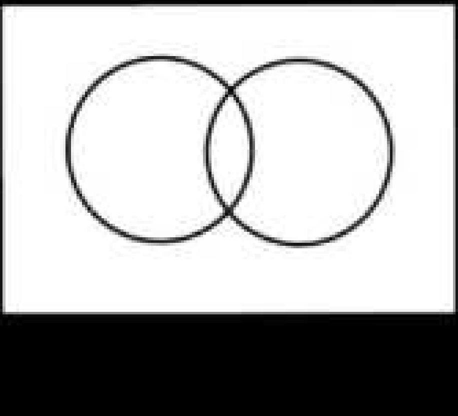
Dacă vom mai lăsa să cadă încă două bile identice, din aceeași poziție și cu aceeași viteză, ne-am aștepta ca acestea să cadă tot în zona F.

Acest lucru nu se întâmplă. Traiectoriile celorlalte două bile diferă deoarece ne este imposibil să le lăsăm să cadă din exact aceeași poziție și cu exact aceeași viteză.

Asadar, apar mici modificări inițiale (ca bătăile aripilor unui fluture) care produc schimbări majore.

Horia-George Georgescu

NOȚIUNEA DE MULȚIME



Noțiunea de mulțime
Relația dintre un element și o mulțime
Relații între mulțimi

„Definiție". O mulțime reprezintă o colecție de obiecte bine determinate și distincte denumite elementele mulțimii.

Exemple de mulțimi:

1. Mulțimea mașinilor înmatriculate în Arad
2. Mulțimea elevilor din școala noastră
3. Mulțimea literelor care formează cuvântul „elev".
4. Mulțimea divizorilor numărului 12.
5. Mulțimea tuturor numerelor naturale (Mulțimea numerelor naturale).

Notații. În general, mulțimile se notează cu litere mari: A, B, C, M etc.

Definiție. Două mulțimi A și B sunt egale dacă sunt formate din aceleași elemente.

Scriem în acest caz, $A = B$.

Def. O mulțime de numere s.n. mulțime numerică.

Modalități prin care putem să definim o mulțime

i) Enumerarea elementelor sale între două acolade.

Exemplu. $A = \{0,1,2,3\}$

Citim „mulțimea A este formată din elementele 0, 1, 2 și 3.

ii) Ținând cont de o proprietate comună a tuturor elementelor.

Exemplu. $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se mai poate scrie $B = \{x \mid x \text{ este cifră}\}$.

← „cu proprietatea că"

iii) Folosind diagramele Venn-Euler (linii curbe închise).

Exemplu. $C = \{1,3,7\}$ se mai poate reprezenta astfel:

⟵ diagramă Venn-Euler

Observatie. Într-o mulțime, nu contează în ce ordine reprezentăm elementele.

Exemplu. Mulțimea $A = \{1,2\}$ se poate scrie și $A = \{2,1\}$.

Observatie. Într-o mulțime, elementele trebuie să fie distincte (adică un element să apară o singură dată)

Exemplu. Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul „elev" este $\{e, l, v\}$.

Simbolul de apartenență ($\in$). (Relația de apartenență)

Dacă x este un element al mulțimii A vom scrie $x \in A$ și citim „x aparține mulțimii A" sau „mulțimea A conține elementul x".

Dacă x nu aparține mulțimii A, scriem $x \notin A$.

Exemplu. Dacă $B = \{1,2,3\}$, atunci $3 \in B$ și $5 \notin B$.

Relații între mulțimi

Def. Spunem că mulțimea A este o submulțime a mulțimii B dacă orice element din A aparține și mulțimii B.

În acest caz scriem $A \subseteq B$ și citim „mulțimea A este inclusă în mulțimea B."

Obs. Dacă $A \subseteq B$ putem scrie și $B \supseteq A$ și citim „mulțimea B include mulțimea A".

Obs. Dacă A nu este o submulțime a mulțimii B scriem $A \nsubseteq B$.

Obs. Dacă A este o submulțime a lui B și B conține un element care nu aparține lui A atunci A s.n. submulțime proprie (strictă) a mulțimii B și scriem $A \subset B$.

Obs. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $A \supseteq B$.

Def. Mulțimea submulțimilor unei mulțimi M se notează cu $\mathcal{P}(M)$ și se mai numește mulțimea părților lui M.

Def. Mulțimea care nu conține niciun element s.n. mulțimea vidă și se notează cu $\emptyset$ (simbol introdus de grupul Bourbaki) sau (mai rar) cu $\{\}$.

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Obs. Mulțimea vidă este o submulțime a oricărei mulțimi.

Exemplu. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,4,2,3\}$.

$A \subset B$; $B \subseteq C$; $B \not\subset A$;

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Prop. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu 2^n.

Mulțimi finite. Mulțimi infinite.

Def. Numărul de elemente ale unei mulțimi M s.n. cardinalul mulțimii M și se notează card(M) sau |M|.

Exemplu. $A = \{0,1,7\}$; $\text{card}(A) = 3$.

Def. O mulțime care are un număr finit de elemente (i.e. cardinalul este un număr natural) s.n. mulțime finită.

Exemple. i) $M = \{1,2,3\}$;

ii) Mulțimea divizorilor unui număr natural n.

$$D_n = \{x \text{ număr natural} \mid n \vdots x\}$$

Ex: $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

Def. O mulțime care nu este finită s.n. mulțime infinită.

Exemple.

i) Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Obs. Cardinalul mulțimii numerelor naturale este $\aleph_0$ (se citește alef-zero), concept introdus de către G. Cantor pentru cardinalitatea mulțimilor infinite.

ii) Mulțimea multiplilor unui număr natural

$$\mathcal{M}_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots n\}$$

Ex: $\mathcal{M}_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

Def. Complementara unei mulțimi B în raport cu mulțimea A este mulțimea formată din elementele lui A care nu aparțin lui B.

Notăm: $C_A B$

Exemplu: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$
$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$C_A B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $C_{\mathbb{N}} B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$.

Obs. Fie A, B și X trei mulțimi a.î. $A, B \subset X$.
Dacă $A \subset B$, atunci $C_X A \supset C_X B$.

Exemplu. $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $X = \mathbb{N}$;
Evident, $A \subset B$ și $C_X A = \{3, 4, 5, \dots\} \supset C_X B = \{5, 6, 7, \dots\}$.

Operații cu mulțimi

Fie A și B două mulțimi. Definim următoarele operații:

i) Reuniunea „∪"

$$A\cup B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \text{ sau } x\in B\}$$

(citim „A reunit cu B")

Obs. Reuniunea mulțimilor A și B este o mulțime notată cu $A\cup B$ care conține toate elementele mulțimii A și B (comune și necomune) luate o singură dată.

Exemplu: $A=\{1,2\}$; $B=\{2,3,5\}$

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$

ii) Intersecția „∩"

$$A\cap B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \text{ și } x\in B\}$$

(citim „A intersectat cu B")

Obs. Intersecția mulțimilor A și B este o mulțime notată cu $A\cap B$ care conține toate elementele comune mulțimilor A și B luate o singură dată.

Def. Dacă $A\cap B=\phi$ spunem că mulțimile A și B sunt disjuncte.

Exemplu. $A=\{1,2,3\}$; $B=\{1,3,5,7\}$; $C=\{7,9\}$

$A\cap B=\{1,3\}$.

$A\cap C=\phi$, deci A și C sunt disjuncte

Obs. „∪" și „∩" sunt operații comutative.

iii) Diferența „\" sau „−"

$$A-B=A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ și } x\notin B\}$$

(citim „A mai puțin B")

Obs. Diferența mulțimilor A și B este o mulțime notată cu $A\setminus B$ care conține elementele mulțimii A care nu se află în mulțimea B.

Exemplu. $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{1,3,5,7\}$

$A\setminus B=\{2,4\}$.

$B\setminus A=\{7\}$

Obs. $A\setminus B\neq B\setminus A$, deci „\" nu este comutativă.

Obs.

$A\setminus\{0\}\overset{not}{=}A^*$ (citim „A stelat" sau „A star")

Exemplu.

$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}=\{1,2,3,4,\ldots\}$ ← mulțimea numerelor naturale nenule.

Obs. $C_B A=B\setminus A$.

Scrierea unei reuniuni ca o reuniune de mulțimi disjuncte

Fie A și B două mulțimi.

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$$

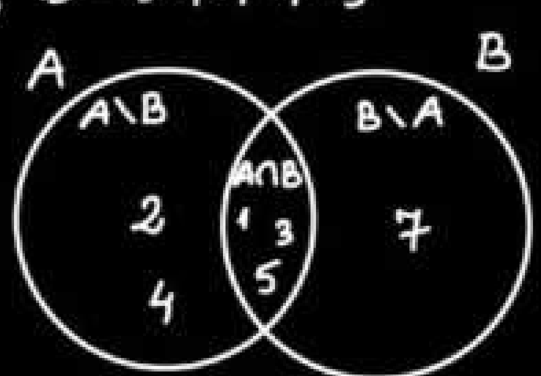
Exemplu. $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{1,3,5,7\}$

$A\cap B=\{1,3,5\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$

$A\setminus B=\{2,4\}$

$B\setminus A=\{7\}$



Def. Numim diferența simetrică a mulțimilor A și B operația notată cu „Δ" și definită astfel:

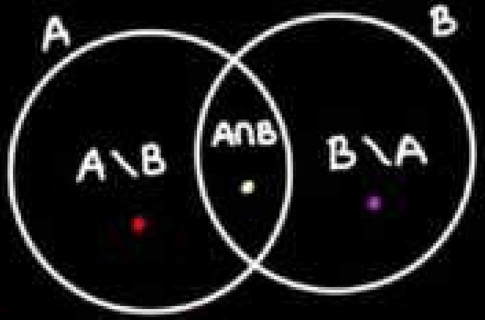
$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Principiul includerii si excluderii

Fie A și B două mulțimi. Atunci are loc relația:

$$\text{card}(A\cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cap B)$$

Dem.



$$|A\setminus B| + |A\cap B| = |A|$$
$$|B\setminus A| + |A\cap B| = |B|$$
$$\oplus\ |A\setminus B| + |B\setminus A| + 2|A\cap B| = |A| + |B|$$

Dar $|A\setminus B| + |B\setminus A| + |A\cap B| = |A\cup B|$

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

$$\underbrace{\bullet+\bullet+\bullet}_{|A\cup B|} = \underbrace{\bullet+\bullet}_{|A|} + \underbrace{\bullet+\bullet}_{|B|} - \underbrace{\bullet}_{|A\cap B|}$$

Exemplu:

Scolile dintr-un oras folosesc platforma Google Classroom sau Microsoft Teams: 47 folosesc Google Classroom, 56 folosesc Microsoft Teams și 23 folosesc ambele platforme. Câte școli se află în oraș?

Notăm cu G mulțimea școlilor care folosesc Google Classroom și cu M mulțimea școlilor care folosesc Microsoft Teams. Aplicând principiul includerii și excluderii, obținem:

$$|G\cup M| = |G| + |M| - |G\cap M|$$

Ca atare,

$$|G\cup M| = 47 + 56 - 23 = 80.$$

În concluzie, în oraș se află 80 de școli.

Proprietățile operațiilor „∪" și „∩"

Considerăm mulțimile A, B și C.

(i) Comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(ii) Asociativitatea: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

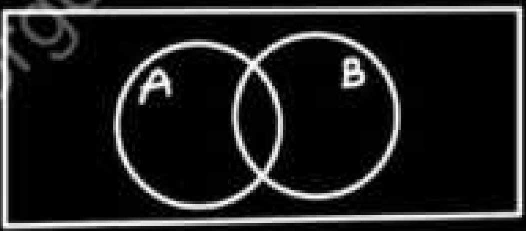
(iii) Distributivitatea

Reuniunii față de intersecție: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Intersecției față de reuniune: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Legile lui De Morgan

Considerăm mulțimile A și B.



I. $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

II. $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ ($\complement A$ reprezintă complementara mulțimii A)

Dem.

I. Trebuie demonstrat că $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$ și $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$.

Fie $x \in \complement(A \cup B)$, atunci $x \notin A \cup B$, deci $x \notin A$ și $x \notin B$.

Prin urmare, $x \in \complement A$ și $x \in \complement B$, deci $x \in \complement A \cap \complement B$.

Așadar, $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$ (1)

Fie acum $x \in \complement A \cap \complement B$, atunci $x \in \complement A$ și $x \in \complement B$, deci $x \notin A$ și $x \notin B$.

Prin urmare, $x \notin A \cup B$, deci $x \in \complement(A \cup B)$.

Ca atare, $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă concluzia.

II. Similar (exercițiu).

Paradoxul lui Russell

Variante:

I. Paradoxul bărbierului

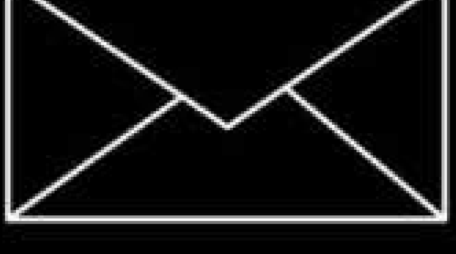
Într-un sat, toți locuitorii care nu se bărbieresc singuri sunt bărbieriți de Figaro, bărbierul satului.

Cine îl bărbierește pe Figaro?

II. Paradoxul poștașului

Într-un sat, poștașul aduce corespondența doar locuitorilor care nu o ridică personal de la oficiul postal.

Poștașul poate să-și ridice singur scrisorile?



Obs.

Se pare că noțiunea de mulțime a tuturor mulțimilor este contradictorie.

Horia-George Georgescu

ELEMENTE DE ARITMETICĂ
DIVIZIBILITATE

$a|b$

Divizibilitate
Elemente introductive

Def. Spunem că numărul natural $a \neq 0$ divide numărul natural b dacă există un număr natural c a.î. $a \cdot c = b$.

Exemplu: 3 divide 18 deoarece există $c = 6$ a.î. $3 \cdot 6 = 18$.

În acest caz, scriem $a \mid b$ și citim „a divide b" sau putem scrie $b \vdots a$ și citim „b este divizibil cu a".

$$\underset{\text{divizor}}{a} \mid b \longleftarrow \text{multiplu}$$

Obs. În general, se definește $a \mid b$ pentru a nenul.

Obs. În cazul numerelor naturale, $a \mid b$ dacă b se împarte exact (cu rest 0) la a.

Exemple: $\underset{(4=2\cdot2)}{2 \mid 4}$; $\underset{(6=3\cdot2)}{6 \vdots 3}$; $2 \overset{\text{"nu divide"}}{\nmid} 5$; $\underset{(25=5\cdot5)}{25 \vdots 5}$; $\underset{(213=3\cdot71)}{213 \vdots 3}$.

$\underset{42:7=6 \text{ rest } 0}{7 \mid 42}$; $\underset{42:14=3 \text{ rest } 0}{14 \mid 42}$; $\underset{12:3=4 \text{ rest } 0}{3 \mid 12}$ etc.

Obs. Fie a un număr natural. Notăm cu $\mathcal{D}_a$ mulțimea divizorilor lui a și cu $\mathcal{M}_a$ mulțimea multiplilor lui a.

Exemplu: $\mathcal{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$; $\mathcal{M}_4 = \{0, 4, 8, 12, 14, \dots, 4 \cdot k, \dots\}$ unde k este un număr natural.

Def. Un număr care are exact doi divizori s.n. număr prim.

Șirul numerelor prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... .

Def. Un număr care nu este prim s.n. număr compus.

Exemple: 8, 16, 22 etc.

Conjectura lui Goldbach. Orice număr par mai mare decât 2 se poate scrie ca sumă de două numere prime.

Exemple: $8=3+5$; $12=5+7$; $20=13+7$ etc.

Prop. Dacă p este prim, atunci $p=4k+1$ sau $p=4k+3$.

Proprietățile relației de divizibilitate

①. Orice număr natural este divizibil cu 1.

$1|a, \ \forall a\in\mathbb{N}$ **Exemple:** $1|3$; $1|5$; $1|3125$;

② 0 este divizibil cu orice număr natural

$a|0, \ \forall a\in\mathbb{N}^*$ **Exemple:** $3|0$; $5|0$; $3125|0$;

③ Orice număr se divide cu el însuși. (Reflexivitate)

$a|a, \ \forall a\in\mathbb{N}^*$ **Exemple:** $5|5$; $7|7$; $3126|3126$;

④. Dacă $a|b$ și $b|a$ atunci $a=b$. (Antisimetrie)
$a,b\in\mathbb{N}^*$

Justificare:

$a|b \Rightarrow \exists\ k_1\in\mathbb{N}$ a.î. $b=ak_1$

$b|a \Rightarrow \exists\ k_2\in\mathbb{N}$ a.î. $a=bk_2 \Rightarrow a=ak_1k_2 \ |:a$

$\Rightarrow k_1k_2=1$, deci $k_1=k_2=1$.
$k_1,k_2\in\mathbb{N}$

În concluzie, $a=b$.

⑤. Dacă $a|b$ și $b|c$, atunci $a|c$, unde $a,b,c\in\mathbb{N}^*$.
(Tranzitivitate)

Exemplu: $3|9$ și $9|27 \Rightarrow 3|27$.

Justificare (exercițiu)

⑥ Fie $a,b \in \mathbb{N}^*$ cu $a \geq b$. Dacă $d|a$ și $d|b$ atunci $d|a \pm b$.

Exemplu: $2|6$ și $2|4 \Rightarrow 2|6 \pm 4$.

Justificare:

$d|a \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $a = dk_1$ (1)

$d|b \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $b = dk_2$ (2)

$\oplus$ $a+b = d(k_1+k_2)$, deci $d|a+b$.

Similar, scădem relațiile (1) și (2) și obținem $d|a-b$.

⑦ Fie $a,b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$. Dacă $a|b$ atunci $a|k \cdot b$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplu: $3|21 \Rightarrow 3|\underbrace{1735}_{k} \cdot 21$

Justificare (exercițiu).

• Divizori proprii. Divizori improprii. •

Fie n un număr natural.

Numerele 1 și n s.n. divizori improprii, iar ceilalți divizori s.n. divizori proprii.

Exemplu. Pentru numărul 12 avem:

divizori improprii: 1 și 12

divizori proprii: 2, 3, 4, 6.

Obs. Un număr natural mai mare decât 1 este număr prim dacă are doar divizori improprii.

Criterii de divizibilitate

i) Criteriul de divizibilitate cu 2

Un număr natural este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8.

Exemple: $2 \mid 466$; $2 \mid 1854$; $2 \mid 135798$;

ii) Criteriul de divizibilitate cu 3

Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3.

Exemplu: $3 \mid 123411$ deoarece $1+2+3+4+1+1=12$ și $12 \vdots 3$.

Dem. (Cazul unui număr de 3 cifre)

Vrem să demonstrăm următorul fapt:

$$\overline{abc} \vdots 3 \Leftrightarrow a+b+c \vdots 3$$

„$\Rightarrow$" Cum $\overline{abc} \vdots 3$ rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $\overline{abc} = 3k$.

Dar $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$

$\overline{abc} = 3k \Leftrightarrow 3k = 99a + 9b + a + b + c$

$$3k - 99a - 9b = a + b + c$$

$$3(k - 33a - 3b) = a + b + c, \text{ deci } a+b+c \vdots 3.$$

„$\Leftarrow$" Cum $a+b+c \vdots 3$ rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $a+b+c = 3k$.

$$\overline{abc} = a+b+c+99a+9b = 3k+99a+9b$$

$$\overline{abc} = 3(k+33a+3b), \text{ deci } \overline{abc} \vdots 3.$$

(iii) Criteriul de divizibilitate cu 4

Un număr natural este divizibil cu 4 dacă si numai dacă ultimele două cifre ale sale formează un număr divizibil cu 4.

Exemplu: $4 \mid 12324$ deoarece $24 \vdots 4$.

(iv) Criteriul de divizibilitate cu 5

Un număr natural este divizibil cu 5 dacă și numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

Exemple: $5 \mid 1230$; $5 \mid 1725$; $5 \nmid 1236$;

(v) Criteriul de divizibilitate cu 7 (Variantă)

Un număr natural este divizibil cu 7 dacă și numai dacă atunci când scriem descompunerea lui în baza 10 și înlocuim baza 10 cu 3 rezultatul ne dă un număr divizibil cu 7.

Exemplu: $7 \mid 8638$ deoarece $8638 = 8\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 8$ și $8\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 8 = 216 + 54 + 9 + 8 = 287 \vdots 7$.

Dem. (Cazul unui număr de trei cifre)

"$\Leftarrow$" Vreau să demonstrez că dacă $a\cdot 3^2 + b\cdot 3^1 + c\cdot 3^0 \vdots 7$ atunci $a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c\cdot 10^0 = \overline{abc} \vdots 7$.

Deoarece $9a+3b+c \vdots 7$ rezultă că există $K \in \mathbb{N}$ a.î. $9a+3b+c = 7K$.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 91a + 7b + 9a + 3b + c$$

$$\overline{abc} = 91a + 7b + 7K = 7(13a+b+c), \text{ deci}$$

$$\overline{abc} \vdots 7.$$

"$\Rightarrow$" Exercițiu.

VI • Criteriul de divizibilitate cu 2^k, $k \geq 1$

Un număr natural este divizibil cu 2^k dacă și numai dacă ultimele k cifre ale sale formează un număr divizibil cu 2^k.

Dem.

Vreau să demonstrez că

$$(*)\ \overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 2^k \Leftrightarrow \overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n} \vdots 2^k$$

Cazuri particulare

Dacă $k=1 \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 2 \Leftrightarrow \overline{a_n} \vdots 2$

$k=2 \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n} \vdots 4$

Dem(*)

"$\Rightarrow$" $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 2^k \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{N}$ a.î.

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = q \cdot 2^k$.

Obs. $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}} \cdot 10^k +$
$\overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n}$

Așadar,

$$\overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_n} - 10^k\,\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}}$$
$$= q \cdot 2^k - 2^k \cdot 5^k \cdot \overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}}$$
$$= 2^k(q - 5^k \cdot \overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}}) \vdots 2^k$$

"⇐" $\overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\dots a_n} \vdots 2^k \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$

a.î. $\overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\dots a_n} = q\cdot 2^k$.

$$\overline{a_1a_2\dots a_n} = \overline{a_1a_2\dots a_{n-k}}\cdot 10^k + \overline{a_{n-k+1}a_{n-k+2}\dots a_n} = 2^k\cdot 5^k\,\overline{a_1a_2\dots a_{n-k}} + q\cdot 2^k = 2^k(5^k\,\overline{a_1a_2\dots a_{n-k}} + q) \vdots 2^k.$$

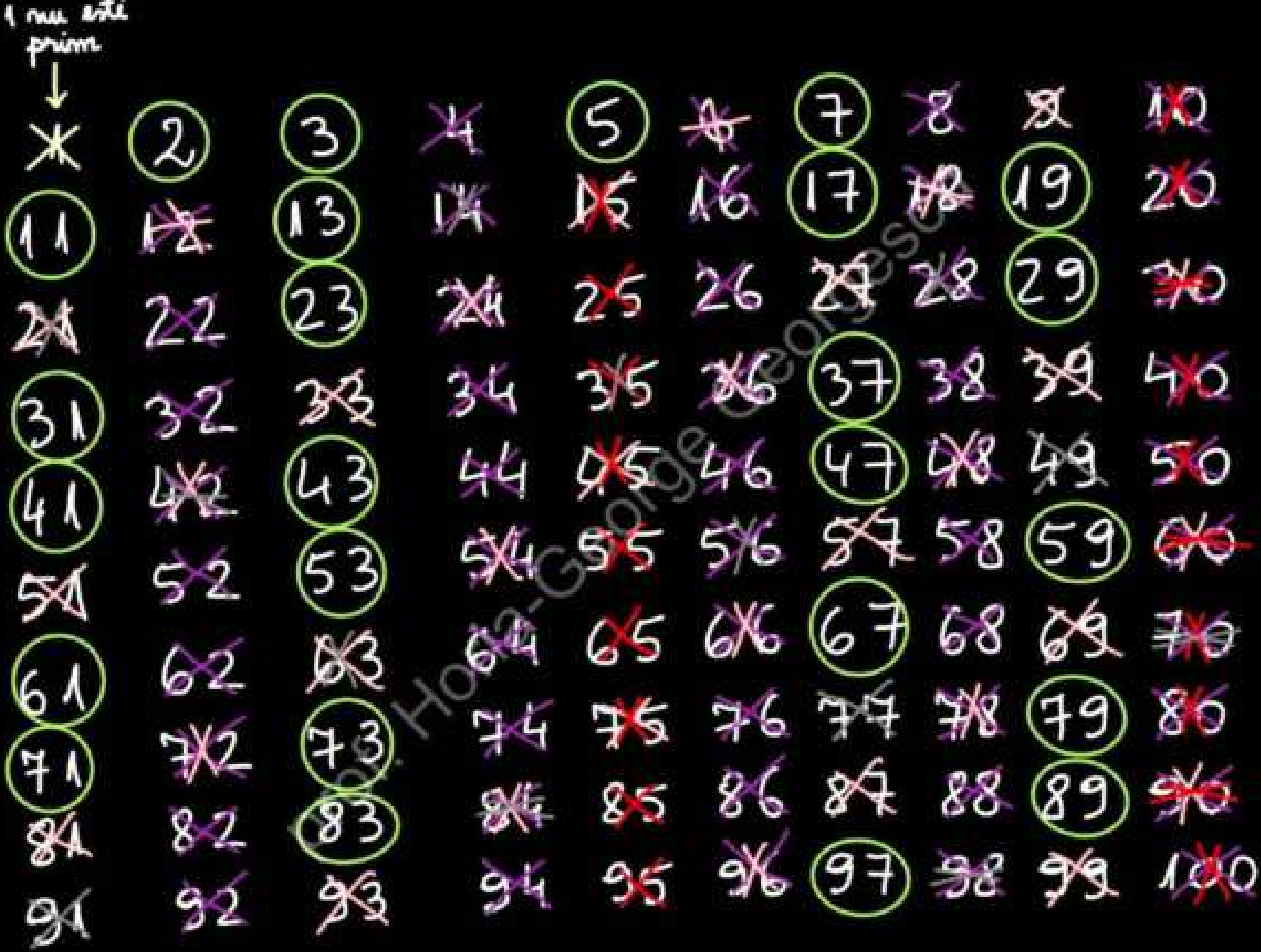
Similar se demonstrează următorul criteriu de divizibilitate cu 5^k, $k\geq 1$.

- Criteriul de divizibilitate cu 5^k, $k\geq 1$ •

Un număr natural este divizibil cu 5^k dacă și numai dacă ultimele k cifre ale sale formează un număr divizibil cu 5^k.

Ciurul lui Eratostene

Obiectiv: Determinarea numerelor prime mai mici decât 100 eliminând numerele compuse (folosind criterii de divizibilitate).



1 nu este prim
↓

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

× multiplu de 2

× multiplu de 3

× multiplu de 5

× multiplu de 7

○ număr prim

vi) Criteriul de divizibilitate cu 9

Un număr natural este divizibil cu 9 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 9.

Exemplu: $9 \mid 7146$ deoarece $7+1+4+6=18$ și $18 \vdots 9$.

vii) Criteriul de divizibilitate cu 10^n

Un număr natural este divizibil cu 10^n dacă și numai dacă se termină în (cel puțin) n cifre de 0.

Exemple: $10 \mid 120$; $10 \mid 1200$; $100=10^2 \mid 1700$; $1000=10^3 \mid 123400000$.

Def. Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor naturale prime.

$$\mathcal{P}=\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ este prim}\}$$

Teoremă. Mulțimea numerelor prime este infinită. (Adică există o infinitate de numere prime)

$$\mathcal{P}=\{p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ \ldots\}$$

Dem 1 (Euclid)

Presupunem prin reducere la absurd că mulțimea numerelor prime este finită și $\operatorname{card}(\mathcal{P})=n$, $n \in \mathbb{N}$.

Așadar, $\mathcal{P}=\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ cu $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

Fie numărul natural $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Dacă N este prim atunci am construit un nou număr prim mai mare decât p_n.

Dacă N este compus, fie p un număr prim a.î. $p | N$. Dacă $p \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ atunci $p = p_k$ cu $1 \leq k \leq n$ a.î. $p_k | N$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cum } p_k | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \\ \text{și } p_k | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot \ldots \cdot p_n \\ \qquad\qquad \text{(evident)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$p_k | \cancel{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n} + 1 - \cancel{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}$$

$\Rightarrow p_k | 1 \Rightarrow p_k = 1$ (contradicție deoarece $p_k \in \mathcal{P}$ și $1 \notin \mathcal{P}$).

Așadar, $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$, deci am reușit să găsim un nou număr prim $p > p_n$ care nu se afla în $\mathcal{P}$.

Repetând raționamentul, putem genera de fiecare dată un nou număr prim.

În concluzie, mulțimea numerelor prime este infinită.

□

Obs. Esența este că $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ fie este număr prim, fie este un număr compus care are în descompunerea sa numere prime mai mari decât „ultimul" p_n considerat.

Dem 2. (P. Erdős) (Liceu)

Demonstrația se bazează pe faptul că orice număr natural admite o unică descompunere în factori primi (factorizare) între un număr liber de pătrate (care nu are pătrate perfecte în descompunere) și pătratul unui alt număr.

Adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $r \in \mathbb{N}$ liber de pătrate și $s \in \mathbb{N}$ a.î. $n = rs^2$.

Exemplu: $48 = 3 \cdot 4^2$;

$75600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 21 \cdot 60^2$

Obs. $21 = 3 \cdot 7$ (liber de pătrate).

Fie $N \in \mathbb{N}^*$ și K numărul numerelor prime mai mici decât N.

Notăm aceste numere prime cu $p_1, p_2, \ldots, p_K$

Orice număr natural mai mic sau egal cu N are o unică scriere de forma $(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_K^{e_K}) \cdot s^2$, unde $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_K^{e_K}$ să fie liber de pătrate (i.e. $e_i = 0$ sau $e_i = 1$, $i = \overline{1, K}$).

Evident există $|\mathcal{P}(\{p_1, \ldots, p_K\})| = 2^K$ moduri în care putem forma partea liberă de pătrate $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_K^{e_K}$ și s^2 poate să fie cel mult egal cu N, deci $s < \sqrt{N}$.

Ca atare, cel mult $2^K\sqrt{N}$ numere se pot scrie sub această formă.

Cu alte cuvinte $N \leq 2^K\sqrt{N}$, deci $\frac{N}{\sqrt{N}} \leq 2^K$, de unde $\sqrt{N} \leq 2^K$, adică $K \geqslant \log_2\sqrt{N} = \frac{1}{2}\log_2 N$

Cum N a fost ales arbitrar, K poate să fie oricât de mare dorim alegând N în mod corespunzător (convenabil).

$\square$

Teorema fundamentală a aritmeticii (T.F.Ar).

Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de numere prime (eventual la diferite puteri). În plus, această scriere este unică, făcând abstracție de ordinea factorilor.

(Euclid și Gauss)

Obs. Scrierea unui număr natural compus ca produs de numere prime s.n. descompunerea numărului în factori primi (factorizare).

Prop. Dacă p este prim și $p \mid ab$ atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$.

Exemple: $12 = 2^2 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $242 = 2 \cdot 11^2$;

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2\cdot 5 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 7 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 252 & 3\cdot 3 \\ 28 & 2\cdot 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

De ce 1 nu este nici prim, nici compus?

Numărul divizorilor unui număr $n \in \mathbb{N}^*$

Notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor numărului natural n.

Obs. $\tau(n) = \text{card}(\mathcal{D}_n)$

Obs. Dacă $p \in \mathbb{N}$ este un număr prim, atunci $\tau(p) = 2$.

Teoremă. Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr compus și $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ descompunerea numărului n în factori primi $p_1, \ldots, p_n$.

Atunci $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$.

Dem. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primi și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

Un divizor al lui n este de forma $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$, unde $0 \leq e_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq e_2 \leq \alpha_2, \ldots,$ $0 \leq e_n \leq \alpha_n$.

Pentru fiecare e_1 avem $\alpha_1 + 1$ variante, pentru fiecare variantă din cele $\alpha_1 + 1$ avem $\alpha_2 + 1$ variante pentru e_2 ș.a.m.d.

În total, n are $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$ divizori. □

Exemplu: $18 = 2^1 \cdot 3^2$, deci $\tau(18) = (1+1) \cdot (2+1) = 2 \cdot 3 = 6$.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c)

Def. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Numărul $d \in \mathbb{N}^*$ este c.m.m.d.c al numerelor a și b dacă $d | a$, $d | b$ și pentru oricare alt număr natural d' a.î. $d' | a$ și $d' | b$ să rezulte că $d' | d$.

Notăm $d =$ c.m.m.d.c $(a, b) = (a, b) =$ g.c.d.(a, b)

"greatest common divisor"

Obs. c.m.m.d.c.$(a, b) = \max(\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b)$.

Obs. c.m.m.d.c.(a, b) este cel mai mare număr natural d a.î. $d|a$ și $d|b$.

Exemplu: $\mathcal{D}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\mathcal{D}_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$\mathcal{D}_{12} \cap \mathcal{D}_{18} = \{1, 2, 3, \underline{\underline{6}}\} \Rightarrow$ c.m.m.d.c.$(12, 18) = 6$.

Algoritmi prin care putem determina c.m.m.d.c (a, b).

Ⅰ. Metoda clasică

Pasul I. Descompunem numerele în factori primi.

Pasul II. Cel mai mare divizor comun este egal cu produsul factorilor primi comuni (din descompuneri) luați o singură dată la puterile cele mai mici.

Exemplu: c.m.m.d.c$(2520, 8316) = ?$

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$

Factorii comuni sunt: 2, 3 și 7.

2520	2·5
252	2
126	2
63	7
9	3
3	3
1	

8316	2
4158	2
2079	3
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

Așadar,

$$\text{c.m.m.d.c}(2520, 8316) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 36 \cdot 7 = 252.$$

Ⅱ. Algoritmul lui Euclid

Pasul I. Împărțim numărul mai mare la numărul mai mic.

Pasul II. Împărțim succesiv împărțitorul la rest până când obținem restul 0.

Pasul III. Ultimul rest nenul reprezintă c.m.m.d.c..

Exemplu:

$$\text{c.m.m.d.c}(2520, 8316) = ?$$

D ↑ C R ultimul rest nenul

$8316 : 2520 = 3$, rest 756

$2520 : 756 = 3$, rest $\boxed{252}$ ← c.m.m.d.c

$756 : 252 = 3$, rest $\underline{\underline{0}}$

În concluzie, $\text{c.m.m.d.c}(2520, 8316) = 252$.

Def. Două numere naturale a și b s.n. prime între ele (relativ prime) dacă $\text{c.m.m.d.c}(a,b) = 1$.

Exemple: 2 și 7 ; 11 și 16 ; 6 și 35 etc.

Prop. Dacă a și b sunt numere prime distincte, atunci a și b sînt prime între ele.

Prop. Dacă $d = \text{c.m.m.d.c}(a,b)$ atunci există k și q două numere naturale prime între ele a.î. $a = d \cdot k$ și $b = d \cdot q$.

Teoremă (Gauss). Dacă $a \mid bc$ și $(a,b) = 1$, atunci $a \mid c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dem. (exercițiu)

Cel mai mic multiplu comun nenul (c.m.m.m.c)

Def. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Numărul $m \in \mathbb{N}^*$ este c.m.m.m.c al numerelor a și b dacă $a \mid m$, $b \mid m$ și pentru oricare alt număr natural m' a.î. $a \mid m'$ și $b \mid m'$ să rezulte că $m \mid m'$.

Notăm $m = \text{c.m.m.m.c}(a,b) = [a,b] = \text{l.c.m.}(a,b)$

„least common multiple"

Obs. c.m.m.m.c.$(a,b) = \min(\mathcal{M}_a^* \cap \mathcal{M}_b^*)$.

Obs. c.m.m.m.c.(a,b) este cel mai mic număr natural nenul m a.î. $a|m$ și $b|m$.

Exemplu

$$\mathcal{M}_{12}^* = \{12, 24, 36, 48, 60, 72 \ldots, 12k, \ldots\},\ k \in \mathbb{N}^*$$
$$\mathcal{M}_{18}^* = \{18, 36, 54, 72, \ldots, 18k, \ldots\},\ k \in \mathbb{N}^*$$
$\min(\mathcal{M}_{12}^* \cap \mathcal{M}_{18}^*) = \min\{36, 72, \ldots\} = 36$, deci c.m.m.m.c$(12,18)=36$.

Algoritmi prin care putem determina c.m.m.m.c (a,b).

Metoda clasică

Pasul I. Descompunem numerele în factori primi.

Pasul II. Cel mai mic multiplu comun este egal cu produsul factorilor primi comuni și necomuni (din descompuneri) luați o singură dată la puterile cele mai mari.

Exemplu: c.m.m.m.c$(2520, 8316) = ?$

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$

Factorii comuni și necomuni (toți factorii) sunt: 2, 3, 5, 7 și 11.

2520	2·5
252	2
126	2
63	7
9	3
3	3
1	

8316	2
4158	2
2079	3
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

Așadar,

c.m.m.m.c$(2520, 8316) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 83160$

Teoremă. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Atunci $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

Dem. Fie $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}$ și $b = p_1^{\alpha_1'} p_2^{\alpha_2'} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n'} r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \ldots r_t^{\gamma_t}$, unde p_i, q_j, r_k sunt prime și $\alpha_i, \alpha_i', \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{N}, i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,t}$

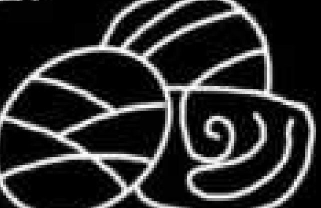
$(a,b) \cdot [a,b] = p_1^{\min(\alpha_1,\alpha_1')} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\alpha_2')} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n,\alpha_n')} \cdot p_1^{\max(\alpha_1,\alpha_1')} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\alpha_2')} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n,\alpha_n')} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot r_t^{\gamma_t} = p_1^{\alpha_1+\alpha_1'} \cdot p_2^{\alpha_2+\alpha_2'} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n+\alpha_n'} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot r_t^{\gamma_t}$
$= a \cdot b$.

Exemplu. $(2520, 8316) \cdot [2520, 8316] = 252 \cdot 83160 = 2520 \cdot 8316$

(Verificare: exercițiu)

Probleme care fac trimitere la alte discipline

1. Charlie și fabrica de ciocolată



Fabrica lui Willy Wonka a produs într-o zi 1110 bomboane de ciocolată albă și 1554 bomboane de ciocolată neagră.
Acesta dorește să ambaleze toate bomboanele în cutii identice astfel încât să obțină cât mai multe cutii și fiecare cutie să aibă același număr de bomboane de ciocolată albă și același număr de bomboane de ciocolată neagră.
Care este numărul total al cutiilor și câte bomboane de fiecare tip se află în fiecare cutie?

2. Is this a Kind of magic?

Fostul solist al trupei Queen, Freddie Mercury, s-a născut în anul 1946, David Bowie în anul 1947, iar Michael Jackson în anul 1958.

Un lucru interesant este faptul că toți acești ani sunt numere naturale care au exact 6 divizori. Verificați acest fapt și apoi studiați dacă în spate se ascunde ceva magic și într-adevăr toți marii cântăreți s-au născut în ani cu această proprietate.

Indiciu: Puteți studia ce se întâmplă în cazul marilor cântăreți născuți în Mississipi, USA. Cu certitudine o să găsiți un exemplu din Tupelo.

Horia-George Georgescu

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Raportul a două numere

Def. Considerăm a și b două numere raționale nenegative cu b nenul.

Scrierea $a : b = \frac{a}{b}$ reprezintă raportul numerelor a și b.

Numerele a și b s.n. termenii raportului.

Exemplu: Raportul numerelor 3 și 4 este $\frac{3}{4}$.

Def. Considerăm raportul $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt două numere raționale nenegative cu b nenul.

Rezultatul împărțirii numărului a la b s.n. valoarea raportului $\frac{a}{b}$ și se notează în general cu k.

Exemplu: Dacă într-o clasă sunt 10 fete și 16 băieți, atunci raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este $\frac{10}{16}$, iar valoarea raportului este 0,625.

Obs. Atunci când dorim să scriem raportul a două mărimi de aceeași natură, trebuie să ne asigurăm că sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

Exemplu: Considerăm un dreptunghi cu lățimea de 80 cm și lungimea de 1 m.

Raportul dintre lățime și lungime este

$$\frac{80\,\text{cm}}{100\,\text{cm}} = \frac{8^{(2}}{10} = \frac{4}{5}.$$

Obs. Există și rapoarte în care apar cantități (mărimi) diferite.

Exemple:

viteza: $v = \frac{\text{distanța}}{\text{timp}} \left(\frac{m}{s}\right)$

densitatea: $\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volum}} \left(\frac{Kg}{m^3}\right)$

presiunea: $p = \frac{\text{forța}}{\text{suprafață}} \left(\frac{N}{m^2}\right)$

intensitatea curentului electric (legea lui Ohm):

$$\underset{\substack{\swarrow\\ \text{intensitatea curentului}\\ \text{(A amperi)}\\ \text{u.m.}}}{I} = \frac{U \leftarrow \text{tensiunea aplicată } \overset{\text{u.m.}}{\text{(V volți)}}}{R \leftarrow \text{rezistența circuitului } (\Omega \text{ ohmi})}$$

Alte exemple de rapoarte utilizate în practică.

(i) Scara unei hărți

$$S_h = \frac{\text{distanța pe hartă}}{\underset{\text{(în realitate)}}{\text{distanța pe teren}}} = \frac{d_h}{d_t}$$

În practică, se folosește scrierea $S_h = \dfrac{1}{\frac{d_t}{d_h}}$

Exemplu:

$d_h = 8$ cm;

$d_t = 80$ Km $= 8000000$ cm

$$\frac{d_t}{d_h} = \frac{8000000}{8} = 1000000$$

$$S_h = \frac{1}{1000000}.$$

(ii) Concentrația unei soluții

$$C_s = \frac{m_s}{M_s}$$

← masa substanței care se dizolvă

← masa soluției

Exemplu:

Dizolvăm 16g de sare în 112g de apă.

$$C_s = \frac{16}{16+112} = \frac{16}{128} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

(iii) Titlul unui aliaj

$$T_a = \frac{m_p}{M_a}$$

← masa metalului prețios

← masa aliajului

Exemplu:

Un aliaj conține 260g aur și 2240g cupru.

$$T_a = \frac{260}{260+2240} = \frac{260}{2500} = 0{,}104.$$

(iv) Raport procentual

„p la sută" → $p\% = \frac{p}{100}$; Exemplu: 25% din 8 $= \frac{25}{100}\cdot 8 = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2.$

Introducere în teoria probabilităților

Teoria modernă: Andrei Kolmogorov

Teoria probabilităților este teoria care studiază și modelează matematic fenomenele aleatoare (întâmplătoare).

Probabilitatea unui eveniment A se poate calcula folosind următoarea formulă (Pascal-Bernoulli):

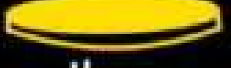
$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} \overset{\text{not}}{=} \frac{N_f(A)}{N_p(A)}$$

Obs. Probabilitatea oricărui eveniment aleator este un număr nenegativ, subunitar.

Obs. Evenimentului imposibil i se atribuie probabilitatea 0, iar evenimentului sigur probabilitatea 1.

Exemple:

(i) Se aruncă o monedă. Care este probabilitatea să cadă cu stema în sus?



A: „moneda cade cu stema în sus"

Cazuri favorabile: stema, deci $N_f(A) = 1$.

Cazuri posibile: ban și stemă, deci $N_p(A) = 2$.

Ca atare,

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

(ii) Se aruncă un zar. Care este probabilitatea să apară o față cu un număr prim de puncte?

B: „fața să aibă un număr prim de puncte"

Caz. fav.: ⚁ ⚂ ⚄ , deci $N_f(B)=3$.

Caz. pos.: ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅, deci $N_p(B)=6$.

Așadar,

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%.$$

(iii) Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea să obținem o dublă?

D: „obținem o dublă"

Caz. fav.: 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, deci $N_f(D)=6$.

Caz. pos.: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6,
2-1, 2-2, ..., 6-1, 6-2, 6-3,
6-4, 6-5, 6-6, deci $N_p(D)=6\cdot 6=36$.

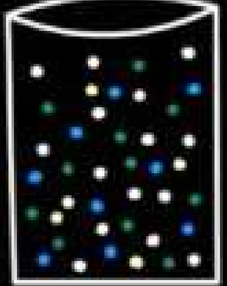
Ca atare,

$$P(D)=\frac{6^{(6}}{36}=\frac{1}{6}=0{,}1(6)\approx 0{,}17=17\%.$$

(iv) Într-o urnă sunt 11 bile verzi, 9 bile albastre, 16 bile albe și 4 bile galbene.

a) Care este probabilitatea să extragem o bilă albă?

b) Care este probabilitatea să extragem o bilă care nu este galbenă?



A: „extragem o bilă albă"

$N_f(A)=16$; $N_p(A)=11+9+16+4=40$;

$$P(A)=\frac{16^{(8}}{40}=\frac{2}{5}=0{,}4=40\%.$$

B: „extragem o bilă galbenă"

eveniment contrar → $\overline{B}$: „extragem o bilă care să nu fie galbenă"

$N_f(\overline{B}) = 11+9+16 = 36$; $N_p(\overline{B}) = 40$;

$P(\overline{B}) = \frac{36^{(4}}{40} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$ (șanse ca bila să NU fie galbenă)

$N_f(B) = 4$; $N_p(B) = 40$; $\Rightarrow P(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 10\%$ (șanse ca bila să fie galbenă).

Obs. $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

Proporții

Proprietatea fundamentală a proporțiilor

Def. O egalitate a două rapoarte s.n. proporție.

Forma generală a unei proporții este:

$$\frac{\text{extrem}\rightarrow a}{\text{mez}\rightarrow b} = \frac{c \leftarrow \text{mez}}{d \leftarrow \text{extrem}} \quad , \ b, d \neq 0.$$

a și d s.n. extremi, iar b și c s.n. mezi.

Exemplu: $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; extremii : 5 și 14
mezii : 7 și 10

Obs. Scrierea $\frac{16}{2} = 8$ nu este o proporție în sensul definiției, dar se poate scrie sub formă de proporție astfel: $\frac{16}{2} = \frac{8}{1}$.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor (P.F.P)

În orice proporție, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{\text{P.F.P}}{\Leftrightarrow} a \cdot d = b \cdot c \quad , \ b, d \neq 0$$

Exemplu: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Leftrightarrow 2 \cdot 21 = 7 \cdot 6$.

$\frac{3}{5} \neq \frac{2}{3}$, deoarece $3 \cdot 3 \neq 5 \cdot 2$.

Proporții derivate

Pornind de la o proporție putem obține proporții noi (proporții derivate din proporția inițială).

Modalități prin care obținem proporții derivate:

(i) Schimbăm mezii între ei. $a, b, c, d \neq 0$.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

Exemplu: $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \Leftrightarrow \frac{2}{6}=\frac{7}{21}$.

(ii) Schimbăm extremii între ei.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

Exemplu: $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \Leftrightarrow \frac{21}{7}=\frac{6}{2}$.

(iii) Inversăm ambele rapoarte.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \overset{3}{\Leftrightarrow} \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

Exemplu: $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \Leftrightarrow \frac{7}{2}=\frac{21}{6}$.

(iv) Înmulțim ambele rapoarte cu un număr nenul.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \,\Big|\cdot e \Leftrightarrow \frac{ae}{b}=\frac{ce}{d}$$

Exemple: $\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \,\Big|\cdot 3 \Leftrightarrow \frac{6}{7}=\frac{18}{21}$.

$$\frac{2}{7}=\frac{6}{21} \,\Big|\cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{14}=\frac{6}{42}$$

(v) Adunăm un număr la ambele rapoarte.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \,\Big| + m \Leftrightarrow \frac{a}{b}+m=\frac{c}{d}+m.$$

Exemplu: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Big| +2 \Leftrightarrow \frac{2}{7} + 2 = \frac{6}{21} + 2$

$\Leftrightarrow \frac{2}{7} + {}^{7)}\frac{2}{1} = \frac{6}{21} + {}^{21)}\frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{2}{7} + \frac{14}{7} = \frac{6}{21} + \frac{42}{21} \Leftrightarrow \frac{16}{7} = \frac{48}{21}$

Obs. Dacă $n=1$ atunci obținem o nouă proporție adunând numitorul la numărător în ambele rapoarte.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Big| +1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + {}^{b)}1 = \frac{c}{d} + {}^{d)}1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Exemplu: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Leftrightarrow \frac{2+7}{7} = \frac{6+21}{21} \Leftrightarrow \frac{9}{7} = \frac{27}{21}$

Fracții (rapoarte) supraetajate:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Așadar,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Exemple:

ⓘ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$

ii) $\frac{2}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{6}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 6} = \frac{14}{6}^{(2} = \frac{7}{3}.$

Aflarea unui termen dintr-o proporție

(i) Aflarea unui mez

$$\frac{3}{x}=\frac{21}{14}$$

Met. I.

$$\frac{3}{x}=\frac{21}{14}\overset{P.F.P.}{\Leftrightarrow} 21\cdot x=3\cdot 14 \Leftrightarrow 21\cdot x=42$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{42}{21}\Leftrightarrow x=2.$$

Met. II.

$$\text{un mez}=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$$

Așadar, din $\frac{3}{x}=\frac{21}{14}$, obținem:

$$x=\frac{3\cdot 14}{21}=\frac{42}{21}=2.$$

(ii) Aflarea unui extrem

$$\frac{x}{9}=\frac{7}{21}$$

Met I.

$$\frac{x}{9}=\frac{7}{21}\overset{P.F.P}{\Leftrightarrow} 21\cdot x=7\cdot 9\Leftrightarrow 21\cdot x=63$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{63}{21}=3.$$

Met II.

$$\text{un extrem}=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$$

Așadar, din $\frac{x}{9}=\frac{7}{21}$, obținem:

$$x=\frac{9\cdot 7}{21}=\frac{63}{21}\Rightarrow x=3.$$

Procente

Def.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{procent}}}{p\%} = \frac{p}{100} \leftarrow \text{raport procentual}$$

Citim: „p la sută".

Exemple:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2};\quad 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5};\quad 17\% = \frac{17}{100} = 0{,}17.$$

Ⓘ Aflarea unui procent dintr-un număr n se face înmulțind raportul procentual cu acel număr.

$$p\% \text{ din } n = \frac{p}{100} \cdot n$$

Exemple:

$$25\% \text{ din } 24 = \frac{25}{100} \cdot 24 = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6;$$

$$60\% \text{ din } 70 = \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 7\cancel{0} = 42.$$

Ⓘⓘ Aflarea unui număr când știm un procent din el.

Exemplu: 35% din numărul de elevi dintr-un liceu au participat la acțiuni de voluntariat în vacanta de vară.

Câți elevi are școala știind că au fost 329 de voluntari din liceul respectiv?

Met I. n = „numărul de elevi din școală"

$$35\% \text{ din } n = 329 \iff$$

$$\frac{35^{(5}}{100}\cdot n = 329 \iff \frac{7n}{20} = \frac{329}{1} \overset{P.F.P}{\iff}$$

$$7n = 329\cdot 20 \iff n = \frac{\cancel{329}^{47}\cdot 20}{\cancel{7}_{1}} = 940 \text{ elevi.}$$

În concluzie, liceul are 940 de elevi.

Met II (Regula de trei simplă)

35% . . . . 329 elevi
100% . . . . x elevi

$$x = \frac{329\cdot 100}{35} = 940 \text{ elevi.}$$

III Cât la sută din a este b?

$$x\% \text{ din } a = b.$$

$$x = \frac{b}{a}\cdot 100$$

Exemplu:

Dintr-o clasă de 30 de elevi 18 sunt băieți. Care este procentul băieților din clasă?

Met I. $x\%\cdot 30 = 18 \iff x\% = \frac{18}{30} \iff \frac{x}{100} = \frac{18}{30}$

$\iff \frac{x}{100} = \frac{3}{5} \iff x = \frac{100\cdot 3}{5} = 60.$

În concluzie, 60% din elevii clasei sunt băieți.

Met II. Regula de trei simplă

100% 30
x% 18

$x = \frac{18\cdot 100}{30} = 60$, deci 60% sunt băieți

IV Scumpiri

Exemplu:

Un produs costă 120 de lei. Aflați prețul produsului după o scumpire cu 40%.

Met I.

N = „noul preț"

$N = 120 + 40\% \cdot 120 = 120 + \frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 12\cancel{0} = 120 + 48$

$\Rightarrow N = 168$ lei.

În concluzie, produsul va costa 168 de lei după o scumpire cu 40%.

Met II. (Regula de trei simplă)

120 lei 100%
x lei 140%

$x = \frac{140 \cdot 120}{100} = 168$ lei.

V Ieftiniri (reduceri)

Exemplu:

Un produs costă 120 de lei. Aflați prețul produsului după o reducere cu 20%.

Met I.

N = „noul preț"

$N = 120 - 20\% \cdot 120 = 120 + \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 12\cancel{0} = 120 - 24$

$\Rightarrow N = 96$ lei.

În concluzie, produsul va costa 96 de lei după o reducere cu 20%.

Met II. (Regula de trei simplă)

120 lei 100%
x lei 80%

$x = \frac{80 \cdot 120}{100} = 96$ lei.

Obs. $100\% = 1$;

$q = 100q\%$

$\frac{a}{b}\% = \frac{a}{100b}$.

Șiruri de rapoarte egale

Def. Trei sau mai multe rapoarte formează un sir de rapoarte egale dacă oricare două dintre ele formează o proporție (sunt egale).

Exemplu:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots = \frac{20}{30} = \ldots$$

Proprietatea șirului de rapoarte egale

Într-un sir de rapoarte egale fiecare raport este egal cu raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor tuturor rapoartelor din șir.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Exemplu:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1+2+6}{3+6+18} = \frac{9}{27}^{(9} = \frac{1}{3}.$$

Utilitate (Exemple)

i) Aflați numerele naturale x, y, z știind că $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ și $x + y + z = 30$.

Sol.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{30}{10}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{3}{1} \Rightarrow x=2\cdot 3=6;$$

$$\frac{y}{3}=\frac{3}{1} \Rightarrow y=3\cdot 3=9;$$

$$\frac{z}{5}=\frac{3}{1} \Rightarrow z=5\cdot 3=15.$$

În concluzie, $x=6$, $y=9$ și $z=15$.

ii) Aflați $a,b,c\in\mathbb{N}$ a.î. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$ și $2a+4b+c=42$.

Sol.

$${}^{2)}\frac{a}{2}={}^{4)}\frac{b}{3}=\frac{c}{5} \Rightarrow \frac{2a}{4}=\frac{4b}{12}=\frac{c}{5}=\frac{2a+4b+c}{4+12+5}=\frac{42}{21}=\frac{2}{1}.$$

$$\frac{a}{2}=\frac{2}{1} \Rightarrow a=2\cdot 2=4;$$

$$\frac{b}{3}=\frac{2}{1} \Rightarrow b=3\cdot 2=6;$$

$$\frac{c}{5}=\frac{2}{1} \Rightarrow c=5\cdot 2=10.$$

În concluzie, $a=4$, $b=6$ și $c=10$.

Marimi direct proporționale

Două mărimi sunt direct proporționale (d.p.) dacă atunci când una se mărește (se micșorează) de un număr de ori și cealaltă se mărește (se micșorează) de același număr de ori.

Exemplu: Doresc mai multe bomboane, plătesc mai mult.

Def. Fie $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ și $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ două mulțimi numerice cu același cardinal.

Spunem că elementele mulțimii $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ sunt direct proporționale cu $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ dacă putem forma un șir de rapoarte egale astfel:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

Așadar,

$$\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\text{ d.p. }\{b_1,b_2,\dots,b_n\}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=K$$

coeficient de proporționalitat

Exemplu:

$\{2,3,5\}$ d.p. $\{4,6,10\}$ deoarece

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}\left(=K=\frac{1}{2}\right)$$

Aplicații:

i) Aflați numerele naturale x,y,z știind că sunt d.p. cu $2,3,5$ și $2x+4y+z=42$.

Sol.

$$\{x,y,z\}\text{ d.p. }\{2,3,5\}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=K$$

$$\frac{x}{2}=\frac{K}{1}\Rightarrow x=2K;$$

$$\frac{y}{3}=\frac{K}{1} \Rightarrow y=3K;$$

$$\frac{z}{5}=\frac{K}{1} \Rightarrow z=5K;$$

Deoarece $2x+4y+z=42$, obținem:

$$2\cdot 2K+4\cdot 3K+5K=42 \Leftrightarrow 4K+12K+5K=42 \Leftrightarrow$$

$$21K=42 \Leftrightarrow K=\frac{42}{21}=2.$$

Așadar,

$$x=2\cdot K=2\cdot 2=4;$$

$$y=3\cdot K=3\cdot 2=6;$$

$$z=5\cdot K=5\cdot 2=10;$$

În concluzie, $x=4$, $y=6$ și $z=10$.

ii) Împărțiți numărul 68 în părți direct proporționale cu 4,5,8.

Sol.

$$a+b+c=68$$

$$\{a,b,c\} \text{ d.p. } \{4,5,8\}$$

$$\{a,b,c\} \text{ d.p. } \{4,5,8\} \Rightarrow \frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}=K$$

$$\frac{a}{4}=K \Rightarrow a=4K;$$

$$\frac{b}{5}=K \Rightarrow b=5K;$$

$$\frac{c}{8}=K \Rightarrow c=8K.$$

$$a+b+c=68 \Leftrightarrow 4K+5K+8K=68 \Leftrightarrow 17K=68$$

$$\Rightarrow K=\frac{68}{17}=4.$$

Prin urmare,

$a = 4 \cdot k = 4 \cdot 4 = 16;$

$b = 5 \cdot k = 5 \cdot 4 = 20;$

$c = 8 \cdot k = 8 \cdot 4 = 32.$

iii) Regula de trei simplă (cazul mărimilor d.p.)

Dacă 4 pixuri costă 32 lei, cât costă 6 pixuri de același fel?

$$\begin{array}{l} \downarrow 4 \text{ pixuri} \ldots\ldots 32 \text{ lei} \downarrow \\ 6 \text{ pixuri} \ldots\ldots x \text{ lei} \end{array}$$

$\{4,6\}$ d.p. $\{32,x\} \Rightarrow \frac{4}{32} = \frac{6}{x}$

Așadar,

$$x = \frac{6 \cdot 32}{4} = 48 \text{ lei}.$$

Marimi invers proporționale

Două mărimi sunt invers proporționale (i.p.) dacă atunci când una se mărește (se micșorează) de un număr de ori și cealaltă se micșorează (se mărește) de același număr de ori.

Exemplu: Cu cât numărul de muncitori creste, cu atât timpul de finalizare al unei lucrări scade.

Def. Fie $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ și $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ două mulțimi numerice cu același cardinal.

Spunem că elementele mulțimii $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ sunt invers proporționale cu $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ dacă putem forma un șir de produse egale astfel:

$$a_1\cdot b_1=a_2\cdot b_2=\ldots=a_n\cdot b_n$$

Așadar,

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\text{ i.p. }\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}\Leftrightarrow a_1\cdot b_1=a_2\cdot b_2=\ldots=a_n\cdot b_n=K$$

coeficient de proporționalitate

Exemplu:

$\{2,8,16\}$ i.p. $\{32,8,4\}$ deoarece

$$2\cdot 32=8\cdot 8=16\cdot 4\,(=64=K).$$

Obs. $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i.p. $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}\Leftrightarrow$ $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ d.p. $\left\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\ldots,\frac{1}{b_n}\right\}$.

Aplicații:

i) Aflați numerele m, n și p știind că $\{m,n,p\}$ i.p. $\{2,4,5\}$ și $m\cdot n\cdot p=25$.

Sol.

$\{m,n,p\}$ i.p. $\{2,4,5\}\Rightarrow 2m=4n=5p=K$

$2m=K\Rightarrow m=\frac{K}{2}$;

$4n = k \Rightarrow n = \frac{k}{4}$;

$5p = k \Rightarrow p = \frac{k}{5}$.

$m \cdot n \cdot p = 25 \Rightarrow \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{4} \cdot \frac{k}{5} = 25 \Rightarrow \frac{k^3}{40} = \frac{25}{1}$

$\Rightarrow k^3 = 40 \cdot 25 \Rightarrow k^3 = 1000$, deci $k = 10$.

Prin urmare,

$m = \frac{10}{2} = 5$; $n = \frac{10^{(2}}{4} = \frac{5}{2}$; $p = \frac{10}{5} = 2$.

În concluzie,

$m = 5, n = \frac{5}{2}$ și $p = 2$.

ii) Împărțiți numărul 84 în părți invers proporționale cu 2,3 și 6.

Sol.

$x + y + z = 84$

$\{x, y, z\}$ i.p. $\{2, 3, 6\}$

$\{x, y, z\}$ i.p. $\{2, 3, 6\} \Rightarrow 2x = 3y = 6z = k$

$2x = k \Rightarrow x = \frac{k}{2}$;

$3y = k \Rightarrow y = \frac{k}{3}$;

$6z = k \Rightarrow z = \frac{k}{6}$.

$x + y + z = 84 \Leftrightarrow {}^{3)}\frac{k}{2} + {}^{2)}\frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 84 \Leftrightarrow$

$\frac{3k + 2k + k}{6} = \frac{84}{1} \Leftrightarrow \frac{\cancel{6}k}{\cancel{6}} = 84 \Rightarrow k = 84$.

Prin urmare,

$$x = \frac{84}{2} = 42;$$

$$y = \frac{84}{3} = 28;$$

$$z = \frac{84}{6} = 14.$$

iii) Regula de trei simplă (cazul mărimilor i.p.)

Dacă un bazin este umplut de 9 robinete (cu același debit) în 12 ore, în câte ore vor umple bazinul 6 robinete?

$$\uparrow\begin{array}{l} 9 \text{ robinete} \longleftrightarrow 12 \text{ ore} \\ 6 \text{ robinete} \ldots\ldots x \text{ ore} \end{array}\downarrow$$

$$\{9, 6\} \text{ i.p. } \{12, x\} \Rightarrow 9 \cdot 12 = 6 \cdot x.$$

Așadar,

$$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 9 \cdot 2 = 18 \text{ ore}.$$

Regula de trei compusă

Se aplică atunci când în problemă există mai mult de două mărimi.

i) Dacă 12 muncitori lucrează câte 8 ore pe zi, atunci termină o lucrare în 6 zile.

În câte zile termină o lucrare 16 muncitori care vor lucra câte 9 ore pe zi?

Sol.

12 m .... 8 ore/zi ..... 6 zile
16 m ...... 9 ore/zi ...... x zile

Pasul I.

Presupunem că cei 16 muncitori vor lucra tot 8 ore/zi.

$$\begin{array}{l} \downarrow \; 12 \text{ m} \; \overset{\longleftrightarrow}{\ldots\ldots\; 8 \text{ ore/zi} \ldots\ldots} \; 6 \text{ zile} \; \uparrow \\ \downarrow \; 16 \text{ m} \;\ldots\ldots\; 8 \text{ ore/zi} \;\ldots\ldots\; x \text{ zile} \; \uparrow \end{array}$$

Atunci, cei 18 muncitori vor termina în $x = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{16}_{\cancel{4}_2}} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ zile.

Pasul II.

$$\begin{array}{l} 16 \text{ m} \;\ldots\ldots\; \downarrow 8 \text{ ore/zi} \longleftrightarrow \ldots\; 4{,}5 \text{ zile} \; \uparrow \\ 16 \text{ m} \;\ldots\ldots\; \downarrow 9 \text{ ore/zi} \;\ldots\ldots\; y \text{ zile} \; \uparrow \end{array}$$

$$y = \frac{8 \cdot 4{,}5}{9} = \frac{36}{9} = 4 \text{ zile.}$$

Răspunsul final este: 4 zile.

ii) Pentru a strânge 800 litri de apă, 6 robinete au curs 40 de minute.

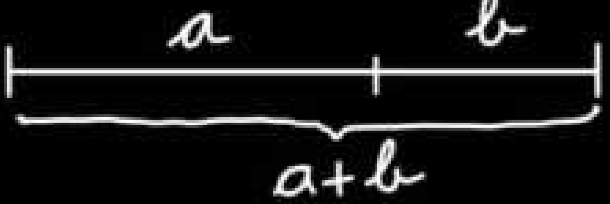
Dacă vrem să strângem 2100 l și sunt 10 robinete, cât timp le vom lăsa să curgă?

Răspuns final: 63 min. (detaliere: exercițiu).

Raportul de aur.

(Secțiunea de aur/Proporția de aur)

Def. Euclid: „Spunem că un segment a fost împărțit în medie și extremă rație dacă segmentul întreg se raportează la segmentul mai mare precum se raportează segmentul cel mare la cel mai mic".



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$$

Valoarea acestui raport $\frac{a}{b}$ se notează cu φ (în cinstea sculptorului grec Phidias, cel care a sculptat Statuia lui Zeus din Olimp, una dintre cele șapte minuni ale lumii antice).

φ se numește numărul de aur.

Din $\frac{a+b}{a}=\varphi$ și $a=b\varphi$ obținem

$$\frac{b\varphi+b}{b\varphi}=\varphi \Rightarrow \frac{\cancel{b}(\varphi+1)}{\cancel{b}\varphi}=\varphi \Rightarrow$$

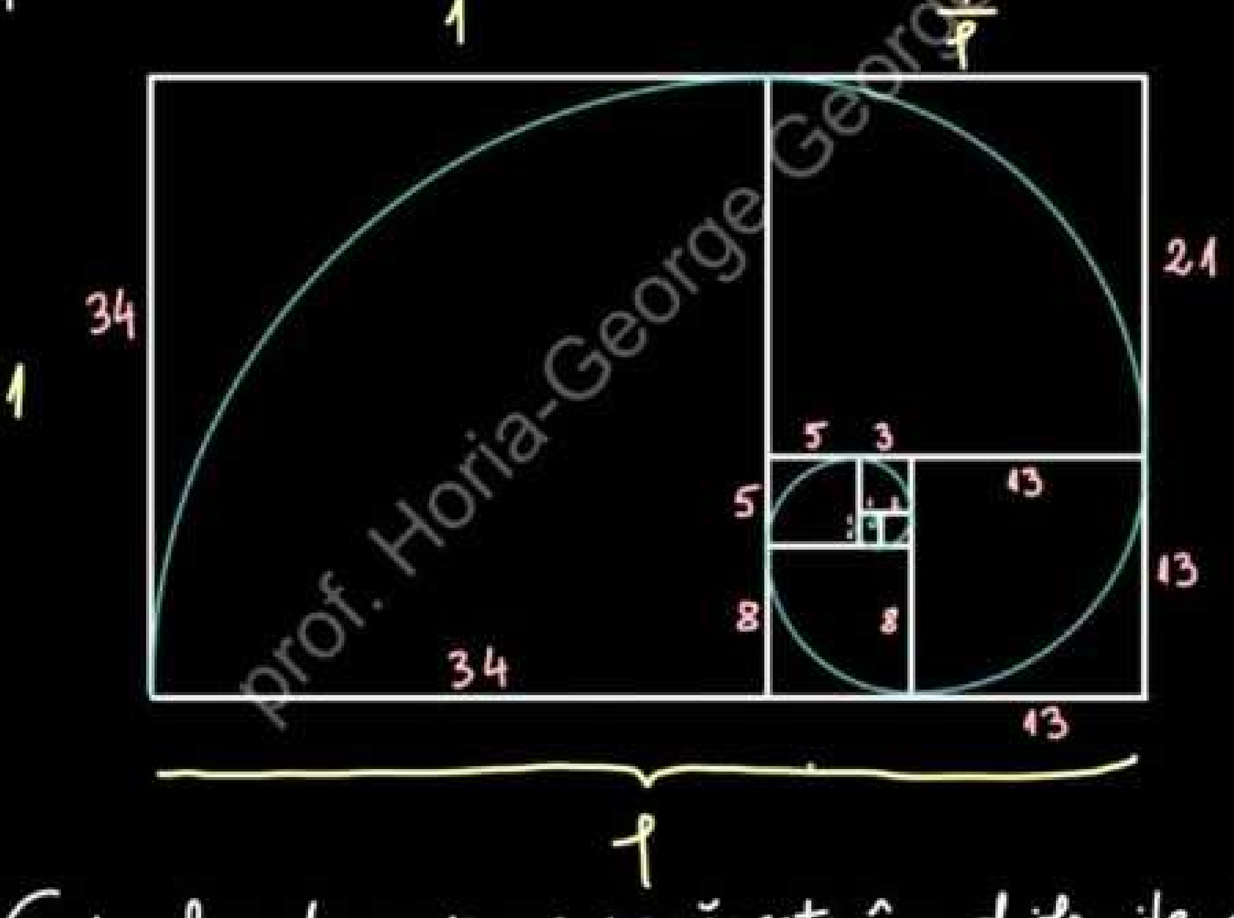
$\varphi+1=\varphi^2 \Rightarrow \varphi^2-\varphi-1=0$ ecuatie de gradul al doilea cu soluția pozitivă

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1,6183\ldots$$

Obs. (Johannes Kepler) Valoarea raportului dintre un termen al sirului lui Fibonacci si termenul predecesor din sir tinde (se apropie) de numărul de aur φ cu cât ne raportăm la un termen mai mare din șirul lui Fibonacci.

Obs. $1+\frac{1}{\varphi}=\varphi$

Spirala de aur:



Spirala de aur se regăsește în diferite domenii:

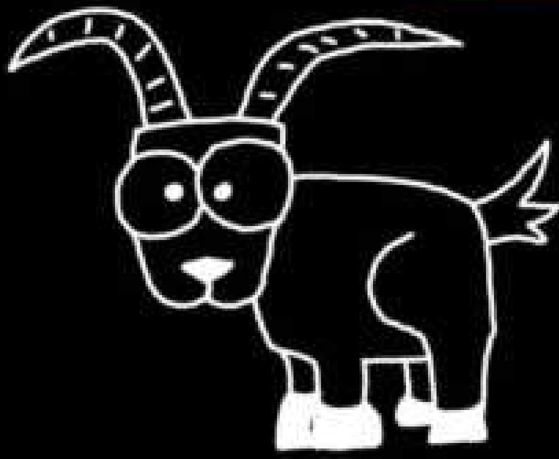
Exemple:

i) Pictura Gioconda (Mona Lisa) de Leonardo da Vinci (Artă)

ii) Cochilia unui melc (Biologie)

iii) Partenonul (loc istoric – acropola Atenei)

Problema lui Monty Hall

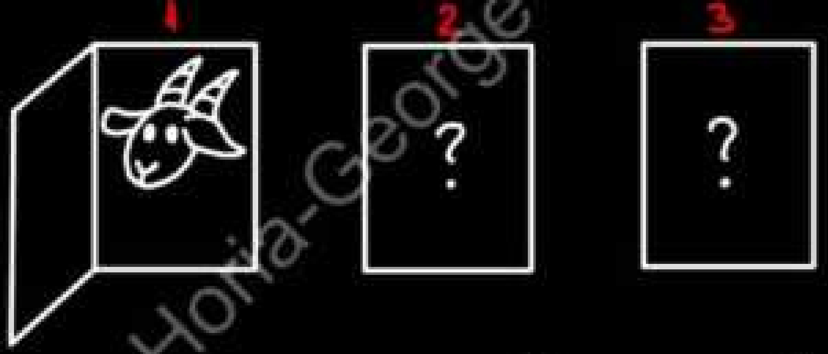


Să presupunem că ne aflăm la un concurs cu premii.

Există trei uși închise. În spatele unei singure uși se află un premiu foarte mare, iar în spatele celorlalte două uși se află câte o capră.

Prezentatorul ne cere să alegem o ușă. Să spunem că alegem ușa nr. 2. Prezentatorul știe numărul ușii în spatele căreia se află premiul.

Pentru a crește tensiunea, prezentatorul deschide ușa nr. 1. În spatele acesteia se află... o capră!



Prezentatorul ne spune că ne putem schimba alegerea. Ce facem în această situație pentru a avea mai multe șanse de câștig?

Răspuns: Dacă rămânem cu alegerea inițială, avem $\frac{1}{3}$ șanse de câștig, iar dacă schimbăm alegerea, avem $\frac{2}{3}$ șanse de câștig. Așadar, alegem ușa nr. 3.

Răspunsul este contraintuitiv. Se spune că și Paul Erdös a fost sceptic până când a studiat anumite simulări computerizate. Pentru o mai bună înțelegere a problemei, să ne imaginăm cazul în care ar fi 100 de uși și să ținem cont de faptul că prezentatorul nu deschide 98 de uși la întâmplare.

Horia-George Georgescu

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

$\mathbb{Z}$

Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$

Motivație: temperaturi negative, pierderi/datorii, golaveraj etc.

→ „Zählen"
(„țalen") ← pronunție (germană)

$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$ s.n. mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ s.n. mulțimea numerelor întregi pozitive.

$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ s.n. mulțimea numerelor întregi negative.

$\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ s.n. mulțimea numerelor întregi nenegative și este egală cu $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}^* = \{+1, -1, +2, -2, \ldots\}$ s.n. mulțimea numerelor întregi nenule.

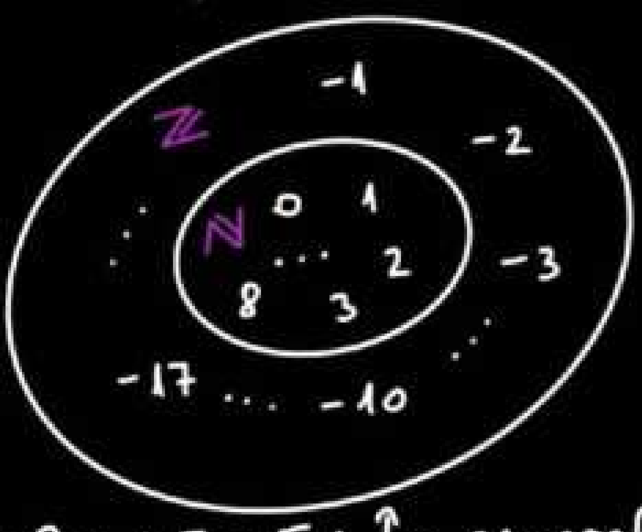
Obs.

i) 0 nu este nici negativ, nici pozitiv.

ii) $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

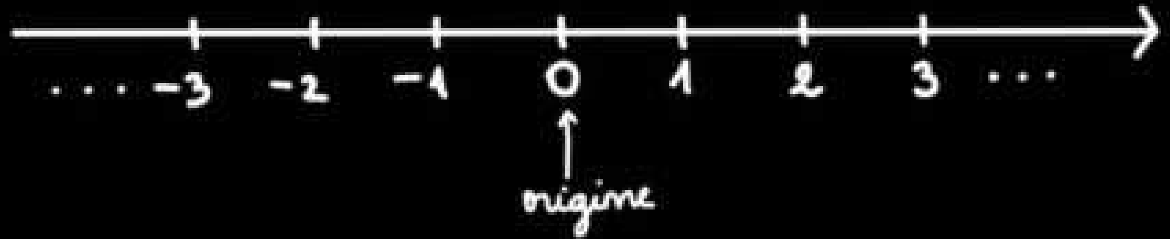
iii) Orice număr natural este întreg.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$



iv) $+2 = 2$; $+5 = 5$; în general, $+a = a$.

Axa numerelor întregi



Def. Opusul (op) numărului întreg a este numărul întreg $-a$ și reprezintă numărul corespunzător simetricului lui a față de originea axei numerelor întregi.

Exemple: $op(3)=-3$; $op(7)=-7$; $op(0)=0$;
$op(-5)=-(-5)=+5$; $op(-1)=-(-1)=1$;
$op(-8)=8$;

Obs. Opusul schimbă semnul numărului respectiv.

Obs. $-(-a)=a$, $a\in\mathbb{Z}$.

Exemple: $-(-7)=7$; $-(-5)=5$; $-(-3)=3$.

Def. Modulul (valoarea absolută) a unui număr întreg x este numărul întreg pozitiv care reprezintă distanța de la numărul întreg x la originea axei numerelor întregi.

Modulul numărului întreg x se notează cu $|x|$.

Exemple: $|5|=5$; $|-5|=5$;
$|-3|=3$; $|+2|=2$;
$|0|=0$.

Obs. (i) $|x|\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

(ii) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

(iii) $|x|=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$ Explicitarea modulului

(iv) $|x| = a,\ a > 0 \Rightarrow x \in \{-a, a\}$

Exemple: $|x| = 7 \Rightarrow x \in \{-7, 7\}$

$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$|x| = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$

Compararea numerelor întregi

Dintre două numere întregi este mai mic cel care se află în stânga pe axa numerelor întregi.

Distingem următoarele trei situații:

(I) Compararea a două numere întregi pozitive se reduce la compararea a două numere naturale.

Exemple: $+5 < +7$; $21 > 3$; $125 < 152$.

(II) Dintre un număr întreg negativ și unul pozitiv este mai mic numărul negativ.

Exemple: $-3 < 7$; $8 > -5$; $-4 < 1$.

(III) Dintre două numere întregi negative este mai mic cel care este mai mare în valoare absolută.

Exemple: $-4 < -3$; $-1 > -5$; $-7 < -2$;

Adunarea și scăderea numerelor întregi

Fie a și $b \in \mathbb{Z}$. Scăderea $a - b$ se definește ca fiind adunarea dintre numărul întreg a și opusul lui b.

$$a - b = a + (-b)$$

Distingem două cazuri:

(I) Dacă numerele au același semn, atunci adunăm modulele lor și punem la rezultat semnul comun.

Exemple: $+2 + 7 = +9$; $+8 + 5 = 13$;

$-2 - 3 = -5$; $-4 - 7 = -11$;

(II) Dacă numerele au semne diferite, atunci calculăm diferența modulelor numerelor scăzând din modulul mai mare modulul mai mic („așa cum știm") și punem la rezultat semnul numărului care este mai mare în modul.

Exemple: $-2+5=+3$; $-7+2=-5$;
$+7-9=-2$; $+8-3=+5$;
$3-9=-6$; $-6+2=-4$.

Obs. Aceste „reguli" intră în reflex prin exercițiu.

Proprietățile adunării în $\mathbb{Z}$:

Adunarea numerelor întregi este:

- COMUTATIVĂ: $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$. Exemple: $-2+3=3-2$
  $4-5=-5+4$
- ASOCIATIVĂ: $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.
- ADMITE ELEMENT NEUTRU: $\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists!\,0\in\mathbb{Z}$ a.î. $x+0=0+x=x$.
- ORICE ELEMENT ARE UN OPUS: $\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists\,-x\in\mathbb{Z}$ a.î. $x+(-x)=-x+x=0$

Consecință: Suma a două numere întregi egale în modul dar de semne contrare este egală cu 0. Spunem că cele două numere se reduc.

Exemple: $-3+3=0$
$+7-7=0$
$\cancel{-2}\cancel{+5}\cancel{+2}\cancel{-5}=0$.

Înmulțirea și împărțirea numerelor întregi

Atunci când înmulțim/împărțim numere întregi, înmulțim/împărțim modulele lor și ținem cont de următoarea regulă (regula semnelor):

$(+)\cdot(+)=(+)$ $\qquad$ $(+):(+)=(+)$
$(-)\cdot(-)=(+)$ $\qquad$ $(-):(-)=(+)$
$(+)\cdot(-)=(-)$ $\qquad$ $(+):(-)=(-)$
$(-)\cdot(+)=(-)$ $\qquad$ $(-):(+)=(-)$

Exemple:

$(+2)\cdot(+3)=+6$ $\qquad$ $(+8):(+4)=+2$

$(-2)\cdot(-3)=+6$ $\qquad$ $(-8):(-4)=+2$

$(+2)\cdot(-3)=-6$ $\qquad$ $(+8):(-4)=-2$

$(-2)\cdot(+3)=-6$ $\qquad$ $(-8):(+4)=-2$

$5\cdot 2=10$ $\qquad$ $12:4=3$

$(-2)\cdot(-7)=14$ $\qquad$ $(-21):(-3)=7$

$3\cdot(-4)=-12$ $\qquad$ $6:(-2)=-3$

$-5\cdot 3=-15$ $\qquad$ $-4:2=-2$

Proprietățile înmulțirii în $\mathbb{Z}$

Înmulțirea numerelor întregi este:

- COMUTATIVĂ: $x\cdot y=y\cdot x, \forall x,y\in\mathbb{Z}$.
- ASOCIATIVĂ: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z), \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.
- ADMITE ELEMENT NEUTRU: $\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists!\,1\in\mathbb{Z}$ a.î. $x\cdot 1=1\cdot x=x$.
- DISTRIBUTIVĂ FAȚĂ DE ADUNARE/SCĂDERE:

$$x\cdot(y\pm z)=x\cdot y\pm x\cdot z$$

→ Consecința I. Desființarea (desfacerea) parantezelor.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(x+y+z)(m+n+p)=xm+xn+xp+ym+yn+yp+zm+zn+zp$$

ș.a.m.d. (fiecare termen din prima paranteză se distribuie tuturor termenilor din a doua paranteză)

Exemple:

i) $2(-2+5) = 2\cdot(-2)+2\cdot 5 = -4+10 = 6.$

ii) $-2(5-1) = -10+2 = -8$

iii) $-2(-1-3) = 2+6 = 8$

iv) $(2-3)(1-2) = 2\underbrace{-4-3}+6 = 8-7 = 1$

v) $(-2-1)(3+2) = -6-4-3-2 = -15$

Consecința II

Semnul „−" în fața unei paranteze desființează paranteza schimbând semnul tuturor termenilor.

$$-(a-b+c) = (-1)\cdot(a-b+c) = -a+b-c$$

Exemplu:

$$-(2-3-4+5-1) = -2+3+4-5+1.$$

Consecința III („Factorul comun −1")

$$a-b = -(-a+b) = -(b-a)$$
$$-a-b = -(a+b)$$

Exemple:

$$3-5 = -(5-3);$$
$$-2-6 = -(2+6).$$

Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{Z}$ (T.Î.R.$\mathbb{Z}$).

Fie D și Î două numere întregi cu Î $\neq 0$.
Atunci există două numere întregi C și R a.î.

$$D = \text{Î} \cdot C + R, \text{ unde } 0 \leq R < |\text{Î}|.$$

Exemple:

$$\left.\begin{array}{l} D = 23 \\ \text{Î} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = -7 \\ R = 2 \end{array} \qquad 23 = (-3)\cdot(-7) + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} D = -22 \\ \text{Î} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = -5 \\ R = 3 \end{array} \qquad -22 = 5\cdot(-5) + 3.$$

Ridicarea la putere a unui număr întreg cu exponent număr natural

Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\underset{\text{bază}}{a}^{\overset{\text{exponent}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

Exemple:

$$(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +8$$
$$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$$
$$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9.$$

Obs. $(-a)^n \neq -a^n$

Exemplu: $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$

$$-2^2 = -4.$$

Obs. Dacă baza (a) este pozitivă, atunci teoria se reduce la ridicarea unui număr natural la un exponent natural.

Exemple: $(+2)^3 = 2^3 = 8$;

$$(+7)^2 = 7^2 = 49;$$
$$(+3)^3 = 3^3 = 27.$$

Dacă baza este un număr întreg negativ, atunci distingem două cazuri:

(I) Dacă exponentul este număr par, atunci rezultatul va fi pozitiv.

$$(-)^{par} = (+)$$

Justificare: $(-a)^{2k} = \underbrace{\overbrace{(-a)\cdot(-a)}^{(+)}\cdot\ldots\cdot\overbrace{(-a)\cdot(-a)}^{(+)}}_{2k\text{ factori}} > 0$

Exemple:

$(-2)^6 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+} = 2^6 = 64;$

$(-3)^4 = 3^4;$

$(-7)^{100} = 7^{100};$

$(-10)^{2016} = 10^{2016};$

$(-2)^2 = 4.$

(II) Dacă exponentul este număr impar, atunci rezultatul va fi negativ.

$$(-)^{impar} = (-)$$

Justificare: $(-a)^{2k+1} = \underbrace{\overbrace{(-a)\cdot(-a)}^{(+)}\cdot\ldots\cdot\overbrace{(-a)\cdot(-a)}^{(+)}}_{2k\text{ factori}}\cdot\overbrace{(-a)}^{(-)} < 0.$

Exemple:

$(-2)^5 = \overbrace{(-2)\cdot(-2)}^{+}\cdot\overbrace{(-2)\cdot(-2)}^{+}\cdot(-2) = -2^5 = -32;$

$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -3^3 = -27;$

$(-7)^{101} = -7^{101};$

$(-10)^{2017} = -10^{2017};$

$(-2)^3 = -8.$

Obs. $a^1 = a$, pentru orice a număr întreg

Exemple: $5^1 = 5; (-3)^1 = -3.$

$a^0 = 1$, pentru orice a număr întreg nenul

Exemple: $6^0 = 1; (-7)^0 = 1;$

Obs. 0^0 nu are sens

Reguli de calcul cu puteri

① Când înmulțim două puteri care au aceeași bază, păstrăm baza la rezultat și adunăm exponenții.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad, \forall a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$$

Justificare:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}}^{m+n \text{ factori}} = a^{m+n}$$

Exemplu: $(-2)^3 \cdot (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

② Când împărțim două puteri care au aceeași bază, păstrăm baza la rezultat și scădem exponenții.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad, a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}, \; m \geq n$$

Exemplu: $(-7)^8 : (-7)^5 = (-7)^{8-5} = (-7)^3$

③ Când ridicăm o putere la o altă putere, păstrăm baza și înmulțim exponenții.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad, a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$$

Justificare:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ factori}} = a^{m \cdot n}$$

Exemplu: $[(-3)^3]^7 = (-3)^{3 \cdot 7} = (-3)^{21}$

Obs.

$(a^m)^n \neq a^{m^n}$

$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$

$(2^3)^2 = 2^6$; $2^{3^2} = 2^9$;

④ Când înmulțim două puteri care au același exponent, ridicăm produsul bazelor la acel exponent.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$$

Exemple: $(-2)^3 \cdot (-7)^3 = [(-2) \cdot (-7)]^3 = 14^3$; $(3 \cdot 5)^7 = 3^7 \cdot 5^7$

⑤ Când împărțim două puteri care au același exponent, ridicăm câtul bazelor la acel exponent.

$$a^n : b^n = (a : b)^n, a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$$

Exemple: $(-8)^3 : (-4)^3 = [(-8) : (-4)]^3 = 2^3$; $(6 : 3)^7 = 6^7 : 3^7$;

Ecuații în $\mathbb{Z}$

Def." O ecuatie reprezintă o egalitate între două expresii algebrice în care apar variabilele (necunoscute).

Egalitatea respectivă este adevărată doar pentru anumite valori ale variabilelor (necunoscutelor).

O valoare care verifică egalitatea din ecuația respectivă s.n. soluție a ecuației.

Exemple:

i) $x+2=7$; ← o necunoscută

ii) $2x-3=5$;

iii) $2(x+3)=x+6$

iv) $x+y=10$; ← două necunoscute.

Observăm că $x=5$ este o soluție a ecuației i), dar nu este o soluție a ecuației ii).

Def. O ecuatie de forma $ax+b=0$, cu $a\in\mathbb{Z}^*$ și $b\in\mathbb{Z}$ s.n. ecuatie cu o necunoscută (de gradul I).

Exemple:

$2x+5=0$

$-x-3=0$

$7x+10=0$

$3x=0$

MEMBRUL STÂNG MEMBRUL DREPT

$E_S(x) = E_D(x)$

M.S. (L.H.S.) M.D. (R.H.S.)

A rezolva o ecuație în mulțimea A presupune aflarea (studierea) mulțimii soluțiilor $S\subset A$ ecuației respective.

Exemple:

① Rezolvați în $A=\{0,1,2,3\}$ ecuația $x+1=3$.

Dacă $x = 0$, atunci $0 + 1 = 1 \neq 3$, deci $x = 0$ nu este soluție.

Dacă $x = 1$, atunci $1 + 1 = 2 \neq 3$, deci $x = 1$ nu este soluție.

Dacă $x = 2$, atunci $1 + 2 = 3$, deci $x = 2$ este soluție.

Dacă $x = 3$, atunci $1 + 3 = 4$, deci $x = 3$ nu este soluție.

În concluzie, $S = \{2\}$.

ⅱ) Rezolvați în $B = \{3, 7\}$ ecuația $x + 2 = 10$.

Dacă $x = 3$, atunci $3 + 2 = 5 \neq 0$, deci $x = 3$ nu este soluție.

Dacă $x = 7$, atunci $7 + 2 = 9 \neq 0$, deci $x = 7$ nu este soluție.

În concluzie, $S = \emptyset$, deci ecuația nu are soluții în B.

ⅲ) Rezolvați în $M = \{-3, -2, 2\}$ ecuația $x^2 = 4$.

Dacă $x = -3$, atunci $(-3)^2 = 9 \neq 4$, deci $x = -3$ nu este soluție.

Dacă $x = -2$, atunci $(-2)^2 = 4$, deci $x = -2$ este soluție.

Dacă $x = 2$, atunci $2^2 = 4$, deci $x = 2$ este soluție.

În concluzie, $S = \{-2, 2\}$.

Def. Două ecuații s.n. echivalente dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

Exemplu:

$x+2=7$ și $2x+4=14$ sunt ecuații echivalente (în $\mathbb{N}$) deoarece ambele au mulțimea soluțiilor $S=\{5\}$.

Proprietățile relației de egalitate (Euclid):

$$A=B \mid +C \Rightarrow A+C=B+C$$

$$A=B \mid -C \Rightarrow A-C=B-C \qquad (*)$$

$$A=B \mid \cdot C \Rightarrow A\cdot C=B\cdot C$$

$$A=B \mid :C,\ C\neq 0 \Rightarrow A:C=B:C$$

Obs. Atunci când adunăm/scădem un număr într-o ecuație sau înmulțim cu un număr o ecuație obținem o ecuație echivalentă cu ecuația dată.

Rezolvarea ecuației de gradul I cu o necunoscută

Ⓘ Metoda transformărilor în ecuații echivalente:

Pasul 1: Desființăm parantezele și efectuăm eventualele calcule.

Pasul 2: Folosind proprietățile aducem ecuația la forma echivalentă $ax=b$.

Pasul 3: Soluția este $x=\frac{b}{a}$.

Pasul 4: Verificăm dacă soluția se află în mulțimea în care trebuia să rezolvăm ecuația.

Exemplu:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3(x+2)+1 = x+13$$

$3(x+2)+1 = x+13 \Leftrightarrow 3x+6+1 = x+13$

$\Leftrightarrow 3x+7 = x+13 \mid -x \Leftrightarrow 3x+7-x = \cancel{x}+13-\cancel{x}$

$\Leftrightarrow 2x+7 = 13 \mid -7 \Leftrightarrow 2x+7-7 = 13-7 \Leftrightarrow 2x = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z}.$

În concluzie, $S = \{3\}$.

Ⅱ Metoda separării termenilor

Pasul 1: Desființăm parantezele și efectuăm eventualele calcule.

Pasul 2 (Separarea termenilor): Trecem toți termenii cu necunoscută într-un membru (în general în M.S.) și cei liberi în celălalt membru. Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației în celălalt membru se realizează prin schimbarea semnului termenului respectiv.

Pasul 3: Reducem (calculăm) termenii și aducem ecuația la forma $ax = b$ cu soluția $x = b : a = \frac{b}{a}$.

Pasul 4: Verificăm dacă soluția se află în mulțimea în care trebuia să rezolvăm ecuația.

Exemple

i) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3(x+2)+1 = x+13$$

$$3(x+2)+1 = x+13 \Leftrightarrow 3x+6+1 = x+13$$

$$\Leftrightarrow 3x\underbrace{+7}_{-7} = \overset{-x}{x}+13 \Leftrightarrow 3x-x = 13-7$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z}.$$

În concluzie, $S = \{3\}$.

ii) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3x-7 = 9+2x$$

$$3x\underbrace{-7}_{+7} = 9+\overset{-2x}{2x} \Leftrightarrow 3x-2x = 9+7$$

$\Leftrightarrow x = 16 \in \mathbb{Z}$, deci $S = \{16\}$.

iii) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația

$$-3t-2 = 6-t$$

$$-3t-2 = 6-t \Leftrightarrow -3t+t = 6+2 \Leftrightarrow -2t = 8$$

$\Leftrightarrow t = \frac{8}{-2} = -4 \in \mathbb{Z}$, deci $S = \{4\}$.

iv) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația

$$2x+1 = 4$$

$$2x+1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4-1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

În concluzie, ecuația nu are soluții întregi, deci $S = \emptyset$.

Obs.

i) Există ecuații care nu au nicio soluție.

Exemplu: $2(x+1)-1=2x+5$

$2(x+1)-1=2x+5 \Leftrightarrow 2x+2-1=2x+5$

$\Leftrightarrow 2x+1=2x+5 \Leftrightarrow 2x-2x=5-1 \Leftrightarrow 0=4$

imposibil, deci $S=\phi$.

ii) Există ecuații la care orice număr este soluție (au o infinitate de soluții). Acestea se numesc identități.

Exemplu: $3(x-2)+1=3(x-1)-2$

$3(x-2)+1=3(x-1)-2 \Leftrightarrow 3x-6+1=3x-3-2$

$\Leftrightarrow 3x-5=3x-5 \Leftrightarrow 3x-3x=-5+5 \Leftrightarrow 0=0$

pentru orice x.

Inecuații în $\mathbb{Z}$

($\geq$ sau $>$)

Def. O inegalitate de tipul $\leq$ sau $<$ în care apare o necunoscută (notată în general cu x) s.n. inecuație.

Exemple: $2x-1<5$

$3x-2\geq 7+2x$

$-2x+1\leq 5$

A rezolva o astfel de inecuație în mulțimea numerelor întregi presupune aflarea tuturor numerelor întregi (dacă există) care înlocuite în locul necunoscutei verifică inegalitatea respectivă (inecuația).

În rezolvarea inecuațiilor trebuie să ținem cont de următoarele proprietăți:

Proprietăți ale inegalităților:

Obs. $E(x) \le F(x) \mid +A(x) \Leftrightarrow E(x)+A(x) \le F(x)+A(x)$

Exemplu: $2x+5 \le \underbrace{-x}+8 \mid +x \Leftrightarrow 2x+5+\underline{\underline{x}} \le \cancel{-x}+8+\cancel{x}$

$\Leftrightarrow 3x+5 \le 8$

Obs. $E(x) \le F(x) \mid \overset{(\text{sau} : a)}{\underset{a>0}{\cdot a}} \Leftrightarrow a \cdot E(x) \le a \cdot F(x)$, $a \in \mathbb{Z}_+^*$

Exemple $2x+1 \le -5 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2(2x+1) \le 2 \cdot (-5)$

$\Leftrightarrow 4x+2 \le -10.$

$3x+6 \le -15 \mid :3 \Leftrightarrow x+2 \le -5.$

Obs. $E(x) \underline{\underline{\le}} F(x) \mid \overset{(\text{sau} : a)}{\underset{a<0}{\cdot a}} \Leftrightarrow a \cdot E(x) \underline{\underline{\ge}} a \cdot F(x)$, $a \in \mathbb{Z}_-^*$

Exemplu: $-2x+3 \le 5 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow -1 \cdot (-2x+3) \ge (-1) \cdot 5$

$\Leftrightarrow 2x-3 \ge -5.$

$-2x+3 \le 5 \mid \cdot(-3) \Leftrightarrow -3(-2x+3) \ge -3 \cdot 5.$

Atunci când înmulțim/împărțim o inegalitate cu un număr negativ se schimbă semnul inegalității

Obs. Tehnica de rezolvare a unei inecuații (în $\mathbb{Z}$) este similară cu cea a rezolvării unei ecuații (în $\mathbb{Z}$).

Aducem inecuația la forma $ax \underset{(<,>,\ge)}{\le} b$, $\underline{a \in \mathbb{Z}_+^*}$ $b \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă $x \underset{(<,>,\ge)}{\le} \frac{b}{a}$.

Exemple:

i) $2x+1 \le 7 \Leftrightarrow 2x \le 7-1 \Leftrightarrow 2x \le 6$

$\Leftrightarrow x \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow x \le 3.$

$$\left.\begin{matrix} x \leq 3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{3, 2, 1, 0, -1, -2, \ldots\}$$

ii) $3x - 1 > -4 \Leftrightarrow 3x > -4 + 1 \Leftrightarrow 3x > -3$

$\Leftrightarrow x > (-3) : 3 \Leftrightarrow x > -1.$

$$\left.\begin{matrix} x > -1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}.$$

iii) $-2x + 3 \leq 9 \Leftrightarrow -2x \leq 9 - 3 \Leftrightarrow -2x \leq 6 \mid \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq (-6) : 2 \Leftrightarrow x \geq -3.$

$$\left.\begin{matrix} x \geq -3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

iv) $2x + 1 \leq 5$

$2x + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2x \leq 5 - 1 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{2}$

$\Leftrightarrow x \leq 2.$

$$\left.\begin{matrix} x \leq 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{2, 1, 0, -1, \ldots\}$$

(deoarece coeficientul lui x este negativ, schimb sensul inegalității)

v) $-3x + 1 > 7 \Leftrightarrow -3x > 7 - 1 \Leftrightarrow -3x > 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{-3}$

$\Leftrightarrow x < -2.$

$$\left.\begin{matrix} x < -2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{-3, -4, -5, \ldots\}.$$

Inecuații cu modul

i) $|x| \leq a,\ a \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$

Exemplu: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$\left.\begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

ii) $|x| < a,\ a \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow -a < x < a.$

Exemplu: $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

$$\left.\begin{matrix} -2 < x < 2 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}.$$

Horia-George Georgescu

MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Q

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$

Motivație: exprimarea unei părți dintr-un întreg.

„quotient" (eng.)

↓ ↖

cât $\mathbb{Q} \overset{def}{=} \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, c.m.m.d.c.(a,b)=1 \right\}$

s.n. mulțimea numerelor raționale.

Exemple:

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $-\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}$; $-\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{Q}$; $0,3 \in \mathbb{Q}$;

$0 \in \mathbb{Q}$; $\frac{17}{-2} \in \mathbb{Q}$; $3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$; $0,1(7) \in \mathbb{Q}$.

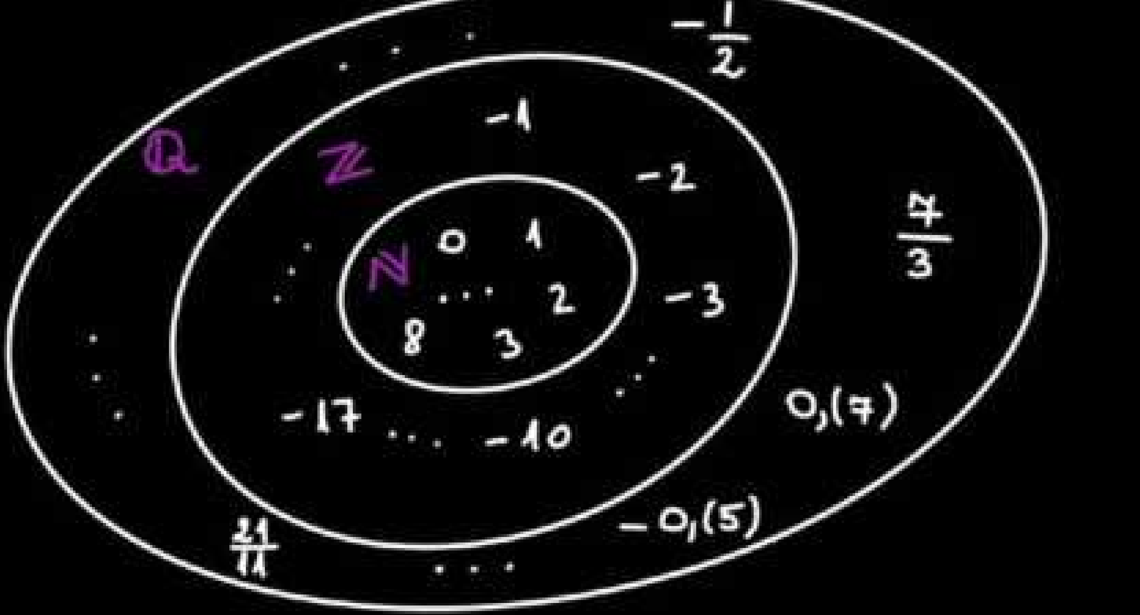
Obs. i) Orice număr întreg este rațional (deoarece poate să fie reprezentat ca o fracție cu numitorul 1)

Exemple: $5 = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$

$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}$

$-1 = \frac{-1}{1} \in \mathbb{Q}$

Așadar, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



ii) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

Obs

$\mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}$.

Exemplu: $\frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = \frac{3}{-2}$.

$\mathbb{Q}_+ = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \}$ numerele rationale pozitive.

$\mathbb{Q}_- = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \}$ numerele raționale negative.

Axa numerelor raționale

⊢—⊣ u.m. sens ⟶

Def. Opusul (op) numărului rațional a este numărul rațional $-a$ și reprezintă numărul corespunzător simetricului lui a față de originea axei numerelor raționale.

Exemple: $op\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$; $op\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}$; $op(0) = 0$;
$op\left(-\frac{7}{4}\right) = -\left(-\frac{7}{4}\right) = +\frac{7}{4}$; $op(-5) = -\left(-\frac{5}{1}\right) = \frac{5}{1}$;
$op(-0{,}2) = 0{,}2$;

Obs. Opusul schimbă semnul numărului respectiv.

Obs. $-(-a) = a$, $a \in \mathbb{Q}$.

Exemple: $-\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$; $-\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7}$; $-(-0{,}3) = 0{,}3$.

Def. Modulul (valoarea absolută) a unui număr rațional x este numărul rațional pozitiv care reprezintă distanța de la numărul rațional x la originea axei numerelor raționale.

Modulul numărului rațional x se notează cu $|x|$.

Exemple: $\left|+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$;
$\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$; $|+0{,}2| = 0{,}2$;
$|0| = 0$.

Obs. (i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.

(ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

(iii) $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ Explicitarea modulului

(iv) $|x| = a, a > 0 \Rightarrow x \in \{-a, a\}$

Exemple: $|x| = \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$

$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$|x| = -\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \emptyset$

Compararea numerelor raționale

Dintre două numere raționale este mai mic cel care se află în stânga pe axa numerelor raționale.

Distingem următoarele trei situații:

(I) Compararea a două numere raționale pozitive se reduce la compararea a două fracții.

Exemple: $+\frac{7}{3} < +\frac{11}{3}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $\frac{10}{3} < \frac{17}{5}$;

(II) Dintre un număr rațional negativ și unul pozitiv este mai mic numărul negativ.

Exemple: $-\frac{1}{3} < \frac{10}{7}$; $\frac{17}{3} > -\frac{2}{5}$; $-2,7 < 2,6$;

(III). Dintre două numere raționale negative este mai mic cel care este mai mare în valoare absolută.

Exemple: $-\frac{11}{3} < -\frac{7}{3}$; $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$; $-0,4 < -0,3$.

Operații cu numere raționale

Operațiile în $\mathbb{Q}$ se efectuează ținând cont de regulile de calcul cu fracții și cu numere întregi.

Adunarea (și scăderea) în $\mathbb{Q}$

Proprietăți.

Adunarea numerelor raționale este:

i) comutativă
ii) asociativă
iii) admite element neutru
iv) orice element admite un opus

Detaliere: exercițiu.

Exemple:

i) $-{}^{5)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{1}{5}=-\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{-5-2}{10}=\frac{-7}{10}$;

ii) $-{}^{2)}\frac{2}{3}+{}^{3)}\frac{7}{2}=-\frac{4}{6}+\frac{21}{6}=\frac{-4+21}{6}=\frac{17}{6}$;

iii) ${}^{5)}\frac{1}{7}-{}^{7)}\frac{1}{5}=\frac{5}{35}-\frac{7}{35}=\frac{5-7}{35}=-\frac{2}{35}$;

iv) $-\cancel{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{-1-1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$.

Înmulțirea (și împărțirea) în $\mathbb{Q}$

Proprietăți.

Înmulțirea numerelor raționale este:

i) comutativă
ii) asociativă
iii) admite element neutru
iv) orice element nenul admite un invers

Detaliere: exercițiu.

Obs. $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$, $a,b\in\mathbb{Q}, b\neq 0$.

Exemple:

i) $\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{5\cdot 7}{2\cdot 3}=-\frac{35}{6}$;

ii) $\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right)\cdot\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right)=+\frac{1}{6}$;

iii) $\left(-\frac{2}{3}\right):\frac{7}{11}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{7}=-\frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}=\frac{-22}{21}$.

Ridicarea la putere

Exemple:

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$;

ii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1^3}{2^3}=-\frac{1}{8}$;

iii) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0=1$.

Formule:

ⓘ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a,b,n\in\mathbb{Z}^*$

Exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}=\left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$.

(ii) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{Q}^*, n\in\mathbb{Z}$.

Exemple: $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$; $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$;

$10^{-1}=\frac{1}{10}$; $10^{-2}=\frac{1}{100}$; $10^{-5}=\frac{1}{10^5}$.

Obs. $a:10^n=a\cdot 10^{-n}$, $a,n\in\mathbb{N}$.

În cazul rezolvării ecuațiilor în $\mathbb{Q}$, tehnica de rezolvare este similară rezolvării ecuațiilor în $\mathbb{Z}$ și se fixează prin exercițiu. La fel și în cazul inecuațiilor.

Exemple:

i) $${}^{10)}\frac{x+2}{3} - {}^{6)}\frac{6x-1}{5} = {}^{15)}\frac{x+1}{2} + {}^{5)}\frac{7x-1}{6} - {}^{30)}\frac{2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(x+2)-6(6x-1)}{30} = \frac{15(x+1)+5(7x-1)-60}{30} \Big| \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow \underline{10x}+20\underline{-36x}+6 = \underline{15x}+15\underline{+35x}-5-60$$

$$\Leftrightarrow -26x+26 = 50x-50$$

$$\Leftrightarrow -26x-50x=-50-26 \Leftrightarrow -76x=-76$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-76}{-76} \Leftrightarrow x=1$$

ii) $\frac{\overset{\ominus}{-3}}{\underset{\ominus}{-5x+1}}>0$ Cum $-3<0$, ca $\frac{-3}{-5x+1}>0$ trebuie ca $-5x+1<0$.

Obs. (Condiție de existență a raportului)

$$-5x+1 \neq 0 \Leftrightarrow -5x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{-1}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{5}.$$

(deoarece coeficientul lui x este negativ, schimb sensul inegalității)

$$-5x+1<0 \Leftrightarrow -5x<-1 \Leftrightarrow x>\frac{-1}{-5} \Leftrightarrow x>\frac{1}{5}$$

Horia-George Georgescu

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

$\mathbb{R}$

Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Def. Un număr natural y s.n. pătrat perfect (p.p.) dacă există un număr natural x a.î. $x^2=y$.

Exemplu. $36=6^2$ este p.p.

Pătrate perfecte des întâlnite în aplicații:

$0=0^2$; $1=1^2$; $4=2^2$; $9=3^2$; $16=4^2$; $25=5^2$; $36=6^2$;
$49=7^2$; $64=8^2$; $81=9^2$; $100=10^2$; $121=11^2$; $144=12^2$; $169=13^2$;
$196=14^2$; $225=15^2$; $256=16^2$; $289=17^2$; $324=18^2$; $361=19^2$;
$400=20^2$; $625=25^2$; $900=30^2$.

Def. Fie y un număr natural pătrat perfect. Rădăcina pătrată (radicalul de ordin doi) a numărului y este numărul natural x care verifică relația $x^2=y$.

În acest caz, scriem $\sqrt{y}=x$ și citim „radical (de ordin doi) din y este egal cu x".

$$\sqrt{y}=x \Leftrightarrow x^2=y \quad \forall x,y\in\mathbb{N},\ y \text{ p.p.}$$

Exemple. $\sqrt{25}=5$, deoarece $5^2=25$
$\sqrt{49}=7$; $\sqrt{64}=8$ etc.

Obs.

i) $\sqrt{x^2}=x$, $\forall x\in\mathbb{N}$

Exemplu. $\sqrt{172^2}=172$.

ii) $\sqrt{x^2}=|x|$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

Exemplu. $\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$.

iii) $\sqrt{x}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{N}$, x p.p.

← legătura dintre ridicarea la pătrat și operația de extragere a rădăcinii pătrate.

Metodă prin care putem extrage rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect n

① Descompunem numărul n în factori primi și căutăm să-l scriem sub forma $n=k^2$, $k\in\mathbb{N}$.

② Ținem cont de relația $\sqrt{n}=\sqrt{k^2}=k$, $n,k\in\mathbb{N}$.

$$\sqrt{7056}=2\cdot2\cdot3\cdot7=84.$$

Exemplu.

$$\sqrt{7056}=?$$

$$\begin{array}{r|ll} 7056 & 2 & >2 \\ 3528 & 2 & \\ 1764 & 2 & >2 \\ 882 & 2 & \\ 441 & 3 & >3 \\ 147 & 3 & \\ 49 & 7 & >7 \\ 7 & 7 & \\ 1 & & \end{array}$$

$$7056=2^4\cdot3^2\cdot7^2=(2^2\cdot3\cdot7)^2$$

$$7056=84^2$$

Prin urmare, $\sqrt{7056}=\sqrt{84^2}=84$

Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ

Def. $\mathbb{Q}_+=\{r\in\mathbb{Q}\mid r\geq0\}$ reprezintă mulțimea numerelor raționale nenegative.

Def. Rădăcina pătrată a unui număr $y\in\mathbb{Q}_+$ este numărul pozitiv x care verifică relația $x^2=y$.

Exemple. $\sqrt{\frac{4}{25}}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}$; $\sqrt{1{,}21}=\sqrt{\frac{121}{100}}=\sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2}=\frac{11}{10}=1{,}1$;

$\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{3}{7}$, deoarece $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3^2}{7^2}=\frac{9}{49}$.

Obs.

i) $\sqrt{x^2}=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}_+$

ii) $\sqrt{x}\geq0,\ \forall x\in\mathbb{Q}_+$

iii) $\sqrt{x^2}=|x|,\ \forall x\in\mathbb{Q}$

Exemplu. $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Numere iraționale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \leftarrow$ mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, \dots\} \leftarrow$ mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, \text{c.m.m.d.c}(a,b) = 1 \}$

↙ mulțimea numerelor raționale

Obs. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Def. Un număr care nu se poate scrie sub formă de raport a două numere întregi s.n. număr irațional.

Cu alte cuvinte, putem spune că un număr irațional este un număr zecimal cu o infinitate de zecimale și neperiodic.

Ex: $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Prop. $\sqrt{2}$ este irațional.

Dem. (Euclid) Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{Z}^*$ cu c.m.m.d.c$(a,b) = 1$ astfel încât $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Ridicând egalitatea la puterea a doua obținem $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ceea ce este echivalent cu $a^2 = 2b^2$, deci a^2 este număr par, prin urmare a este număr par.

Cum a este un număr par rezultă că există un număr $p \in \mathbb{Z}$ a.î. $a = 2p$.

Înlocuind în egalitatea $a^2 = 2b^2$, obținem $4p^2 = 2b^2$, de unde $2p^2 = b^2$, ceea ce ne conduce la faptul că b^2 este un număr par, deci b este număr par.

Deoarece am ajuns la faptul că atât a, cât și b sunt numere pare, acest lucru contrazice faptul că c.m.m.d.c$(a,b)=1$, deci presupunerea a fost falsă.

În concluzie, $\sqrt{2}$ este un număr irațional. □

Prop. Dacă $p\in\mathbb{N}$ prim, atunci $\sqrt{p}$ este un număr irațional.

Ex: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ etc.

Prop. Dacă $n\in\mathbb{N}$ nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este un număr irațional.

Ex: $\sqrt{8}, \sqrt{12}, \sqrt{24}$ etc.

Obs. Numărul π (definit ca raportul dintre lungimea oricărui cerc și lungimea diametrului său) este un număr irațional.

$$\pi = 3{,}14159265359\ldots$$

$$\pi \simeq 3{,}14$$

Aproximări des întâlnite în aplicatii:

$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$; $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$; $\sqrt{5} \simeq 2{,}23$; $\pi \simeq 3{,}14$;

$\pi \simeq \frac{22}{7}$ (Arhimede)

Prop. Dacă un număr rational q nu se poate scrie ca un raport de pătrate perfecte atunci $\sqrt{q}$ este număr irațional.

Exemple. $\sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{\frac{9}{5}}, \sqrt{\frac{11}{36}}$.

Prop. Suma și produsul dintre un număr rational și un număr irațional este un număr irațional.

Exemple. $2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -3\sqrt{7}, 3+\sqrt{5}, 2{,}3+\sqrt{2}, 1-\pi$.

Mulțimea numerelor reale

Def. Reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale s.n. mulțimea numerelor reale și se notează cu $\mathbb{R}$.

Definim următoarele mulțimi:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ← mulțimea numerelor reale pozitive

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ← mulțimea numerelor reale negative

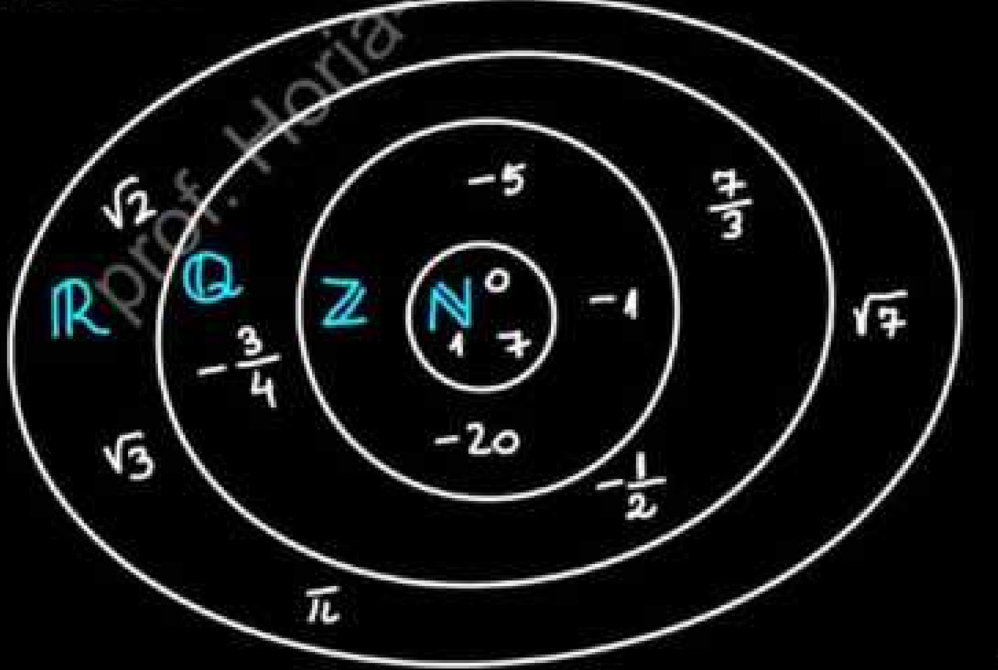
Obs. $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$

Obs. Mulțimea numerelor iraționale este diferența $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și se citește „$\mathbb{R}$ mai puțin $\mathbb{Q}$" sau pur și simplu „mulțimea numerelor iraționale".

Obs. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Obs. $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, deci mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt disjuncte.

Obs. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Def. Rădăcina pătrată a numărului real nenegativ y este numărul real nenegativ x care verifică relația $x^2 = y$.

Notăm: $\sqrt{y} = x$, $x, y > 0$.

Reguli de calcul cu radicali

Fie $a, b > 0$. Atunci:

ⓘ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ Caz particular: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$, $\forall a>0$.

Justificare. Fie $\sqrt{a}=m$ și $\sqrt{b}=n$, $m, n>0$.
Știm că $m^2=a$ și $n^2=b$.
Prin urmare, $\sqrt{ab}=\sqrt{m^2n^2}=\sqrt{(mn)^2}=mn=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Exemplu. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$.

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemplu. $\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}=\frac{5}{8}$.

Obs. Formula $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ este falsă.
Contraexemplu. $\sqrt{9}+\sqrt{16}\neq\sqrt{9+16}$, deoarece $3+4\neq 5$.

Aproximarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional nenegativ q

ⓘ Aproximarea cu o unitate prin lipsă a lui $\sqrt{q}$ este cel mai mic număr natural n care verifică relația $n^2\leq q<(n+1)^2$.

Tehnica presupune încadrarea lui q între două pătrate perfecte consecutive.

Exemplu: Aproximarea prin lipsă cu o unitate a lui $\sqrt{7{,}3}$ este 2. $(2^2\leq 7{,}3<3^2)$.

(ii) Aproximarea cu $\frac{1}{10^k}$ prin lipsă a lui $\sqrt{q}$ este numărul rațional $\frac{n}{10^k}$ a.î. n să reprezinte aproximarea cu o unitate prin lipsă a numărului $\sqrt{10^{2k}\cdot q}$.

Exemplu: Aproximarea cu $\frac{1}{10^2}$ prin lipsă a numărului $\sqrt{2}$ este egală cu $\frac{n}{100}=\frac{141}{100}=1{,}41$, $n=141$ (aproximarea cu o unitate prin lipsă a lui $\sqrt{20000}$).

Mulțimea numerelor reale
Aproximări. Rotunjiri.
Axa numerelor reale
Compararea și ordonarea numerelor reale
Modulul unui număr real

Obs. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Obs. Aproximarea prin lipsă a unui număr real la ordinul zecimilor/ sutimilor/ miimilor ($\underline{a}_z / \underline{a}_s / \underline{a}_m$) se realizează eliminând toate zecimalele aflate la dreapta ordinului de mărime la care dorim să aproximăm.

Exemplu: $\underline{a}_s(12,\underset{z}{3}\underset{s}{2}\underset{m}{5}45) = 12,32$

Obs. Aproximarea prin adaos la un anumit ordin se realizează adunând o zecime/ sutime/ miime la aproximarea prin lipsă la ordinul respectiv.

Exemplu: $\overline{a}_s(12,3\underline{2}545) = 12,33$

Def. Rotunjirea unui număr real la ordinul zecimilor/ sutimilor/ miimilor este aproximarea prin lipsă sau adaos (la acel ordin) care este cea mai apropiată de acel număr.

Obs. Dacă următoarea zecimală a ordinului la care dorim să rotunjim este mai mică decât 5, atunci aproximăm prin lipsă, altfel aproximăm prin adaos.

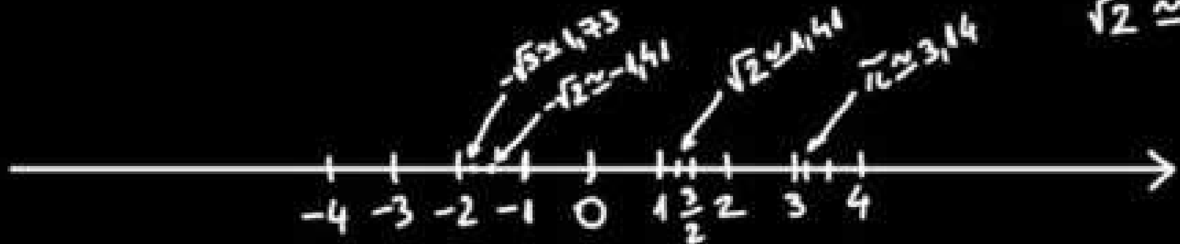
Exemple: $r_s(3,\overset{z}{1}\overset{s}{2}\overset{m}{3}7) = 3,12$

$r_m(3,1237) = 3,124$

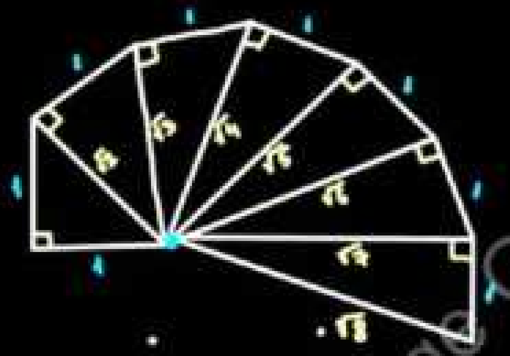
Def. O dreaptă pe care am ales un punct denumit origine (notat în general cu O), o unitate de măsură și un sens (de la stânga la dreapta) s.n. axa numerelor (reale).

$\frac{3}{2} = 1,5$

$\sqrt{2} \simeq 1,41$



Spirala lui Arhimede



Compararea numerelor reale (Relația de ordine „≤”)

Spunem că numărul real a este mai mic sau egal decât numărul real b și scriem $a \leq b$ dacă reprezentarea pe axa numerelor reale a numărului a este la stânga reprezentării numărului real b sau numărul a este egal cu numărul b.

Obs. În cazul în care $a \leq b$ dar $a \neq b$ scriem $a < b$ și citim „a este mai mic strict decât b”.

Obs. $a \leq b$ se mai poate scrie și $b \geq a$.

Exemple: $2 < \pi$; $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$;

Obs. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $a \leq b$ și $b \geq a$, atunci $a = b$.

Obs. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.
Ca atare, pentru a compara două numere reale putem compara diferența lor cu 0.

Obs. Dacă $a, b > 0$ atunci $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.

Prin urmare, pentru a compara două numere reale pozitive putem compara pătratele lor.

Exemplu: Doresc să-l compar pe $2\sqrt{3}$ cu $3\sqrt{2}$.

$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12$ Cum $12 < 18$ rezultă că

$(3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9 \cdot 2 = 18$ $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Def. Opusul numărului real a este numărul real $-a$.

Exemplu: Opusul lui $3\sqrt{2}$ este $-3\sqrt{2}$, iar opusul lui $-\sqrt{2}$ este $-(-\sqrt{2}) = +\sqrt{2}$.

Def. Inversul numărului real nenul a se notează cu a^{-1} și este egal cu $\frac{1}{a}$.

Exemplu. $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

Def. Modulul (valoarea absolută a) unui număr real a este numărul real pozitiv care reprezintă distanța de la numărul real a la originea axei numerelor reale.

Modulul numărului real a se notează cu $|a|$.

Def. Fie $x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

s.n. explicitarea modulului.

Exemple. $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$; $|-2\sqrt{7}| = -(-2\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$;

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$, deoarece $1-\sqrt{2} < 0$.

Obs. Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt{x^2} = |x|$

Def. Distanta dintre două numere reale de pe axa numerelor reale este egală cu modulul diferenței lor.

Distanța (pe axă) de la x la y se notează cu $\mathrm{dist}(x,y)$.

Așadar, $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplu. $\mathrm{dist}(-3,5) = |-3-5| = |-8| = 8$.

Proprietățile modulului

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ au loc următoarele relații:

(i) $|x| \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (deoarece modulul reprezintă o distanță)

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x-y| = |y-x|$ (distanța de la x la y este egală cu distanța de la y la x)

(iv) $|-x| = |x|$ (consecință a proprietății iii) pentru $y=0$)

(v) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului)

(vi) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(vii) $|x^n| = |x|^n, n \in \mathbb{N}$ (consecință a proprietății vi))

(viii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \in \mathbb{R}^*$.

Scoaterea factorilor de sub radical

Def. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}_+$. Relația $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ reprezintă scoaterea factorului a de sub radical.

Justificare. $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a|\sqrt{b}$.

Exemple. $\sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{7^6 \cdot 5} = \sqrt{(7^3)^2 \cdot 5} = 7^3\sqrt{5}$

$\sqrt{5^8 \cdot 7^4 \cdot 11} = \sqrt{(5^4)^2 \cdot (7^2)^2 \cdot 11} = 5^4 \cdot 7^2\sqrt{11}$;

$\sqrt{3^3 \cdot 7} = \sqrt{3^2 \cdot 3 \cdot 7} = 3\sqrt{3 \cdot 7} = 3\sqrt{21}$.

Obs. Fie $n \in \mathbb{N}$ par și $a > 0$. Atunci $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

Exemplu. $\sqrt{17^{50}} = 17^{\frac{50}{2}} = 17^{25}$.

Obs. Dacă $n \in \mathbb{N}$ impar și $a > 0$. Atunci $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{a}$.

Exemplu. $\sqrt{5^5} = 5^{\frac{5-1}{2}}\sqrt{5} = 5^{\frac{4}{2}}\sqrt{5} = 5^2\sqrt{5}$.

Metodă prin care putem scoate factorii de sub radical dintr-un număr natural care nu este pătrat perfect.

Descompunem numărul în factori primi și ne folosim de toate regulile de calcul prezentate anterior.

Exemplu: $\sqrt{3024}$

$3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$

Așadar,

$\sqrt{3024} = \sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 7} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{3-1}{2}}\sqrt{3 \cdot 7}$

$= 2^2 \cdot 3\sqrt{21} = 12\sqrt{21}$.

3024	⑦	
432	3	>3
144	3	
48	③	
16	2	>2
8	2	
4	2	>2
2	2	
1		

$\sqrt{3024} = 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 7}$

Obs. Atunci când vrem să scoatem factorii de sub radical dintr-un număr natural relativ mic este de preferat să scriem acel număr natural ca un produs dintre un pătrat perfect și un alt număr natural.

Exemple. $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$;

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$; $\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$.

Introducerea factorilor sub radical

Def. Operatia inversă scoaterii factorilor de sub radical s.n. introducerea factorilor sub radical.

Adică, dacă $a, b>0$, atunci $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}$ reprezintă introducerea factorului a sub radical.

Exemple.

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}.$$
$$3\sqrt{3}=\sqrt{3^2\cdot 3}=\sqrt{9\cdot 3}=\sqrt{27}$$
$$-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\cdot 2}=-\sqrt{50}$$

Operații cu numere reale

Adunarea numerelor reale

Proprietăți:

(i) Comutativitatea: $x+y=y+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

(ii) Asociativitatea: $(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

(iii) Existența elementului neutru (numărul 0)

$$x+0=0+x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Scăderea numerelor reale

Diferența numerelor reale x și y este $x-y = x+(-y)$, unde $-y$ este opusul lui y.

Exemple: $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$$4\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 6\sqrt{5} = \sqrt{7} + 8\sqrt{5}$$

Înmulțirea numerelor reale

Proprietăți:

ⓘ Comutativitatea: $xy = yx$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

(ii) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

(iii) Existența elementului neutru (1)

$$x\cdot 1 = 1\cdot x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(iv) Distributivitatea înmulțirii față de adunare (și față de scădere).

$$x(y \pm z) = xy \pm xz, \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Obs. Împărțirea numărului $a \in \mathbb{R}$ la $b \in \mathbb{R}^*$ se notează cu $\frac{a}{b}$ și are loc următoarea relație.

$$\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b} = a\cdot b^{-1},$$ unde b^{-1} reprezintă inversul numărului real nenul b.

Exemple: $2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{5} = 14\sqrt{15}$;

$a\sqrt{b}\cdot c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 7\sqrt{5}) = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 7\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$$
$$= 3\cdot 2 - 7\sqrt{10} = 6 - 7\sqrt{10}.$$

$$14\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = (14:2)\sqrt{6:3} = 7\sqrt{2}.$$

Ridicarea la putere a unui număr real cu exponent număr întreg

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z}_+$. Atunci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

Exemplu: $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$.

Proprietăți și reguli de calcul cu puteri

(i) $a^1 = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

Exemplu: $\sqrt{3}^1 = \sqrt{3}$;

(ii) $a^0 = 1 \quad , \forall a \in \mathbb{R}^*$

Exemple: $\pi^0 = 1; \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^0 = 1$;

(iii) $0^n = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^*$

Exemplu: $0^7 = 0$.

(iv) 0^0 nu are sens

(v) $1^n = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}^*$

Exemplu: $1^{11} = 1$

(vi) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0$

Exemplu: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$;

(vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \ a, b \neq 0$

Justificare: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Exemple: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$;

$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$.

viii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\forall a\in\mathbb{R}, \forall m,n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $\sqrt{7}^2\cdot\sqrt{7}^5=\sqrt{7}^{2+5}=\sqrt{7}^7$

ix) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\forall a\in\mathbb{R}, \forall m,n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $(-3)^3:(-3)^7=(-3)^{3-7}=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$.

x) $(a^m)^n=a^{mn}$, $\forall a\in\mathbb{R}, \forall m,n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $[(-2)^3]^2=(-2)^{3\cdot2}=(-2)^6=64$.

xi) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$, $\forall a,b\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $(2\sqrt{3})^4=2^4\cdot\sqrt{3}^4=16\cdot3^2=144$.

xii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $\forall a\in\mathbb{R}, \forall b\in\mathbb{R}^*, \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{7}\right)^2=\frac{(2\sqrt{5})^2}{7^2}=\frac{4\cdot5}{49}=\frac{20}{49}$

xiii) Convenție: Notăm cu $\ominus$ un număr real negativ (oarecare).

Fie n un număr natural

Atunci: $\ominus^n>0$, dacă n este par | $(-)^{par}=+$;

$\ominus^n<0$, dacă n este impar | $(-)^{impar}=-$.

Exemple: $(-2)^4=+2^4=16$

$(-2)^3=-2^3=-8$

Obs. În general, $-a^n\neq(-a)^n$

Exemplu: $-2^2=-4$

$(-2)^2=4$.

xiv) Dacă $0<a<b$, atunci $a^n<b^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Exemplu: $\sqrt{5}^7<\sqrt{7}^7$

xv) Fie $m,n\in\mathbb{N}$ cu $m<n$.

Atunci:

$a^m<a^n$, dacă $a>1$

$a^m>a^n$, dacă $0<a<1$

Exemple: $2^3<2^5$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{2}\right)^5$;

Cazuri particulare.

(i) $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $\forall a>0, \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $(\sqrt{5})^7 = \sqrt{5^7} = 5^3\sqrt{5} = 125\sqrt{5}$.

(ii) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{b^n}}$, $\forall a,b>0, \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{3}{7}$.

(iii) $(a\sqrt{b})^n = a^n\sqrt{b^n}$, $\forall a\in\mathbb{R}^*, \forall b>0, \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemplu: $(2\sqrt{5})^3 = 2^3\cdot\sqrt{5^3} = 2^3\cdot 5\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$.

Raționalizarea numitorului unei fracții

A raționaliza numitorul unui raport de numere reale care are la numitor un număr irațional presupune să amplificăm facția convenabil astfel încât numitorul să devină un număr rațional.

(I) Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, cu $a,b\in\mathbb{Q}^*$ și $b>0$

În acest caz, amplificăm cu $\sqrt{b}$.

$$^{\sqrt{b})}\frac{N}{a\sqrt{b}} = \frac{N\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{N\sqrt{b}}{ab}, \quad N\in\mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{Q}^*, b>0$$

Exemple:

$$^{\sqrt{3})}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$^{\sqrt{2})}\frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10};$$

$$^{\sqrt{3})}\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Def. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$ și $b, d > 0$. Conjugatul numărului real $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ este $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$, iar conjugatul numărului real $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ este numărul real $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$.

Exemplu. Conjugatul lui $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ este $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, iar conjugatul lui $2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}$ este $2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}$.

Formulă de calcul prescurtat („Produsul dintre sumă și diferență")

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Justificare: $(a+b)(a-b) = a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Exemple. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

$(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3) = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 12 - 9 = 3$

$102 \cdot 98 = (100+2)(100-2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$

II Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ sau $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$, $b, d > 0$.

În acest caz, amplificăm cu conjugatul numitorului:

$$ {}^{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}\frac{N}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}} = \frac{N(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})} = \frac{N(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b})^2-(c\sqrt{d})^2}$$

$$= \frac{N(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}, \quad a, b, c, d, N \in \mathbb{Q}^*, \ b, d > 0$$

Exemplu: $${}^{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}$$

$$= \frac{{}^{4}\cancel{8}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{\cancel{2}} = 4(\sqrt{7}-\sqrt{5}).$$

$$^{a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}\frac{N}{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}=\frac{N(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}=\frac{N(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b})^2-(c\sqrt{d})^2}$$

$$=\frac{N(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d},\quad a,b,c,d,N\in\mathbb{Q}^*,\ b,d>0$$

Exemplu: $$^{3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}\frac{3}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}=\frac{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}{(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}=\frac{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}{(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}{9\cdot5-4\cdot7}=\frac{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}{45-28}=\frac{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})}{17}.$$

Formulele de calcul prescurtat

Ⅰ „Binomul sumă la pătrat"

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Justificare:

Metoda algebrică:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Metoda geometrică (vizual):

pătrat

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2$$

aria pătratului

Exemple: $(\sqrt{2}+1)^2=\sqrt{2}^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2=3+2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(2\sqrt{3})^2+2\cdot2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=12+4\sqrt{15}+5=17+4\sqrt{15}$

$101^2=(100+1)^2=100^2+2\cdot100\cdot1+1^2=10000+201$

$=10201.$

(II) „Binomul diferentă la pătrat"

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

Justificare:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Exemple: $(\sqrt{5}-1)^2=\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot1+1^2=5-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5}$

$(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=(2\sqrt{5})^2-2\cdot2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=20-4\sqrt{15}+3=23-4\sqrt{15}$

$99^2=(100-1)^2=100^2-200+1^2=10000-200+1$
$=9801.$

Medii

(I) **Media aritmetică** a n numere reale $a_1,a_2,\dots,a_n$ se notează cu $m_a(a_1,a_2,\dots,a_n)$ și este egală cu valoarea raportului dintre suma numerelor reale $a_1,\dots,a_n$ și n. Adică:

$$m_a(a_1,a_2,\dots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},\ \forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$$

Cazuri particulare:

$$m_a(x,y)=\frac{x+y}{2},\quad x,y,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

$$m_a(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

Exemple: $m_a(2,5,8)=\dfrac{2+5+8}{3}=\dfrac{15}{3}=5.$

$$m_a(\sqrt{2}-\sqrt{3},\sqrt{2}+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{2}\cancel{-\sqrt{3}}+\sqrt{2}\cancel{+\sqrt{3}}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

(II) **Media aritmetică ponderată** a n numere reale $a_1,a_2,\dots,a_n$ cu ponderile $p_1,p_2,\dots,p_n$ se notează cu $m_{ap}\begin{pmatrix}a_1,a_2,\dots,a_n\\p_1,p_2,\dots,p_n\end{pmatrix}$ și este dată de relația:

$$m_{ap}\begin{pmatrix}a_1,a_2,\dots,a_n\\p_1,p_2,\dots,p_n\end{pmatrix}=\frac{\overbrace{(a_1+\dots+a_1)}^{\text{de } p_1 \text{ ori}}+\overbrace{(a_2+\dots+a_2)}^{\text{de } p_2 \text{ ori}}+\dots+\overbrace{(a_n+\dots+a_n)}^{\text{de } p_n \text{ ori}}}{p_1+p_2+\dots+p_n}$$

Adică, $m_{ap}\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} = \dfrac{a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

Cazuri particulare:

$$m_{ap}\begin{pmatrix} a, b \\ p, q \end{pmatrix} = \frac{ap + bq}{p+q}$$

$\begin{pmatrix} \text{a cu ponderea } p \\ \text{b cu ponderea } q \end{pmatrix}$

$$m_{ap}\begin{pmatrix} x, y, z \\ m, n, p \end{pmatrix} = \frac{xm + yn + zp}{m+n+p}$$

Exemple: $m_{ap}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{6\cdot3 + 8\cdot2 + 10\cdot5}{3+2+5} = \dfrac{84}{10} = 8{,}4$

$$m_{ap}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix} = \frac{8\cdot25\% + 10\cdot75\%}{25\% + 75\%} = 8\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{3}{4}$$

$$= \frac{8 + 10\cdot3}{4} = \frac{38}{4} = 9{,}5$$

Ⅲ Media geometrică (proporțională) a două numere reale pozitive x și y se notează cu $m_g(x,y)$ și este egală cu rădăcina pătrată a produsului lor.

$$m_g(x,y) = \sqrt{xy} \quad , \ x, y \in \mathbb{R}_+$$

Exemple: $m_g(4,9) = \sqrt{4\cdot9} = \sqrt{36} = 6$

$$m_g(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1) = \sqrt{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{\sqrt{5}^2 - 1^2}$$

$$= \sqrt{4} = 2.$$

Ⅳ Media armonică a două numere reale nenule a și b se notează cu $m_h(a,b)$ și este egală cu inversul mediei aritmetice a inverselor numerelor a și b.

Concret,

$$m_h(a,b)=\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=1\cdot\frac{2}{\frac{^{b)}1}{a}+\frac{^{a)}1}{b}}=\frac{2}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

Așadar, $m_h(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$ cu $a+b\neq 0$

Exemplu: $m_h(2,8)=\frac{2\cdot 2\cdot 8}{2+8}=\frac{32}{10}=3{,}2$

Teoremă (Inegalitatea mediilor)

Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ și $a,b>0$, atunci

$$m_h(a,b)\leq m_g(a,b)\leq m_a(a,b)$$

Dem. • Partea I ($m_h(a,b)\leq m_g(a,b)$)

$m_h(a,b)=\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{\frac{(2ab)^2}{(a+b)^2}}$ și $m_g(a,b)=\sqrt{ab}$

Vreau să arăt că $\frac{(2ab)^2}{(a+b)^2}\leq ab \;\big|\cdot(a+b)^2$.

Așadar, $4a^2b^2\leq ab(a+b)^2$.

$4a^2b^2\leq ab(a+b)^2 \;|:ab \Leftrightarrow 4ab\leq(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 4ab\leq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0\leq a^2+2ab+b^2-4ab$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$, adevărat pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

• Partea a II-a ($m_g(a,b)\leq m_a(a,b)$)

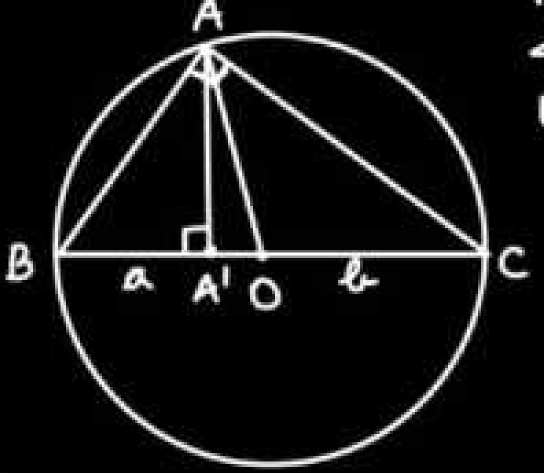
• Metoda I (Algebric)

Vreau să arăt că $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, adică (prin ridicare la pătrat) că $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}\;|\cdot 4$.

Obținem $4ab\leq(a+b)^2$, de unde $(a-b)^2\geq 0$, adevărat pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

- Metoda II (Geometric) - A se studia după parcurgerea teoremelor legate de cerc, Teorema medianei din unghi drept și Teorema înălțimii.

Considerăm cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în care înscriem un triunghi dreptunghic ΔBAC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și considerăm următoarele notații:



$$pr_{[BC]} A = AA' \overset{not}{=} a > 0$$

$$A'C \overset{not}{=} b > 0$$

Evident, $BC = a + b$.

AA' este înălțime și AO este mediană, deci $AA' \le AO$. (evident)

Dar,

$$AA' \text{ înălțime} \overset{T.h}{\Longrightarrow} AA' = \sqrt{ab}$$

$$AO \text{ mediană} \overset{T.med}{\Longrightarrow} AO = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Așadar, $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

În concluzie, $m_g(a,b) \le m_a(a,b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a, b > 0$.

□

Ecuatia de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Numim soluție a unei ecuații în A un număr $\alpha \in A$ care verifică ecuația dată atunci când îl înlocuim în locul necunoscutei.

Mulțimea soluțiilor unei ecuații o notăm în general cu S.

Exemplu: Pentru ecuatia (în $\mathbb{R}$) $3x + 6 = 0$, $S = \{-2\}$.

Pentru ecuatia (în $\mathbb{N}$) $x + 2 = 1$, $S = \phi$.

Rezolvarea ecuației $x^2=a$, $a\in\mathbb{R}$ presupune studiul elementelor mulțimii S.

Distingem următoarele situații:

(i) Dacă $a>0$, atunci ecuația $x^2=a$ are două soluții reale distincte $x_1=-\sqrt{a}$ și $x_2=\sqrt{a}$.

Așadar, $S=\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}$.

Exemplu: $x^2=4 \Rightarrow x_1=-\sqrt{4}=-2$ și
$x_2=\sqrt{4}=2$.

În concluzie, $S=\{-2,2\}$.

(ii) Dacă $a=0$, atunci ecuația $x^2=a$ are două soluții reale egale și nule, $x_1=x_2=0$.

Ca atare, $S=\{0\}$.

(iii) Dacă $a<0$, atunci ecuația $x^2=a$ nu are soluții reale.

Așadar, $S=\emptyset$.

Exemplu: $x^2=-9 \Rightarrow S=\emptyset$.

Formula radicalilor compuși

Fie $a,b>0$. Atunci:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}},\text{ unde}$$

$c=\sqrt{a^2-b}$.

Exemplu: Calculați $\sqrt{16+6\sqrt{7}}$.

Met I. (Formula radicalilor compuși)

$$\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{16+\sqrt{6^2\cdot 7}}=\sqrt{16+\sqrt{36\cdot 7}}=\sqrt{16+\sqrt{252}}$$

Identificăm $a=16$ și $b=252$.

$$c=\sqrt{a^2-b}=\sqrt{16^2-252}=\sqrt{256-252}=\sqrt{4}=2$$

Așadar,

$$\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{16+2}{2}}+\sqrt{\frac{16-2}{2}}=\sqrt{9}+\sqrt{7}=3+\sqrt{7}.$$

Met II.

Observăm că $16+6\sqrt{7}=9+2\cdot 3\sqrt{7}+7=3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}^2$, deci $16+6\sqrt{7}=(3+\sqrt{7})^2$.

Ca atare, $\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{(3+\sqrt{7})^2}=|3+\sqrt{7}|=3+\sqrt{7}$.

Ecuația de gradul al doilea

Forma generală:

$$ax^2+bx+c=0,\ \underbrace{a,b,\overset{\text{termen liber}}{c}}_{\text{coeficienți}}\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

Cazuri particulare:

(I.) Dacă $b=0$, atunci ecuația de gradul al doilea are forma

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{-c}{a},$$ adică

este o ecuație de forma $x^2=A$, $A\in\mathbb{R}$.

Exemplu: $x^2-3=0$ $(a=1, b=0, c=-3)$

$x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3$, deci $x_1=-\sqrt{3}$ și $x_2=\sqrt{3}$.

$S=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(II.) Dacă $c=0$, atunci ecuația de gradul al doilea are forma

$ax^2+bx=0$ și se rezolvă astfel:

$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0$, de unde obținem soluțiile $x=0 \Rightarrow x_1=0$ și $ax+b=0 \Rightarrow x_2=\frac{-b}{a}$.

Ca atare,

$$S=\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$$

Exemplu: $2x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(2x-3)=0$

$$x=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow x_2=\frac{3}{2}.$$

$$S=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$$

Ⓘⅈⅈ. Dacă $b=c=0$, atunci ecuația de gradul al doilea are forma $ax^2=0$ cu soluțiile $x_1=x_2=0$, deci $S=\{0\}$.

Exemplu: $\sqrt{3}x^2=0 \Rightarrow S=\{0\}$.

Rezolvarea ecuației de gradul al doilea (forma completă).

Obs.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\frac{\cancel{a}b^2}{4a^2}+{}^{4)}\frac{ac}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

Notăm $\underset{\text{delta}}{\Delta} \overset{not}{=} b^2-4ac$ (discriminantul ecuației) și presupunem că $\Delta \geq 0$.

Obținem ecuația de gradul al doilea scrisă sub formă canonică:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0$$

Notând $x+\frac{b}{2a}\overset{not}{=}u$ rezultă ecuația de gradul al doilea:

$$au^2=\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow u^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$ cu soluțiile

$$u_1=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \text{ și } u_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

Așadar, ținând cont de notația anterioară, obținem ecuațiile de gradul I:

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

și

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

MORALA

Pentru a rezolva ecuația de gradul al doilea, procedăm astfel:

Pasul I. Calculăm $\Delta=b^2-4ac$.

Pasul II.

ⓘ Dacă $\Delta>0$, atunci ecuația are două soluții reale distincte

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ii) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are două soluții reale egale (o rădăcină reală de multiplicitate algebrică egală cu 2)

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

iii) Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu admite soluții reale.
(rădăcini)

Exemple:

i) $x^2+5x+6=0$; $a=1$; $b=5$; $c=6$;

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 5^2-4\cdot1\cdot6 = 25-24 = 1$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Așadar,

$$S = \{-3, -2\}.$$

ii) $x^2+6x-7=0$; $a=1$; $b=6$; $c=-7$;

$\Delta = 6^2-4\cdot1\cdot(-7) = 36+28 = 64$

$\Delta = 64 > 0 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{-6-8}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-6+\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{-6+8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$S = \{-7, 1\}$.

iii) $x^2+6x+9=0$; $a=1$; $b=6$; $c=9$;

$\Delta = 6^2-4\cdot 1\cdot 9 = 36-36=0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2\cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$S = \{-3\}$.

iv) $2x^2-x+9=0$; $a=2$, $b=-1$, $c=9$;

$\Delta = (-1)^2-4\cdot 2\cdot 9 = 1-72=-71<0$,

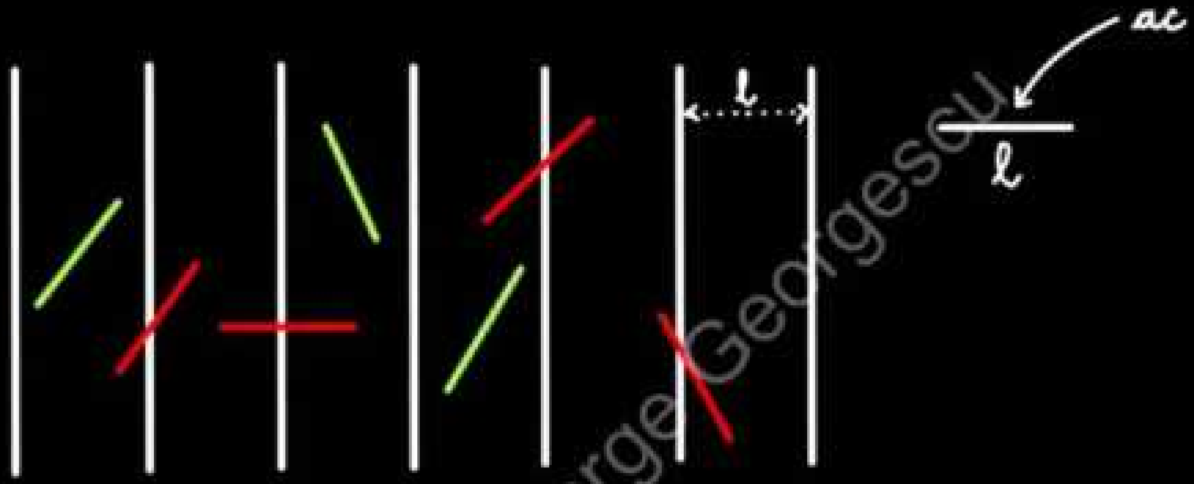
deci $S = \emptyset$.

Acul lui Buffon

Considerăm pe o suprafață netedă (de exemplu pe foaia de hârtie) mai multe drepte paralele la distanța l constantă una de cealaltă.

Aruncăm un ac de lungime l pe suprafața respectivă.

Probabilitatea ca acul să intersecteze o dreapă este egală cu $\frac{2}{\pi}$.



Obs.

Putem aproxima, experimental, valoarea lui π.

Horia-George Georgescu

ECUAȚIA DE GRAD I (LINIARĂ)
SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

$$ax+b=0$$

Ecuații. Noțiuni introductive.

Def. "O ecuatie reprezintă o egalitate între două expresii algebrice în care apar variabilele (necunoscute).

Egalitatea respectivă este adevărată doar pentru anumite valori ale variabilelor (necunoscutelor).

O valoare care verifică egalitatea din ecuația respectivă s.n. soluție a ecuației.

Exemple:

i) $x+2=7$; ← o necunoscută

ii) $2x-3=5$;

iii) $2(x+3)=x+6$

iv) $x+y=10$; ← două necunoscute.

Observăm că $x=5$ este o soluție a ecuației i), dar nu este o soluție a ecuației ii).

Def. O ecuatie de forma $ax+b=0$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ și $b\in\mathbb{R}$ s.n ecuație de gradul I/liniară (cu o necunoscută).

Exemple:

$2x+5=0$

$-x-3=0$

$7x+10=0$

$3x=0$

MEMBRUL STÂNG MEMBRUL DREPT

$E_S(x) = E_D(x)$

M.S. (L.H.S.) M.D. (R.H.S.)

A rezolva o ecuație în mulțimea A presupune aflarea (studierea) mulțimii soluțiilor $S\subset A$ ecuației respective.

Exemple:

ⓘ Rezolvați în $A=\{0,1,2,3\}$ ecuația $x+1=3$.

Dacă $x = 0$, atunci $0 + 1 = 1 \neq 3$, deci $x = 0$ nu este soluție.

Dacă $x = 1$, atunci $1 + 1 = 2 \neq 3$, deci $x = 1$ nu este soluție.

Dacă $x = 2$, atunci $1 + 2 = 3$, deci $x = 2$ este soluție.

Dacă $x = 3$, atunci $1 + 3 = 4$, deci $x = 3$ nu este soluție.

În concluzie, $S = \{2\}$.

(ii) Rezolvați în $B = \{3, 7\}$ ecuația $x + 2 = 10$.

Dacă $x = 3$, atunci $3 + 2 = 5 \neq 0$, deci $x = 3$ nu este soluție.

Dacă $x = 7$, atunci $7 + 2 = 9 \neq 0$, deci $x = 7$ nu este soluție.

În concluzie, $S = \emptyset$, deci ecuația nu are soluții în B.

(iii) Rezolvați în $M = \{-3, -2, 2\}$ ecuația $x^2 = 4$.

Dacă $x = -3$, atunci $(-3)^2 = 9 \neq 4$, deci $x = -3$ nu este soluție.

Dacă $x = -2$, atunci $(-2)^2 = 4$, deci $x = -2$ este soluție.

Dacă $x = 2$, atunci $2^2 = 4$, deci $x = 2$ este soluție.

În concluzie, $S = \{-2, 2\}$.

Def. Două ecuații s.n. echivalente dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

Exemplu:

$x+2=7$ și $2x+4=14$ sunt ecuații echivalente (în $\mathbb{N}$) deoarece ambele au mulțimea soluțiilor $S=\{5\}$.

Prop. Soluția reală a ecuației de gradul I $ax+b=0$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ și $b\in\mathbb{R}$ este $x=-\frac{b}{a}$.

Justificare:

Dacă $x=-\frac{b}{a}$, atunci $ax+b=\cancel{a}\cdot-\frac{b}{\cancel{a}}+b=$
$=-b+b=0$.

Exemplu: Soluția reală a ecuației $2x+4=0$ este $x=\frac{-4}{2}=-2$.

Proprietățile relației de egalitate (Euclid):

$A=B \mid +C \Rightarrow A+C=B+C$

$A=B \mid -C \Rightarrow A-C=B-C$ (*)

$A=B \mid \cdot C \Rightarrow A\cdot C=B\cdot C$

$A=B \mid :C, C\neq 0 \Rightarrow A:C=B:C$

Obs. Atunci când adunăm/scădem un număr într-o ecuație sau înmulțim cu un număr o ecuație obținem o ecuație echivalentă cu ecuația dată.

Rezolvarea ecuației de gradul I cu o necunoscută

Ⓘ Metoda transformărilor în ecuații echivalente:

Pasul 1: Desființăm parantezele și efectuăm eventualele calcule.

Pasul 2: Folosind proprietățile studiate, aducem ecuația la forma echivalentă $ax=b$.

Pasul 3: Soluția este $x=\frac{b}{a}$.

Pasul 4: Verificăm dacă soluția se află în mulțimea în care trebuia să rezolvăm ecuația.

Exemplu:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3(x+2)+1 = x+13$$

$3(x+2)+1 = x+13 \Leftrightarrow 3x+6+1 = x+13$

$\Leftrightarrow 3x+7 = x+13 \mid -x \Leftrightarrow 3x+7-x = \cancel{x}+13-\cancel{x}$

$\Leftrightarrow 2x+7=13 \mid -7 \Leftrightarrow 2x+7-7=13-7 \Leftrightarrow 2x=6$

$\Leftrightarrow x=\frac{6}{2}=3\in\mathbb{Z}$.

În concluzie, $S=\{3\}$.

II Metoda separării termenilor

Pasul 1: Desființăm parantezele și efectuăm eventualele calcule.

Pasul 2 (Separarea termenilor): Trecem toți termenii cu necunoscută într-un membru (în general în M.S.) și cei liberi în celălalt membru. Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației în celălalt membru se realizează prin schimbarea semnului termenului respectiv.

Pasul 3: Reducem (calculăm) termenii și aducem ecuația la forma $ax=b$ cu soluția $x=\frac{b}{a}$.

Pasul 4: Verificăm dacă soluția se află în multimea în care trebuia să rezolvăm ecuația.

<u>Exemple</u>

i) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3(x+2)+1 = x+13$$

$$3(x+2)+1 = x+13 \Leftrightarrow 3x+6+1 = x+13$$

$$\Leftrightarrow 3x\underbrace{+7}_{-7} = \overset{-x}{x}+13 \Leftrightarrow 3x-x = 13-7$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z}.$$

În concluzie, $S = \{3\}$.

ii) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3x-7 = 9+2x$$

$$3x\underbrace{-7}_{+7} = 9\overset{-2x}{+2x} \Leftrightarrow 3x-2x = 9+7$$

$\Leftrightarrow x = 16 \in \mathbb{Z}$, deci $S = \{16\}$.

iii) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația

$$-3t-2 = 6-t$$

$$-3t-2 = 6-t \Leftrightarrow -3t+t = 6+2 \Leftrightarrow -2t = 8$$

$\Leftrightarrow t = \frac{8}{-2} = -4 \in \mathbb{Z}$, deci $S = \{4\}$.

Obs.

i) Există ecuații care nu au nicio soluție.

Exemplu: $2(x+1)-1 = 2x+5$

$2(x+1)-1=2x+5 \Leftrightarrow 2x+2-1=2x+5$

$\Leftrightarrow 2x+1=2x+5 \Leftrightarrow 2x-2x=5-1 \Leftrightarrow 0=4$

imposibil, deci $S=\phi$.

ii) Există ecuații pentru care orice număr este soluție (au o infinitate de soluții). Acestea se numesc identități.

Exemplu: $3(x-2)+1=3(x-1)-2$

$3(x-2)+1=3(x-1)-2 \Leftrightarrow 3x-6+1=3x-3-2$

$\Leftrightarrow 3x-5=3x-5 \Leftrightarrow 3x-3x=-5+5 \Leftrightarrow 0=0$

pentru orice x.

În cazul rezolvării ecuațiilor în $\mathbb{R}$, tehnica de rezolvare este similară rezolvării ecuațiilor în $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ și se fixează prin exercițiu.

Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Forma generală:

$$S: \begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad a,b,c,d,p,q \in \mathbb{R}$$

Exemple: $S_1: \begin{cases} x+2y=8 \\ 15x-9y=3 \end{cases}$; $S_2: \begin{cases} x-y=5 \\ 2x+6y=-1 \end{cases}$

A rezolva un sistem de două ecuatii de gradul I în $\mathbb{R}$ presupune să găsim perechea (sau perechile) de numere reale care să verifice ambele ecuatii ale sistemului, deci să aflăm mulțimea soluțiilor.

Metoda substituției

Pasul 1: Vedem dacă putem să împărțim o ecuatie a sistemului printr-un număr real nenul pentru a o aduce la o formă echivalentă mai simplă.

Pasul 2: Exprimăm într-una dintre ecuatii o necunoscută în functie de cealaltă necunoscută o înlocuim sub această formă în cealaltă ecuație.

Pasul 3: Rezolvăm ecuatia de gradul I cu o necunoscută reușind apoi să aflăm și cealaltă necunoscută.

Exemplu:

Rezolvați sistemul:

$$S_1: \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 15x - 9y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 15x - 9y = 3 \mid :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ 5(8-2y) - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ 40 - 10y - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ -13y = -39 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y \\ y = \frac{-39}{-13} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2 \cdot 3 = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

În concluzie, $x=2$ și $y=3$ deci $S=\{(2,3)\}$.

Metoda reducerii

Pasul 1: Vedem dacă putem să împărțim o ecuație a sistemului printr-un număr real nenul pentru a o aduce la o formă echivalentă mai simplă.

Pasul 2: Înmulțim ambele (sau doar una) ecuații convenabil a.î. în urma adunării/scăderii lor (membru cu membru) să se reducă una dintre cele două necunoscute.

Pasul 3: Rezolvăm ecuația de gradul I cu o necunoscută înlocuind soluția într-una dintre cele două ecuații ale sistemului pentru a afla și cealaltă necunoscută.

Exemplu:

Rezolvați sistemul:

$$S: \begin{cases} x+2y=8 \\ 15x-9y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 15x-9y=3 \mid :3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=8 \mid \cdot(-5) \\ 5x-3y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-10y=-40 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$$

$$\oplus \; / \; -13y=-39 \Rightarrow y=\frac{-39}{-13} \Rightarrow y=3$$

Înlocuind $y=3$ în prima ecuație a sistemului, obținem $x+6=8$, de unde $x=2$.

În concluzie, $x=2$ și $y=3$, deci $S=\{(2,3)\}$.

Obs. Dacă în urma aplicării uneia dintre metode obținem o identitate atunci cele două ecuații ale sistemului sunt echivalente, iar sistemul are o infinitate de soluții exprimând o necunoscută în funcție de cealaltă.

Exemplu:

Rezolvați sistemul:

$$S_2:\begin{cases}x+y=1\\ 2x+2y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=1\\ 2x+2y=2\,|:2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x+y=1\end{cases}$$

$$\ominus\quad 0=0$$

$x+y=1 \Rightarrow x=1-y$.

Așadar, soluțiile sistemului sunt de forma $x=1-\lambda$ și $y=\lambda$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$.

În concluzie, $S=\{(1-\lambda,\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Horia-George Georgescu

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

STATISTICĂ

Elemente de organizare a datelor
Tabele. Grafice. Diagrame.

Sondaj:

Într-un oraș, 100 de elevi au fost întrebați în legătură cu preferințele lor în materie de animații.

Aceștia au avut de ales animația preferată dintre următoarele opțiuni: Ratatouille, Frozen, Finding Nemo și Inside out.

În urma sondajului rezultatele au fost următoarele:

25 de elevi au ales „Ratatouille";
20 de elevi au ales „Frozen";
40 de elevi au ales „Finding Nemo";
15 elevi au ales „Inside out";

Rezultatele obținute pot fi organizate astfel:

Ⓘ Folosind un tabel

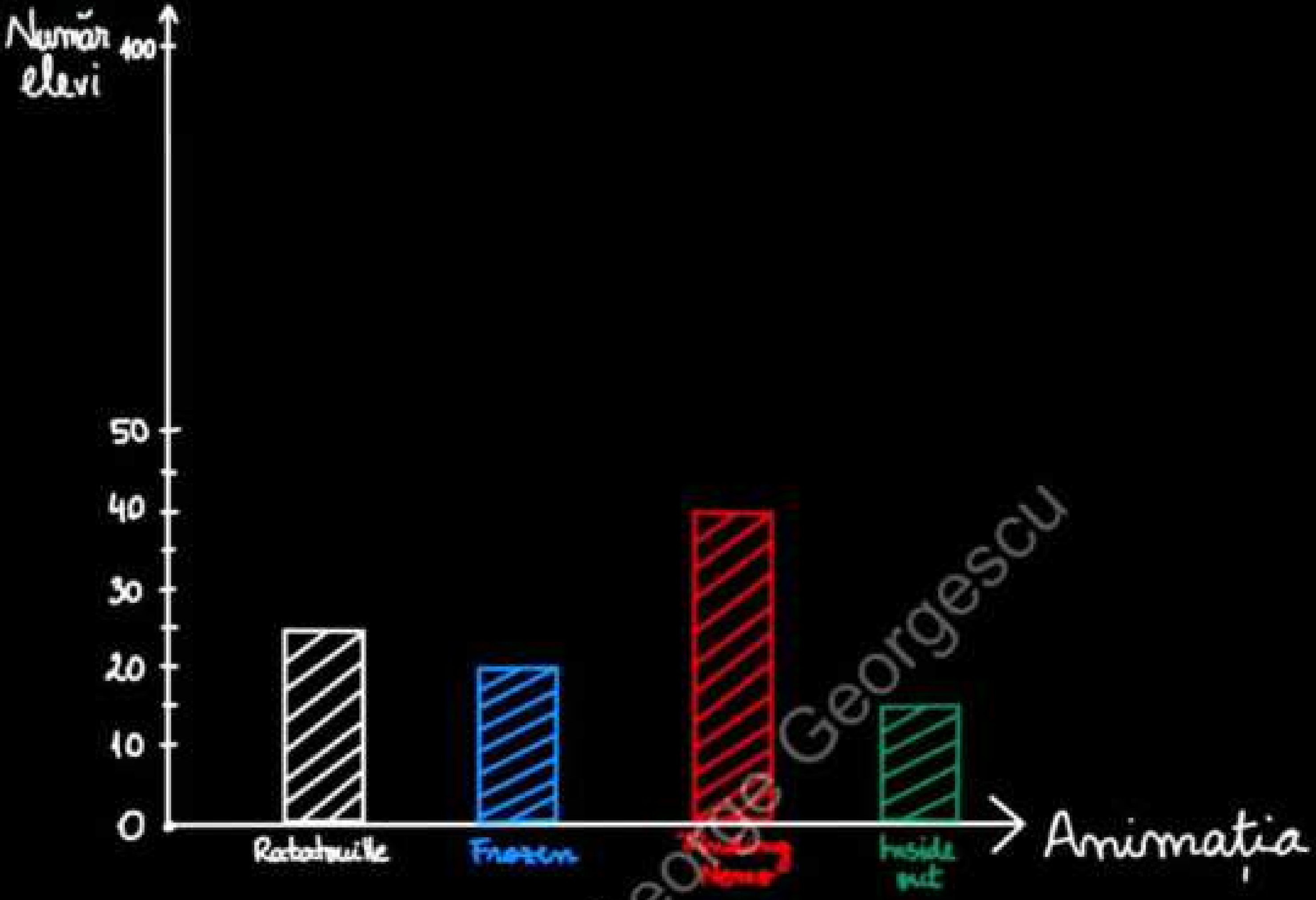
Animația preferată	Ratatouille	Frozen	Finding Nemo	Inside out
Număr elevi	25	20	40	15

Avantaj: organizare compactă a datelor

Dezavantaj: valoarea maximă (animația cu cele mai multe aprecieri) este identificată printr-un efort matematic de comparare.

Cu cât am avea mai multe date în tabel, cu atât efortul de identificare a valorii maxime crește.

Ⅱ Folosind un grafic (cu bare)

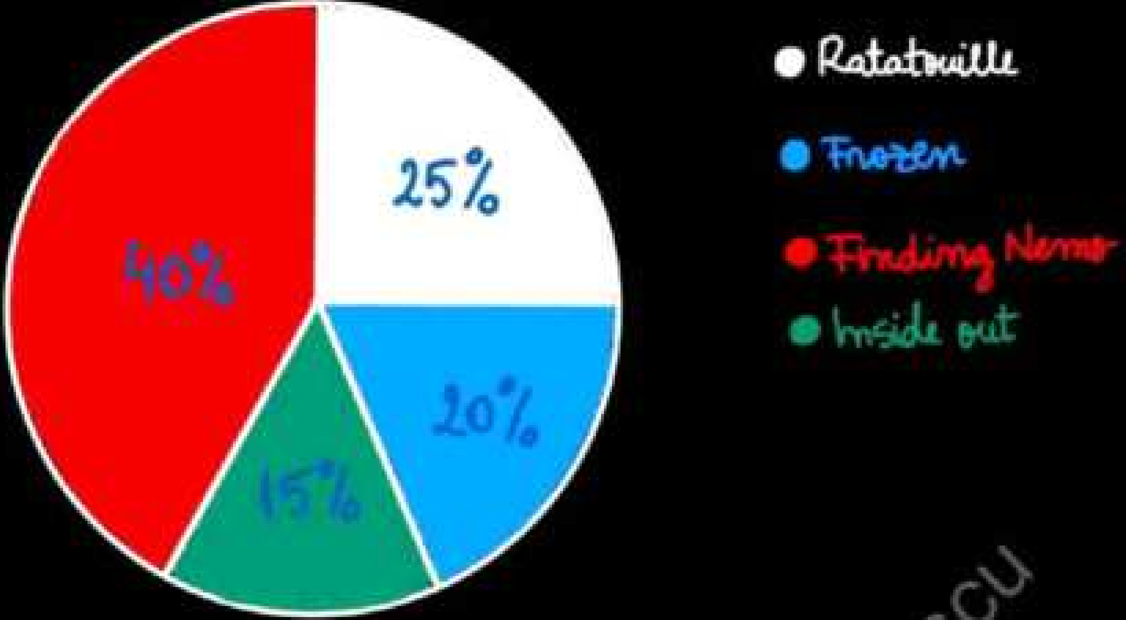


Avantaje: observăm cu usurință cea mai mare valoare (animația preferată de cei mai mulți elevi), dar și cea mai mică valoare.

În cazul unui grafic în care înregistrăm temperaturile zilnice (pe o perioadă de timp) sau cursul valutar pentru o monedă putem observa care este tendința și să facem diferite prognoze (de analizat astfel de grafice).

Dezavantaj: ocupă mai mult spațiu decât un tabel și este mai dificil de realizat cu mâna liberă a.î. să fie precis și să nu lase loc de interpretări.

Ⓘ Diagrame (tip „plăcintă"- „pie")



Avantaje: observăm cu ușurință cea mai mare valoare (animația preferată de cei mai mulți elevi), dar și cea mai mică valoare.

- Ocupă puțin loc.
- Observăm mai bine cât reprezintă din întreg o anumită valoare.

Dezavantaje: De obicei valorile sunt exprimate în procente relativ la întreg și pentru a afla o anumită valoare trebuie să calculăm cât înseamnă acel procent.

Sectoarele de cerc se reprezintă dificil cu mâna liberă și au un caracter aproximativ.

Măsura unghiului la centru corespunzător fiecărei valori se determină folosind regula de trei simplă astfel:

$$\begin{array}{lll} n(\text{întregul}) \ldots\ldots 360^\circ & & 100\% \ldots\ldots 360^\circ \\ v(\text{valoare}) \ldots\ldots u^\circ & \text{sau} & p\% \ldots\ldots u^\circ \end{array}$$

De exemplu, pentru a determina măsura unghiului la centru corespunzător numărului de alegeri pentru Ratatouille, avem:

$$100 \ldots\ldots 360^\circ$$
$$25 \ldots\ldots x^\circ$$

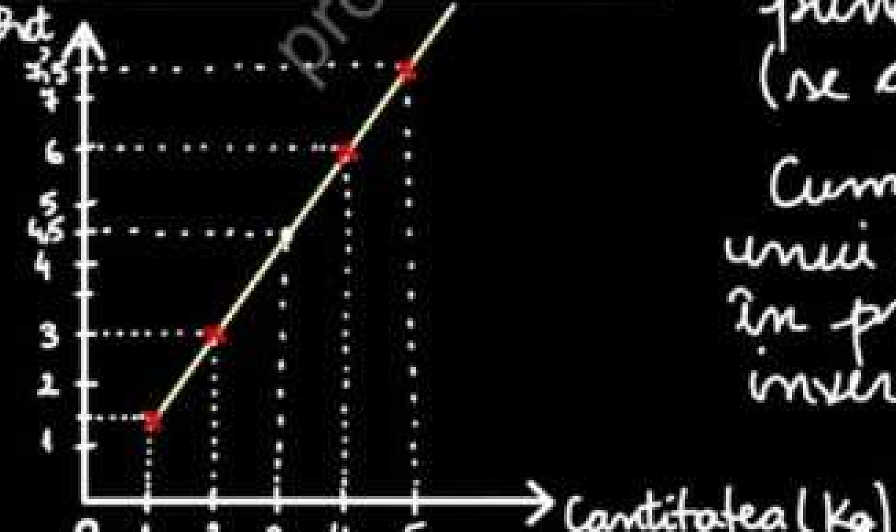
$$x^\circ = \frac{360^\circ \cdot \cancel{25}}{\cancel{100}_4} = 90^\circ.$$

Aplicatie: Organizați în clasă un sondaj (animația/trupa/echipa preferată) și reprezentați rezultatele în ~~toate~~ cele trei moduri prezentate anterior.

Grafice cu puncte în contextul mărimilor direct proporționale

Dacă un Kg de cartofi costă 1,5 lei atunci:

Cantitatea (Kg)	1	2	4	5
Preț	1,5	3	6	7,5



Obs În cazul mărimilor direct proporționale, punctele sunt coliniare (se află pe o dreaptă)

Cum arată graficul unui set de date aflate în proporționalitate inversă? (exercițiu).

Elemente de statistică

Noțiuni introductive

CRITIC	NOTA
1	7
2	8
3	10
4	8
5	7
6	6
7	8
8	8
9	9
10	8
11	7
12	7
13	8
14	9
15	8
16	8

Pentru acordarea unui premiu în cinematografie, 80 de critici au fost solicitați să noteze de la 1 la 10 un film care participa la categoria „Cel mai bun film al anului".

În tabelul din stânga avem răspunsurile primite de la primii 16 critici chestionați.

Def. Statistica este o ramură a matematicii care se ocupă de culegerea unor date (prin observare sau prin chestionar/sondaj) și de interpretarea lor, folosind teoria probabilităților.

Indicatori ai tendinței centrale

- **Frecvența** reprezintă numărul care ne arată de câte ori se repetă o valoare numerică într-un set de date.

Exemplu: Valoarea numerică (nota) 7 are frecvența 4, iar valoarea numerică 8 are frecvența 8.

- **Modul** unui set de date este valoarea numerică cu frecvența cea mai mare (dacă există).

Dacă mai multe valori numerice au aceeași frecvență maximă, atunci setul de date are mai multe valori modale, iar dacă toate valorile numerice au aceeași frecvență, atunci setul de date nu conține valori modale

Exemplu: În cazul nostru, modul este 8.

Modul unui set de date ne arată valoarea cu cea mai mare probabilitate să apară.

În exemplul nostru, probabilitatea ca un critic să ofere nota 8 este de $\frac{8^{(8}}{16}=\frac{1}{2}=50\%$, deci tendința centrală este ca următorul critic să ofere nota 8.

- Amplitudinea unui set de date reprezintă diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare numerică a setului de date.

Exemplu: În cazul nostru, amplitudinea este egală cu 10 − 6, adică 4.

O amplitudine mică sugerează un comportament stabil sau o colectare de date foarte bună, iar o amplitudine mare arată că setul de date nu este stabil sau colectarea datelor nu a fost bine realizată.

- Media unui set de date reprezintă media aritmetică a valorilor numerice din setul de date.

Exemplu: În cazul nostru, media este 7,875.
(exercițiu: de verificat!)

- Mediana unui set de date este numărul care împarte șirul valorilor numerice în două părți egale, atunci când sunt ordonate crescător.

Dacă setul de date are un număr impar de valori, atunci mediana este termenul din mijloc când valorile sunt ordonate crescător.

Dacă setul de date are un număr par de valori, atunci mediana este media aritmetică a celor doi termeni din mijloc, când valorile sunt ordonate crescător.

Exemplu: În exemplul nostru, avem:

$$6,7,7,7,7,8,8,\underline{\underline{8,8}},8,8,8,8,9,9,10.$$

$m_a(8,8)=\frac{8+8}{2}=8$, deci mediana setului de date este 8.

Obs. Mediana este diferită de media unui set de date.

Exemplu: Pentru setul de date 3, 5, 13 mediana este evident 5, iar media este $\frac{3+5+13}{3}=\frac{21}{3}=7$.

Sistem de axe ortogonale
(Sistem/reper cartezian)

↳ René Descartes
(1596–1650)

Def. (Produs cartezian)

Fie A și B două mulțimi. Numim produsul cartezian dintre mulțimea A și mulțimea B, mulțimea notată cu $A\times B$, unde:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ și } b\in B\}$$

Exemplu:

$$A = \{2,3\}$$
$$B = \{5,6,7\}$$
$$A\times B = \{(2,5),(2,6),(2,7),(3,5),(3,6),(3,7)\}$$
$$B\times A = \{(5,2),(5,3),(6,2),(6,3),(7,2),(7,3)\}$$

Obs. i) $A\times B \neq B\times A$, deci produsul cartezian este necomutativ.

ii) $A\times\phi = \phi\times B = \phi\times\phi = \phi$.

iii) $A\times A \overset{not}{=} A^2$; $A\times A\times A \overset{not}{=} A^3$;

$$\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n \text{ mulțimi}} \overset{not}{=} A^n.$$

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1\in A_1, a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n\}$$
$$A\times B\times C = \{(a,b,c) \mid a\in A, b\in B, c\in C\}.$$
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}.$$
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$

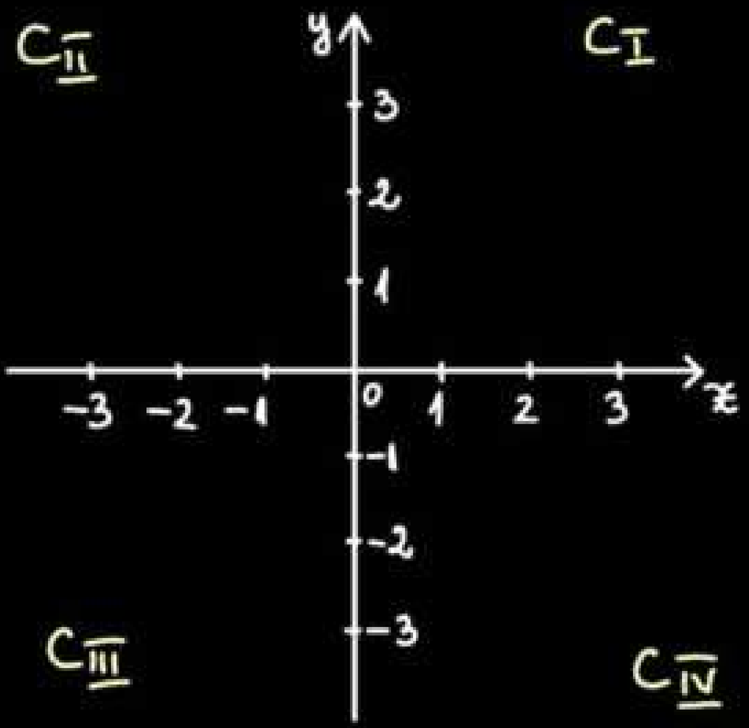
Teoremă Fie $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$, unde A și B sunt două mulțimi. Atunci

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1=a_2 \text{ și } b_1=b_2.$$

Teoremă Fie A și B două mulțimi finite. Atunci $card(A\times B) = card(A)\cdot card(B)$.

Dem. Reiese imediat din regula produsului.

Sistemul cartezian



Def. Două axe formează un sistem ortogonal de axe (sistem cartezian) dacă au aceeași origine, au aceeași unitate de măsură și sunt perpendiculare.

În stânga avem reprezentat sistemul xOy.

Ox — axa absciselor

Oy — axa ordonatelor

O s.n. originea sistemului de axe ortogonale.

Sistemul de axe ortogonale împarte planul în 4 părți numite cadrane începând cu zona din dreapta sus și mergând în sens trigonometric (sens invers acelor de ceasornic).

Fiecărui punct P din plan îi corespunde o pereche de numere reale $(x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și fiecărei perechi de numere reale îi corespunde un punct în plan care poate fi reprezentat într-un sistem cartezian.

$$P(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{abscisa} \\ \text{punctului}}}{x_P}, \underset{\substack{\searrow \\ \text{ordonata} \\ \text{punctului}}}{y_P}) \leftarrow \text{„punctul } P \text{ de coordonate } x_P \text{ și } y_P\text{"}$$

Facem următoarea convenție:

Două drepte sunt paralele dacă nu se intersectează <u>sau</u> dacă ele coincid.

Pentru a reprezenta punctul $P(x_P, y_P)$ într-un sistem de axe xOy procedăm astfel:

I. Se fixează pe axa Ox numărul x_P.

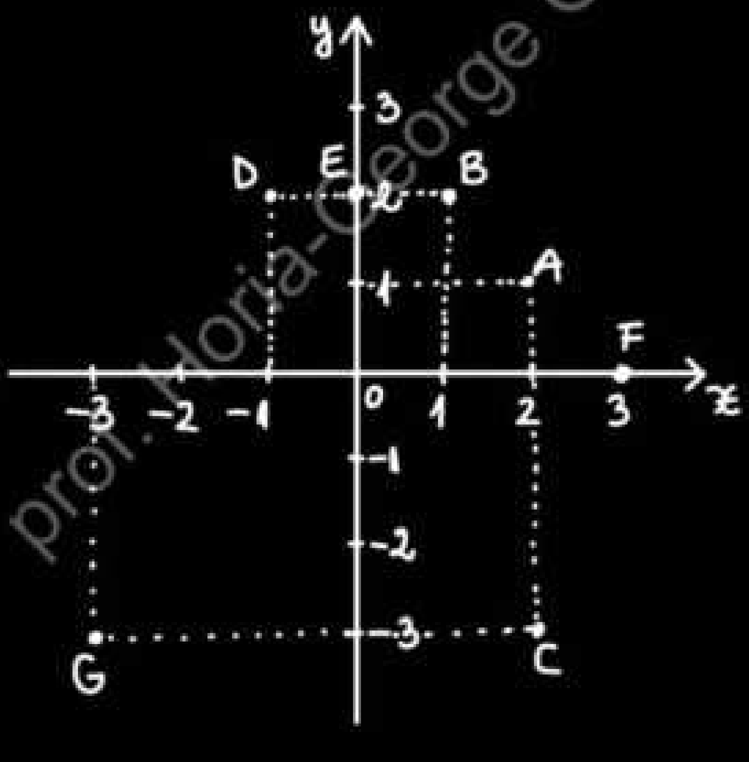
II. Se fixează pe axa Oy numărul y_P.

III. Prin x_P se trasează o paralelă la axa Oy

IV. Prin y_P se trasează o paralelă la axa Ox

V. Punctul de intersecție a celor două paralele la axe este punctul $P(x_P, y_P)$.

Exemple: Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele $A(2,1)$, $B(1,2)$, $C(2,-3)$, $D(-1,2)$, $E(0,2)$, $F(3,0)$, $G(-3,-3)$.



Obs. i) Originea O are coordonatele $(0,0)$.

ii) Orice punct situat pe axa Ox are ordonata egală cu 0, deci un punct P situat pe axa Ox are coordonatele de forma $P(x_P, 0)$.

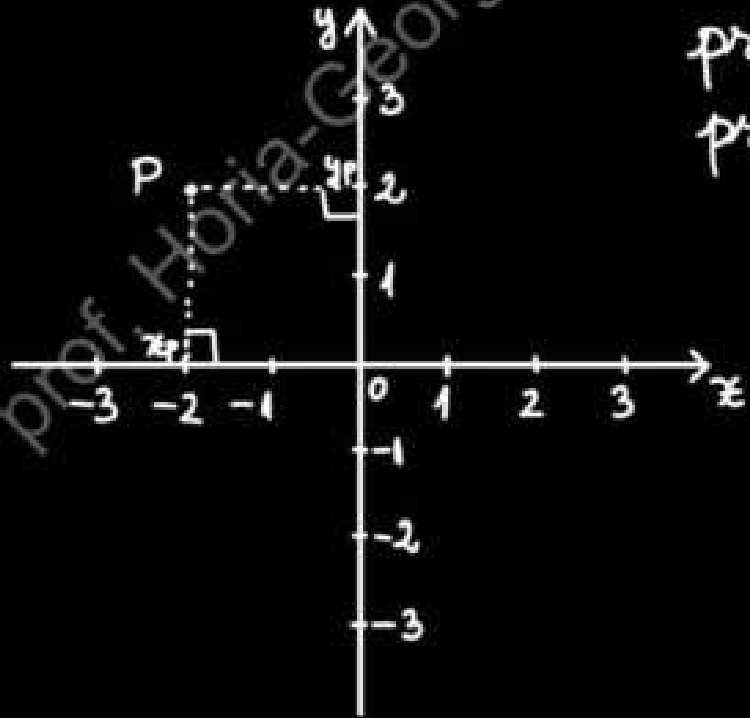
iii) Orice punct situat pe axa Oy are abscisa egală cu 0, deci un punct P situat pe axa Oy are coordonatele de forma $P(0, y_P)$.

Pentru a afla coordonatele unui punct P reprezentat într-un sistem cartezian procedăm astfel:

I. Proiectăm punctul P pe axa Ox și aflăm abscisa Ox.

II. Proiectăm punctul P pe axa Oy și aflăm ordonata Oy.

Exemplu:

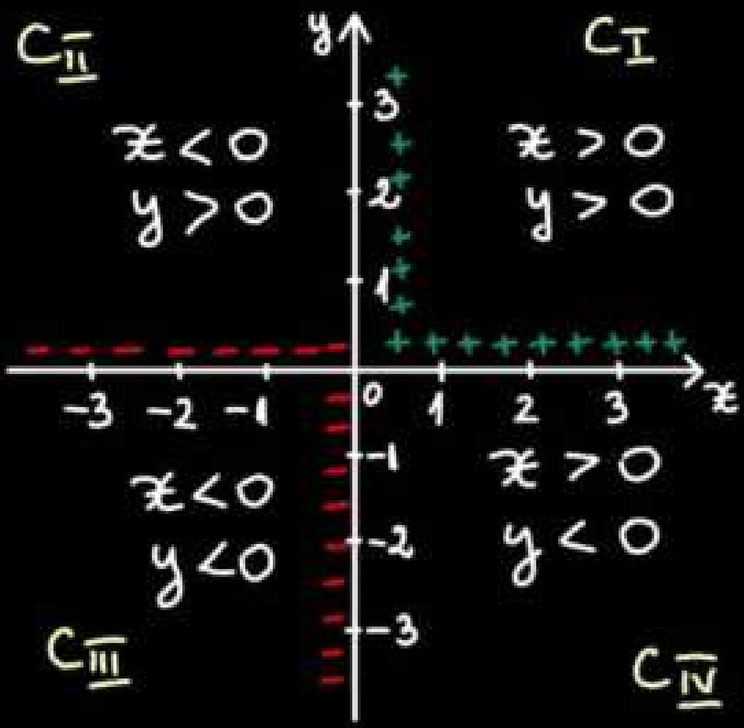


$pr_{Ox}P = x_P = -2$

$pr_{Oy}P = y_P = 2$

Deci $P(-2, 2)$.

Conditia ca un punct să se afle într-un anumit cadran:



Exemple:

$A(2,5) \in C_I$

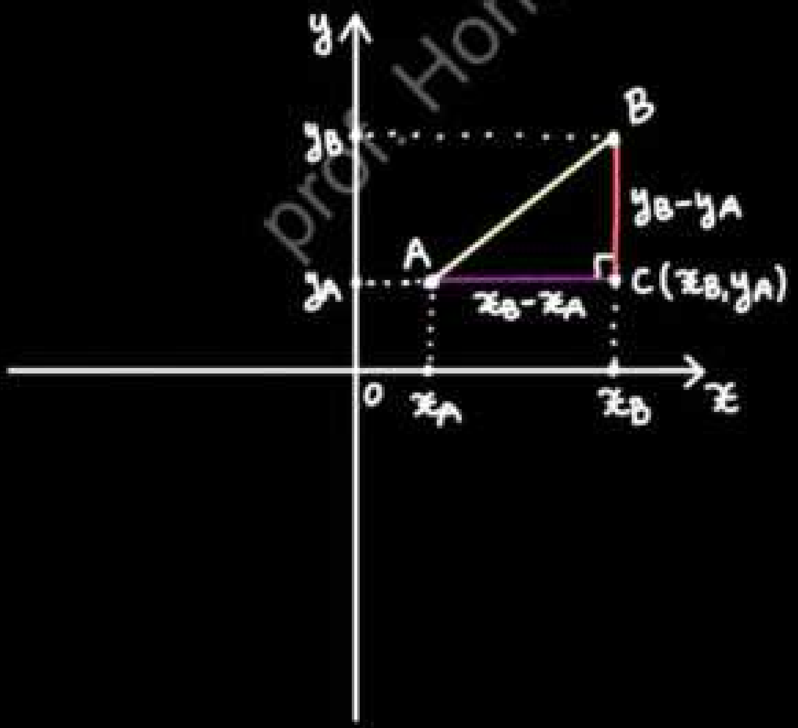
$B(-1,2) \in C_{II}$

$C(-1,-3) \in C_{III}$

$D(7,-10) \in C_{IV}$

Teoremă. Distanta dintre punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ este $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Dem.



$AC = |x_B - x_A|$

$BC = |y_B - y_A|$

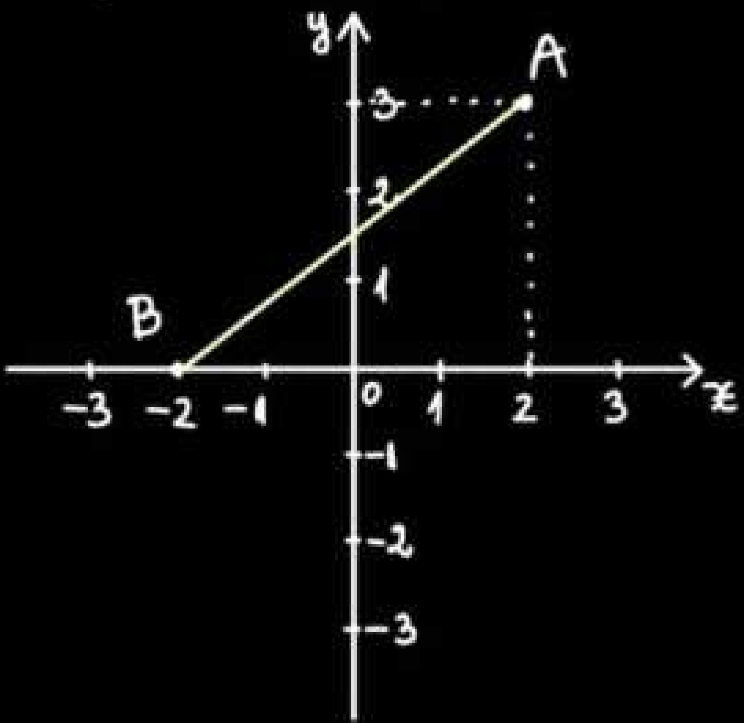
Aplicând Teorema lui Pitagora în ΔACB obtinem:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

deci

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple: i) $A(\overset{x_A}{2},\overset{y_A}{3})$, $B(\overset{x_B}{-2},\overset{y_B}{0})$. Se cere lungimea segmentului $[AB]$.



$$AB=\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}$$

$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(-2-2)^2}$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$

$$=\sqrt{9+16}$$

$$=\sqrt{25}=5u.$$

ii) Se dau punctele $A(4,4)$, $B(-4,4)$, $C(-6,6)$. Reprezentați punctele într-un sistem cartezian xOy și calculați lungimile laturilor ΔABC.

Obținem: $AB=8\sqrt{2}u$; $AC=BC=2\sqrt{26}u$, deci ΔABC este isoscel (Detaliere: exercițiu).

Horia-George Georgescu

INECUAȚII IN MULȚIMEA NUMERELOR REALE

$ax+b<0$

Noțiunea de mulțime

Relația dintre un element și o mulțime

Relații între mulțimi

„**Definiție**". O mulțime reprezintă o colecție de obiecte bine determinate și distincte denumite elementele mulțimii.

Exemple de mulțimi:

1. Mulțimea mașinilor înmatriculate în Arad
2. Mulțimea elevilor din școala noastră
3. Mulțimea literelor care formează cuvântul „elev".
4. Mulțimea divizorilor numărului 12.
5. Mulțimea tuturor numerelor naturale (Mulțimea numerelor naturale).

Notații. În general, mulțimile se notează cu litere majuscule: A, B, C, M etc.

Definiție. Două mulțimi A și B sunt egale dacă sunt formate din aceleași elemente.

Scriem în acest caz, $A = B$.

Def. O mulțime de numere s.n. mulțime numerică.

Modalități prin care putem să definim o mulțime

i) Enumerarea elementelor sale între două acolade.

Exemplu. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

Citim „mulțimea A este formată din elementele 0, 1, 2 și 3.

ii) Ținând cont de o proprietate comună a tuturor elementelor.

Exemplu. $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se mai poate scrie $B = \{x \mid x \text{ este cifră}\}$.

← „cu proprietatea că"

iii) Folosind diagramele Venn-Euler (linii curbe închise).

Exemplu. $C = \{1, 3, 7\}$ se mai poate reprezenta astfel:

⟵ diagramă Venn-Euler

Observație. Într-o mulțime, nu contează în ce ordine reprezentăm elementele.

Exemplu. Mulțimea $A = \{1,2\}$ se poate scrie și $A = \{2,1\}$.

Observație. Într-o mulțime, elementele trebuie să fie distincte (adică un element să apară o singură dată)

Exemplu. Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul „elev" este $\{e, l, v\}$.

Simbolul de apartenență ($\in$). (Relația de apartenență)

Dacă x este un element al mulțimii A vom scrie $x \in A$ și citim „x aparține mulțimii A" sau „mulțimea A conține elementul x".

Dacă x nu aparține mulțimii A, scriem $x \notin A$.

Exemplu. Dacă $B = \{1,2,3\}$, atunci $3 \in B$ și $5 \notin B$.

Relații între mulțimi

Def. Spunem că mulțimea A este o submulțime a mulțimii B dacă orice element din A aparține și mulțimii B.

În acest caz scriem $A \subseteq B$ și citim „mulțimea A este inclusă în mulțimea B."

Obs. Dacă $A \subseteq B$ putem scrie și $B \supseteq A$ și citim „mulțimea B include mulțimea A".

Obs. Dacă A nu este o submulțime a mulțimii B scriem $A \nsubseteq B$.

Obs. Dacă A este o submulțime a lui B și B conține un element care nu aparține lui A atunci A s.n. submulțime proprie (strictă) a mulțimii B și scriem $A \subset B$.

Obs. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \supseteq A$.

Def. Mulțimea submulțimilor unei mulțimi M se notează cu $\mathcal{P}(M)$ și se mai numește mulțimea părților lui M.

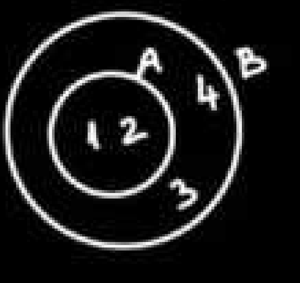
Def. Mulțimea care nu conține niciun element s.n. mulțimea vidă și se notează cu $\emptyset$ (simbol introdus de grupul Bourbaki) sau (mai rar) cu $\{\}$.

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Obs. Mulțimea vidă este o submulțime a oricărei mulțimi.

Exemplu. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,4,2,3\}$.

$A \subset B$; $B \subseteq C$; $B \not\subset A$;



$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

INTERVALE DE NUMERE REALE

La dreapta reală adăugăm simbolurile $-\infty$ și $+\infty$, obținând astfel dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a < b$.

Definim mulțimile de mai jos pe care le denumim intervale de numere reale.

1. Intervale mărginite

(1.1.) Interval închis în a și închis în b

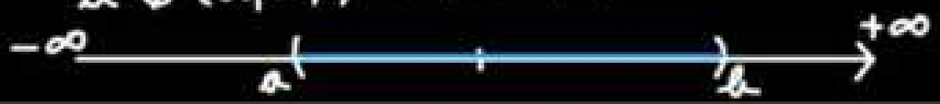
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$;

(1.2.) Interval deschis în a și deschis în b

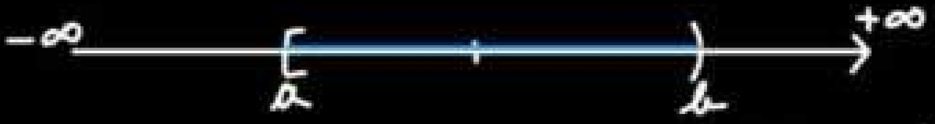
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$



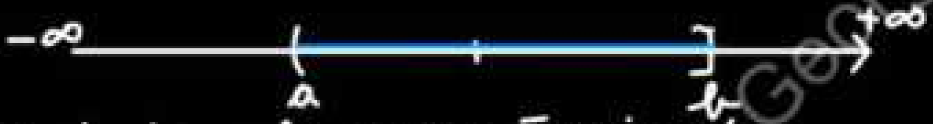
(1.3) Interval închis în a (la stânga) și deschis în b (la dreapta).

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$
$$a \in [a,b) \;;\; b \notin [a,b)$$



(1.4) Interval deschis în a (la stânga) și închis în b (la dreapta)

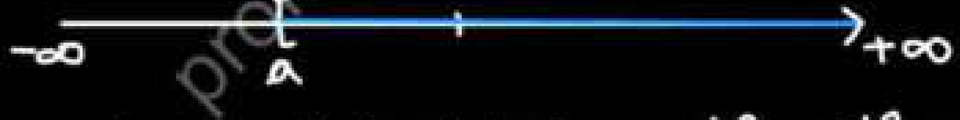
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$
$$a \notin (a,b] \,,\; b \in (a,b].$$



2. Intervale nemărginite

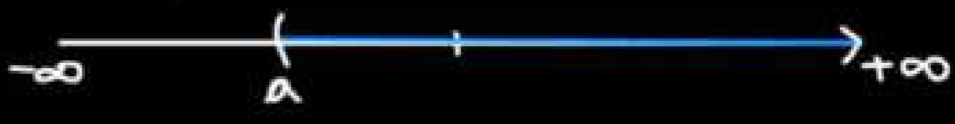
2.1. Interval închis în a (la stânga) și nemărginit la dreapta

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$$
$$a \in [a,+\infty);$$



2.2. Interval deschis în a (la stânga) și nemărginit la dreapta

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$
$$a \notin (a,+\infty);$$



2.3. Interval nemărginit la stânga și închis la dreapta

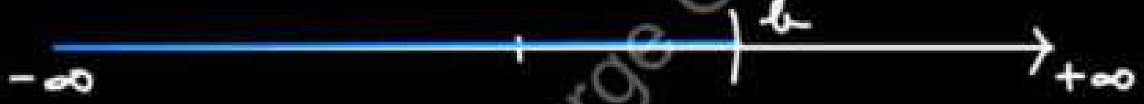
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$b \in (-\infty, b];$$

2.4. Interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$b \notin (-\infty, b);$$



2.5. Interval nemărginit la ambele capete

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Obs. Intervalele care nu se reduc la un punct s.n. intervale nedegenerate (toate exemplele anterioare.

Obs. Intervalele care se reduc la un punct (număr real) s.n. intervale degenerate.

Exemplu.

$$[a, a] = \{a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Operații cu intervale

Fie I și J două intervale. Deoarece intervalele de numere reale sunt mulțimi, putem să le supunem operațiilor din teoria mulțimilor:

(i) Reuniunea „∪"

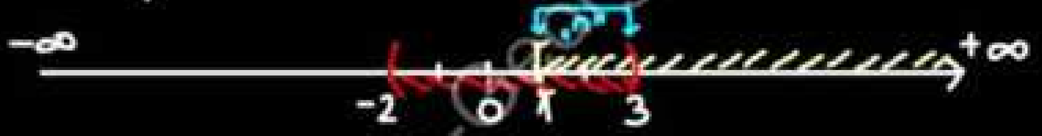
$I \cup J \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$

Exemplu: $(-2,3) \cup [1,\infty) = (-2,+\infty)$

(ii) Intersecția „∩"

$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$

Exemplu: $(-2,3) \cap [1,\infty) = [1,3)$



(iii) Diferența „\" sau „−"

$I \setminus J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ și } x \notin J\}$

Exemplu: $(-2,3) \setminus [1,+\infty) = (-2,1)$

$[1+\infty) \setminus [-2,3) = [3,+\infty)$

Inecuații cu modul

Fie $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Ex: $|3| = 3$; $|-4| = 4$; $|\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{7}}_{\hat{0}}| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7}) = -\sqrt{5}+\sqrt{7} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$;

Def. Modulul numărului real x (notat $|x|$) reprezintă distanța pe axa numerelor reale de la x la originea axei (0).

Inecuații cu modul

① Inecuații de tipul $|x| \leq a$, $a \in \mathbb{R}_+$

Ex: $|x| \leq 2$

Dacă $x = 1$, atunci $|1| = 1 \leq 2$

$x = 0$, atunci $|0| = 0 \leq 2$

$x = 0,5$, atunci $|0,5| = 0,5 \leq 2$

$x = 7$, atunci $|7| = 7 \nleq 2$ etc.

$$\left.\begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in [-2,2]$$

Generalizare:

$$|x| \leq a \Rightarrow x \in [-a,a]$$

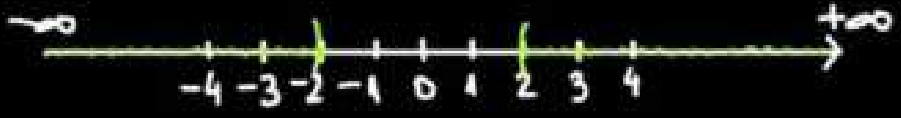
$$|x| < a \Rightarrow x \in (-a,a)$$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = [-3,3]$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 7\} = (-7,7)$

(ii) Inecuații de tipul $|x| \geq a,\ a \in \mathbb{R}_+$

Ex: $|x| \geq 2$



$$\left.\begin{array}{l}|x| \geq 2\\ x \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

Generalizare:

$$|x| \geq a \Rightarrow x \in (-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$$
$$|x| > a \Rightarrow x \in (-\infty,-a) \cup (a,+\infty)$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\} = (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)$$

Exemplu.

Scrieți mulțimea $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{3x-2}{4}\right| < 1\right\}$.

Știm că dacă $|E(x)| < a$ atunci $-a < E(x) < a$.

$$\left|\frac{3x-2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3x-2}{4} < 1 \,\Big|\cdot 4 \Leftrightarrow -4 < \frac{3x-2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4} < 4$$

$$\Leftrightarrow -4 < 3x-2 < 4 \,\Big|+2 \Leftrightarrow -2 < 3x < 6 \,\Big|:3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 2.$$

În concluzie, $E = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$.

Inecuatii în multimea numerelor reale

Inecuații de forma $ax+b\le 0$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$.

O inegalitate de tipul $E(x)\le F(x)$ s.n. inecuație cu necunoscuta x.

A rezolva o inecuație în $\mathbb{R}$ cu necunoscuta x presupune să găsim toate numerele reale x (dacă există astfel de numere) care să verifice inegalitatea din inecuatie.

În rezolvarea inecuațiilor trebuie să ținem cont de următoarele proprietăți:

Proprietăți ale inegalităților:

Obs. $E(x)\le F(x)\ \Big|+A(x) \Leftrightarrow E(x)+A(x)\le F(x)+A(x)$

Exemplu: $2x+5\le \underbrace{-x}+8\ \Big|+x \Leftrightarrow 2x+5+\underline{\underline{x}}\le \cancel{-x}+8+\cancel{\underline{\underline{x}}}$

$\Leftrightarrow 3x+5\le 8$

Obs. $E(x)\le F(x)\ \Big|\cdot \underset{a>0}{a} \Leftrightarrow a\cdot E(x)\le a\cdot F(x)$

Exemplu: $\frac{2x}{3}\le 4\ \Big|\cdot 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\le 4\cdot 3 \Leftrightarrow 2x\le 12$

$\Leftrightarrow x\le\frac{12}{2}\Leftrightarrow x\le 6.$

Obs. $E(x)\le F(x)\ \Big|\cdot \underset{a<0}{a} \Leftrightarrow a\cdot E(x)\ge a\cdot F(x)$

Exemplu: $-2x+3\le 5\ \Big|\cdot(-1)\Leftrightarrow -1\cdot(-2x+3)\ge(-1)\cdot 5$

$\Leftrightarrow 2x-3\ge -5.$

$-2x+3\le 5\ \Big|\cdot(-3)\Leftrightarrow -3(-2x+3)\ge -3\cdot 5.$

Exemple. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

i) $2x+1 \le 5$

$2x+1 \le 5 \Leftrightarrow 2x \le 5-1 \Leftrightarrow 2x \le 4 \Leftrightarrow x \le \frac{4}{2}$

$\Leftrightarrow x \le 2$

$\left.\begin{matrix} x \le 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$

(deoarece coeficientul lui x este negativ, schimb sensul inegalității)

ii) $-3x+1 > 7 \Leftrightarrow -3x > 7-1 \Leftrightarrow -3x > 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{-3}$

$\Leftrightarrow x < -2$; $\left.\begin{matrix} x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty, -2)$.

iii) $\frac{\overset{\ominus}{-3}}{\underset{\ominus}{-5x+1}} > 0$ Cum $-3 < 0$, ca $\frac{-3}{-5x+1} > 0$ trebuie ca $-5x+1 < 0$.

Obs. (Condiție de existență a raportului)

$-5x+1 \ne 0 \Leftrightarrow -5x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne \frac{-1}{-5}$

$\Leftrightarrow x \ne \frac{1}{5}$.

(deoarece coeficientul lui x este negativ, schimb sensul inegalității)

$-5x+1 < 0 \Leftrightarrow -5x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{-1}{-5} \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$

$x \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

iv) $\overset{10)}{\frac{x+2}{3}} - \overset{6)}{\frac{6x-1}{5}} \ge \overset{15)}{\frac{x+1}{2}} + \overset{5)}{\frac{7x-1}{6}} - \overset{30)}{\frac{2}{1}}$

$\Leftrightarrow \frac{10(x+2)-6(6x-1)}{30} \ge \frac{15(x+1)+5(7x-1)-60}{30} \;\Big|\cdot 30$

$\Leftrightarrow \underline{10x}+20\underline{-36x}+6 \ge \underline{15x}+15+\underline{35x}-5-60$

$\Leftrightarrow -26x+26 \ge 50x-50$

$\Leftrightarrow -26x-50x \ge -50-26 \Leftrightarrow -76x \ge -76 \;|\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow x \le \frac{-76}{-76} \Leftrightarrow x \le 1$

$\left.\begin{matrix} x \le 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in (-\infty, 1]$.

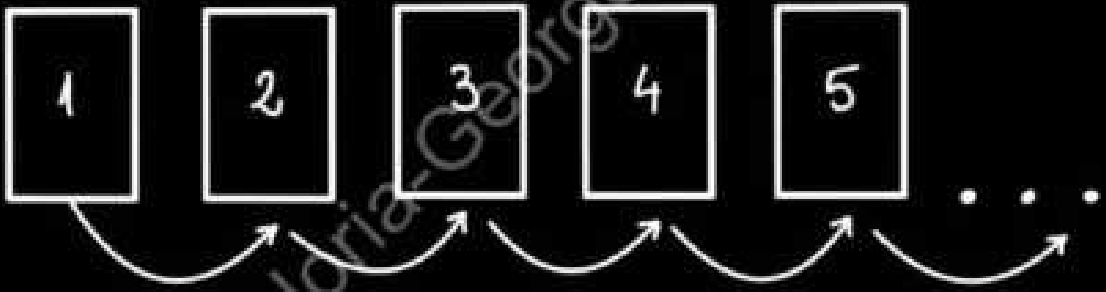
Hotelul lui Hilbert

Să ne imaginăm un hotel cu un număr infinit de camere, numerotate cu numere naturale de la 1. Presupunem că toate camerele sunt ocupate.

Hotelierul mai poate caza un client nou?

Răspuns: DA!

Acesta mută fiecare client cazat în camera următoare. Așadar, clientul din camera 1 se mută în camera 2, cel din camera 2 în camera 3 ș.a.m.d. În concluzie, camera 1 devine liberă.



Dacă la hotel ajunge un autobuz cu o infinitate de locuri și plin cu (o infinitate) de oameni, atunci hotelierul îi poate caza pe toți?

Răspuns: DA!

Clientul din camera 1 se muta în camera 2, cel din camera 2 în camera 4, cel din camera 3 în camera 6 ș.a.m.d. Cu alte cuvinte, fiecare client din camera K se va muta în camera 2K.

Așadar, toate camerele cu un număr impar devin libere.

Horia-George Georgescu

CALCUL ALGEBRIC

$$(a+b)^2$$

Numere reale reprezentate prin litere (MONOAME)

Expresii algebrice

Forma generală a unui număr real reprezentat prin litere este următoarea:
(MONOM)

$$N\cdot\mathcal{L} \longrightarrow \text{produs de „litere" (parte literală/parte cu litere)}$$

$N \swarrow$ produs de numere reale, $N\in\mathbb{R}$
(parte numerică/coeficient)

Exemple: $-2x$; $3a^2b$; $\sqrt{5}\,xyz^2$; $-\frac{\sqrt{3}}{7}kp^3$; abc ;

„**Def**". O expresie matematică în care apar mai multe numere reale reprezentate prin litere și acestea sunt supuse diferitelor operații algebrice s.n. expresie algebrică.

Exemple: $-2x^2+7x-2$;
$3x^2y+z^3$;
$(x+yz)\cdot(t+2w)+3(k+2)^2$;

Def. Fie $N_1\mathcal{L}_1$ și $N_2\mathcal{L}_2$ două numere reale reprezentate prin litere. $N_1\mathcal{L}_1$ și $N_2\mathcal{L}_2$ sunt asemenea dacă $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2$.

Exemple: $2xy$ și $-5xy$ sunt asemenea;
$2xyz$ și $7yxz$ sunt asemenea;
$-3xy$ și $-3xz$ nu sunt asemenea;
$\sqrt{3}\,x^2t^4$ și $\sqrt{3}\,x^4t^2$ nu sunt asemenea;

Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Adunarea și scăderea sunt definite ca în cazul numerelor reale.

Adunarea are aceleași proprietăți ca în cazul adunării numerelor reale.

Reducerea termenilor asemenea

Fie $N_1\mathcal{L}$ și $N_2\mathcal{L}$ două numere reale reprezentate prin litere și asemenea. Atunci:

$$N_1\mathcal{L} + N_2\mathcal{L} = (N_1 + N_2)\mathcal{L}$$
$$N_1\mathcal{L} - N_2\mathcal{L} = (N_1 - N_2)\mathcal{L}$$

Exemple:

$$2x + 3x = (2+3)x = 5x;$$
$$3xy - 7xy = (3-7)xy = -4xy;$$
$$3z - 2z = z;$$
$$k + k = 2k;$$
$$3\underline{\underline{xy}} - 2\underline{ab} + 5\underline{\underline{yx}} - 7\underline{ab} = 8xy - 9ab;$$
$$4t + \cancel{2k}y - t - \cancel{2k}y = 3t;$$
$$3k + 2u - (3u - 2k) = 3k + 2u - 3u + 2k = 5k - u;$$

Def.

$N_1\mathcal{L}_1$ s.n. monom

$N_1\mathcal{L}_1 + N_2\mathcal{L}_2$ s.n. binom

$N_1\mathcal{L}_1 + N_2\mathcal{L}_2 + N_3\mathcal{L}_3$ s.n. trinom

$\vdots$

$N_1\mathcal{L}_1 + N_2\mathcal{L}_2 + N_3\mathcal{L}_3 + \ldots + N_n\mathcal{L}_n$ s.n. polinom

unde $N_1\mathcal{L}_1, N_2\mathcal{L}_2, \ldots, N_n\mathcal{L}_n$ sunt numere reale reprezentate prin litere.

Exemplu: $(a+b)^2$ s.n. binom la pătrat.

Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere

Înmulțirea și împărțirea sunt definite ca în cazul numerelor reale.

Înmulțirea are aceleasi proprietăți ca în cazul înmulțirii numerelor reale.

Fie $N_1\mathcal{L}_1$ și $N_2\mathcal{L}_2$ două numere reale reprezentate prin litere. Atunci:

$$N_1\mathcal{L}_1 \cdot N_2\mathcal{L}_2 = N_1N_2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$$

$$N_1\mathcal{L}_1 : N_2\mathcal{L}_2 = N_1\mathcal{L}_1 \cdot (N_2\mathcal{L}_2)^{-1} = N_1\mathcal{L}_1 \cdot \frac{1}{N_2\mathcal{L}_2} = \underbrace{\frac{N_1\mathcal{L}_1}{N_2\mathcal{L}_2}}_{\text{Raport algebric}}.$$

Exemple:

i) $3x \cdot 5y = 15xy$

ii) $-2xt^2 \cdot 5yt^4 = -10xyt^6$

iii) $10xyz : 2yz = 10x\cancel{y}\cancel{z} \cdot \frac{1}{2\cancel{y}\cancel{z}} = 5x$, $y, z \neq 0$

iv) $-3x(\sqrt{2} - 3xy) = -3\sqrt{2}x + 9x^2y$.

Ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

Ridicarea unui număr real reprezentat prin litere la un exponent întreg se definește și are aceleasi proprietăți ca ridicarea unui număr real la o putere număr întreg.

Fie $N\mathcal{L}$ un număr real reprezentat prin litere și $n \in \mathbb{Z}$. Atunci:

$$(N\mathcal{L})^n = N^n\mathcal{L}^n.$$

Exemple:

i) $(2x)^3 = 8x^3$

ii) $(xyz)^{-2} = \frac{1}{(xyz)^2} = \frac{1}{x^2y^2z^2}$ $\quad x,y,z \neq 0$

iii) $(2021ku)^0 = 1$

iv) $(2\alpha p)^1 = 2\alpha p$

v) $(-3t^2uv^7)^3 = (-3)^3 \cdot (t^2)^3 \cdot u^3 \cdot (v^7)^3 = -27t^6u^3v^{21}$.

Formule de calcul prescurtat

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

IV. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

V. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

VI. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VII. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

VIII. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Descompunerea expresiilor algebrice

Descompunerea unei expresii algebrice presupune scrierea ei sub formă de produs de alte expresii algebrice.

Exemplu:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

Metode prin care putem descompune expresii algebrice:

ⓘ Metoda factorului comun

$$ax+ay=a(x+y)$$

Exemple:

$$xt+xu-xv=x(t+u-v)$$

$$2xy+3xz=x(2y+3z)$$

gruparea ← termenilor

$$x^2+x-2x-2=x\underline{\underline{(x+1)}}-2\underline{\underline{(x+1)}}=(x+1)(x-2)$$

$$x^2-3x-4x+12=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$$

Obs. $x-a=-(-x+a)=-(a-x)$

(ii) Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

Exemple:

$$y^2+2\sqrt{3}y+3=y^2+2\cdot y\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=(y+\sqrt{3})^2$$

$$x^2-8x+16=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2=(x-4)^2$$

$$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$$

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

(iii) Descompunerea expresiilor de grad II.

Forma generală a unei expresii de grad II

$$E(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Met I

Prop. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$ atunci $ax^2+bx+C = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Justificare:

Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$.

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)$$

$$= a(x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2)$$

$$= a\left(x^2 - x\cdot\frac{(-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}-b\cancel{+\sqrt{\Delta}})}{2a} + \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2}\right)$$

$$= ax^2 + bx + \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

Exemple:

ⓘ $E(x) = x^2 - 2x - 8$

$x^2-2x-8=0$ are soluțiile $x_1=-2$ și $x_2=4$.

Așadar,

$$x^2-2x-8 = 1\cdot(x-(-2))(x-4) = (x+2)(x-4).$$

(ii) $F(x) = 2x^2 - 7x + 3$

$2x^2-7x+3=0$ are soluțiile:

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{49-24}}{4} = \frac{7-\sqrt{25}}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Așadar,

$$2x^2-7x+3 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x-1)(x-3).$$

Met II

Pentru a descompune o expresie algebrică de forma ax^2+bx+c căutăm două numere reale α și β a.î. $\alpha+\beta=b$ și $\alpha\beta = c\cdot a$.

Obținem:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= ax^2+\alpha x+\beta x+\frac{\alpha\beta}{a} \\ &= x(ax+\alpha)+\beta\left(x+\frac{\alpha}{a}\right) \\ &= ax\left(x+\frac{\alpha}{a}\right)+\beta\left(x+\frac{\alpha}{a}\right) \\ &= \left(x+\frac{\alpha}{a}\right)(ax+\beta). \end{aligned}$$

Exemple:

(i) $x^2\underbrace{-2}_{\alpha+\beta}x\underbrace{-8}_{\alpha\beta} = x^2-4x+2x-8 = x(x-4)+2(x-4)$

$\alpha=-4$

$\beta=2$

$= (x-4)(x+2)$

(ii) $2x^2-7x+3 = 2x^2-x-6x+3 = x(2x-1)-3(2x-1)$

$\alpha=-1$

$\beta=-6$

$= (2x-1)(x-3).$

$\alpha+\beta=-7$

$\alpha\beta = 3\cdot 2$

(iv) Metode combinate

Exemplu:

$$x^4+81=(x^2)^2+18x^2+9^2-18x^2$$
$$=(x^2+9)^2-18x^2$$
$$=(x^2+9)^2-(3\sqrt{2}x)^2$$
$$=(x^2-3\sqrt{2}x+9)(x^2+3\sqrt{2}x+9).$$

Rapoarte algebrice

Def. Fie E_1 și E_2 două expresii algebrice. Scrierea $\frac{E_1}{E_2}$ s.n. raport algebric (fracție algebrică, expresie algebrică rațională)

Exemple:

$$\frac{2x}{x-1};\ \frac{x+y}{3a+b};\ \frac{1-\sqrt{5}}{7k};$$

Condiții de existentă pentru un raport algebric (domeniul de definiție al unui raport algebric).

Un raport algebric nu este definit (nu are valoarea definită) în punctele (numerele reale) în care se anulează numitorul.

Totalitatea punctelor în care un raport este definit s.n. domeniu de definiție și se notează în general cu $\mathcal{D}$.

Exemple:

$\frac{2x}{x-1}$ nu este definit pentru $x=1$ deoarece am obține 0 la numitor.

Așadar, $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\frac{a^3+5}{a^2-9}$ are $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

Amplificarea rapoartelor algebrice

Amplificarea unui raport algebric se realizează înmulțind atât numărătorul cât și numitorul cu aceeași expresie (nenulă).

$$^{G(x))}\frac{E(x)}{F(x)}=\frac{E(x)G(x)}{F(x)\cdot G(x)},\quad F(x),G(z)\neq 0$$

Exemplu:

$$^{x-1)}\frac{2x}{x+1}=\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2-2x}{x^2-1},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

Simplificarea rapoartelor algebrice

Simplificarea unui raport algebric se realizează împărțind atât numărătorul cât și numitorul la aceeași expresie (nenulă).

$$\frac{E(x)}{F(x)}^{(G(x)}=\frac{E(x):G(x)}{F(x):G(x)},\quad F(x),G(z)\neq 0$$

Exemplu:

$$\frac{3xy}{2x^2yz}^{(xy}=\frac{3}{2xz},\quad x,y,z\neq 0$$

Operatiile cu rapoarte algebrice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere cu exponent număr întreg) se efectuează similar (prin analogie) ca în cazul fracțiilor numerice (fracții ordinare sau rapoarte de numere reale).

Horia-George Georgescu

NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

$$f(x)$$

Noțiunea de funcție
Elemente introductive

„**Def.**" (Provizorie). O funcție f de la o mulțime A la o mulțime B este o lege de corespondență care asociază oricărui element x din A un unic element f(x) din B.

Limitele definiției anterioare: ambiguitatea expresiei „lege de corespondență".

Def. (Riguroasă). Fie A și B două mulțimi (nevide). O funcție de la A la B este tripletul (A, B, f), unde $f \subset A \times B$ cu proprietățile:

i) $\forall a \in A \ \exists b \in B$ a.î. $(a, b) \in f$.

ii) dacă pentru $a \in A$ și $b, b' \in B$ avem $(a, b) \in f$ și $(a, b') \in f$, atunci $b = b'$.

Obs. A s.n. domeniul funcției f, iar B s.n. codomeniul funcției f (mulțimea în care funcția ia valori).

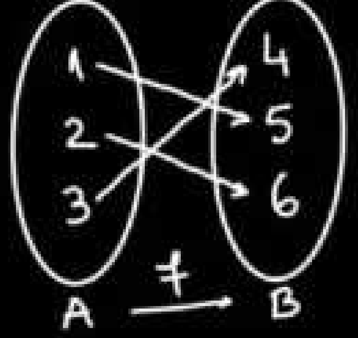
Tripletul (A, B, f) se mai notează $f : A \longrightarrow B$ (citim: „funcția f este definită pe A cu valori în B) sau $A \xrightarrow{f} B$.

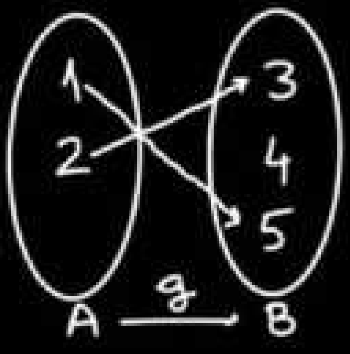
Faptul că $(a, b) \in f$ se mai notează

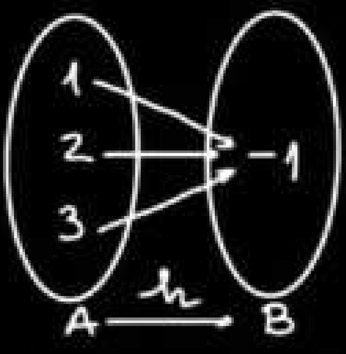
$$f(a) = b.$$

Exemple de legi de corespondență care sunt funcții:

$x \longrightarrow f(x) \overset{not}{=} y$







$f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{4,5,6\}$

$f(1) = 5$
$f(2) = 6$
$f(3) = 4$

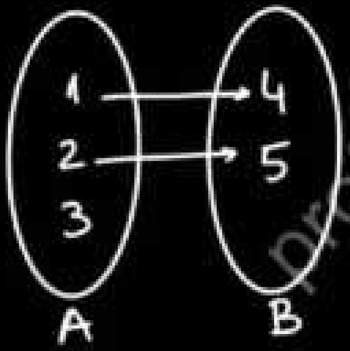
$g : \{1,2\} \longrightarrow \{3,4,5\}$

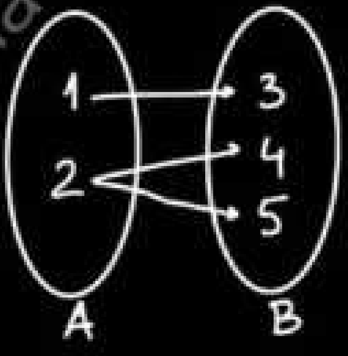
$g(1) = 5$
$g(2) = 3$

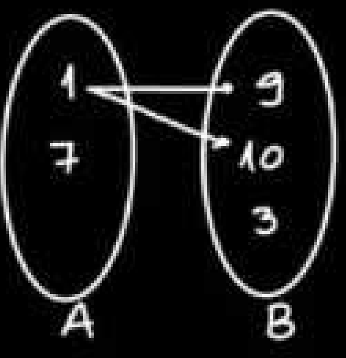
$h : \{1,2,3\} \longrightarrow \{-1\}$

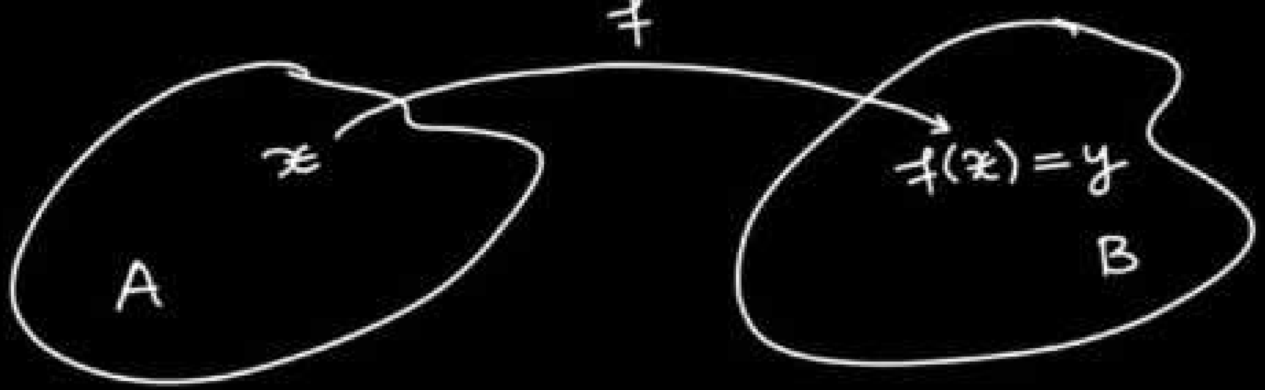
$h(1) = -1$
$h(2) = -1$
$h(3) = -1$

Exemple de legi de corespondență care nu sunt funcții:









Modalități prin care putem defini funcții:

i) Diagrame (vezi exemplele anterioare)

ii) Tabel de valori

$f:\{-1,2,3\}\longrightarrow\{-2,-1,0\}$

$f(-1)=-1;$

$f(2)=0;$

$f(3)=-2;$

x	-1	2	3
$f(x)=y$	-1	0	-2

iii) Folosind o formulă

$f:\{0,1,2\}\longrightarrow\{1,2,3\}$, $f(x)=x+1$

$f(0)=0+1=1;$ $f(1)=1+1=2;$ $f(2)=2+1=3.$

$g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, $g(x)=2x$

$g(0)=2\cdot 0=0;$ $g(1)=2\cdot 1=2;$ $g(2)=2\cdot 2=4;$

$\ldots$ $g(25)=2\cdot 25=50$ etc.

$g(0{,}5)=?$

$$p:\mathbb{Z}^*\longrightarrow\{-1,1\},\quad p(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x<0\\ 1, & \text{dacă } x>0\end{cases}$$

$p(-2)=-1;$ $p(3)=1;$ $p(-5)=-1;$ $p(-7)=-1$ etc.

Def. Imaginea unei funcții $f:A\to B$ este mulțimea notată cu $\mathrm{Im}f$ și care se definește astfel:

$$\mathrm{Im}f=\{f(x)\mid x\in A\}\subseteq B$$

(Toate valorile pe care le ia funcția atunci când parcurge întreg domeniul de definiție)

Exemplu

$f:\{0,1,2\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}, \ f(x)=2x+1.$

$\operatorname{Im} f = ?$

$f(0)=2\cdot 0+1=1 \ ; \ f(1)=2\cdot 1+1=3 \ ; \ f(2)=2\cdot 2+1=5.$

Așadar,

$\operatorname{Im} f = \{1,3,5\}.$

Def. Graficul unei functii $f:A\rightarrow B$ este multimea notată cu G_f și care se definește astfel:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Exemplu.

$f:\{0,1,5\} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ f(x)=x-2$

$f(0)=0-2=-2 \ ; \ f(1)=1-2=-1 \ ; \ f(5)=5-2=3.$

Ca atare,

$G_f = \{(0,-2), (1,-1), (5,3)\}.$

- Conditia ca un punct $P(x_P, y_P)$ să aparțină graficului unei funcții $f:A\longrightarrow B$.

$$P(x_P, y_P) \in G_f \Longleftrightarrow f(x_P) = y_P$$

Exemplu:

Fie funcția $f:\{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{N}, \ f(x)=x+3.$

$A(0,3) \in G_f$ deoarece $f(0)=0+3=3;$

$f(2)=2+3=5 \ \Rightarrow \ B(2,5) \in G_f$

$C(3,6) \notin G_f$ (de ce?)

· Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții într-un reper cartezian (sistem de axe ortogonale xOy):

Fie funcția $f:\{0,1,2\}\rightarrow\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$.

Reprezentați G_f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

Sol.

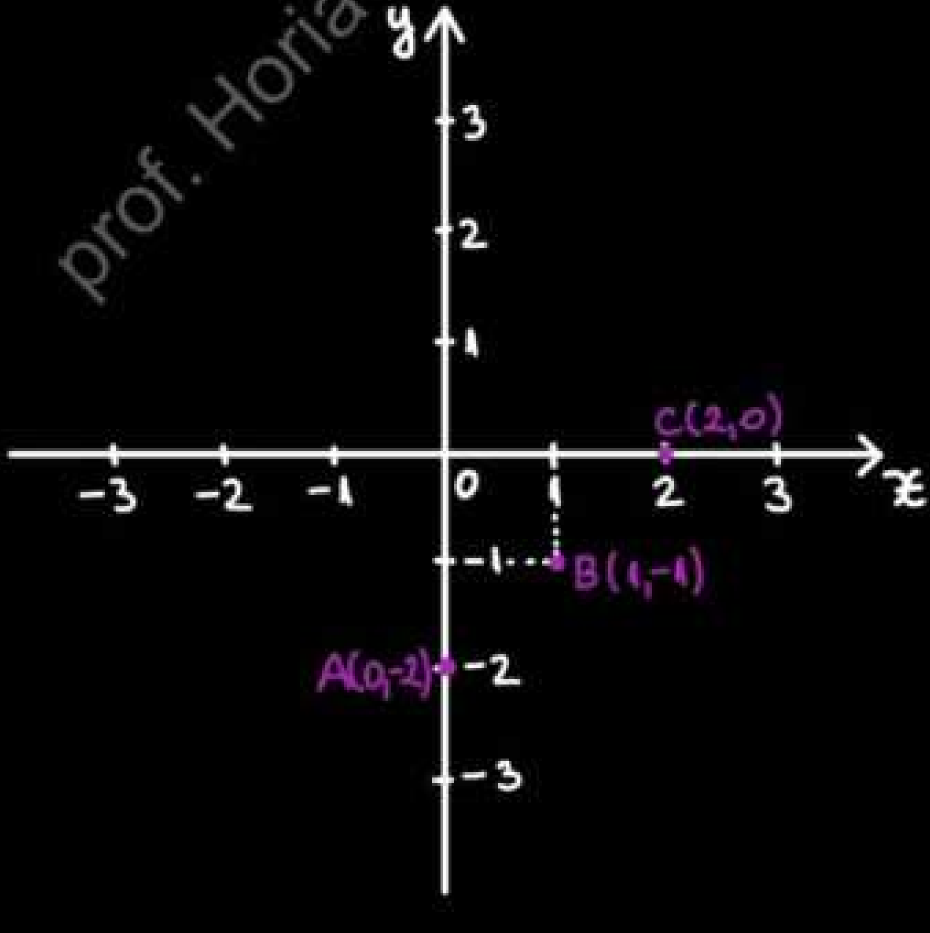
$f(0)=0-2=-2 \Rightarrow A(0,-2)\in G_f$.

$f(1)=1-2=-1 \Rightarrow B(1,-1)\in G_f$.

$f(2)=2-2=0 \Rightarrow C(2,0)\in G_f$.

Așadar, $G_f=\{A(0,-2), B(1,-1), C(2,0)\}$.

x	0	1	2
$f(x)=y$	-2	-1	0



Funcția liniară (Funcția de gradul I)

Forma generală:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Exemple.

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=2x+1;$$

$$g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ g(x)=-x+3;$$

$$h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ h(x)=-5\sqrt{2}x;$$

$$u:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ u(x)=3 \text{ (funcție constantă).}$$

Reprezentarea geometrică a unei functii liniare $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ este o dreaptă, mai precis dreapta de ecuație $y=ax+b$.

Ca atare, pentru a reprezenta grafic o functie liniară xOy într-un sistem de axe ortogonale xOy avem nevoie de cel puțin două puncte (Axioma dreptei).

Exemplu.

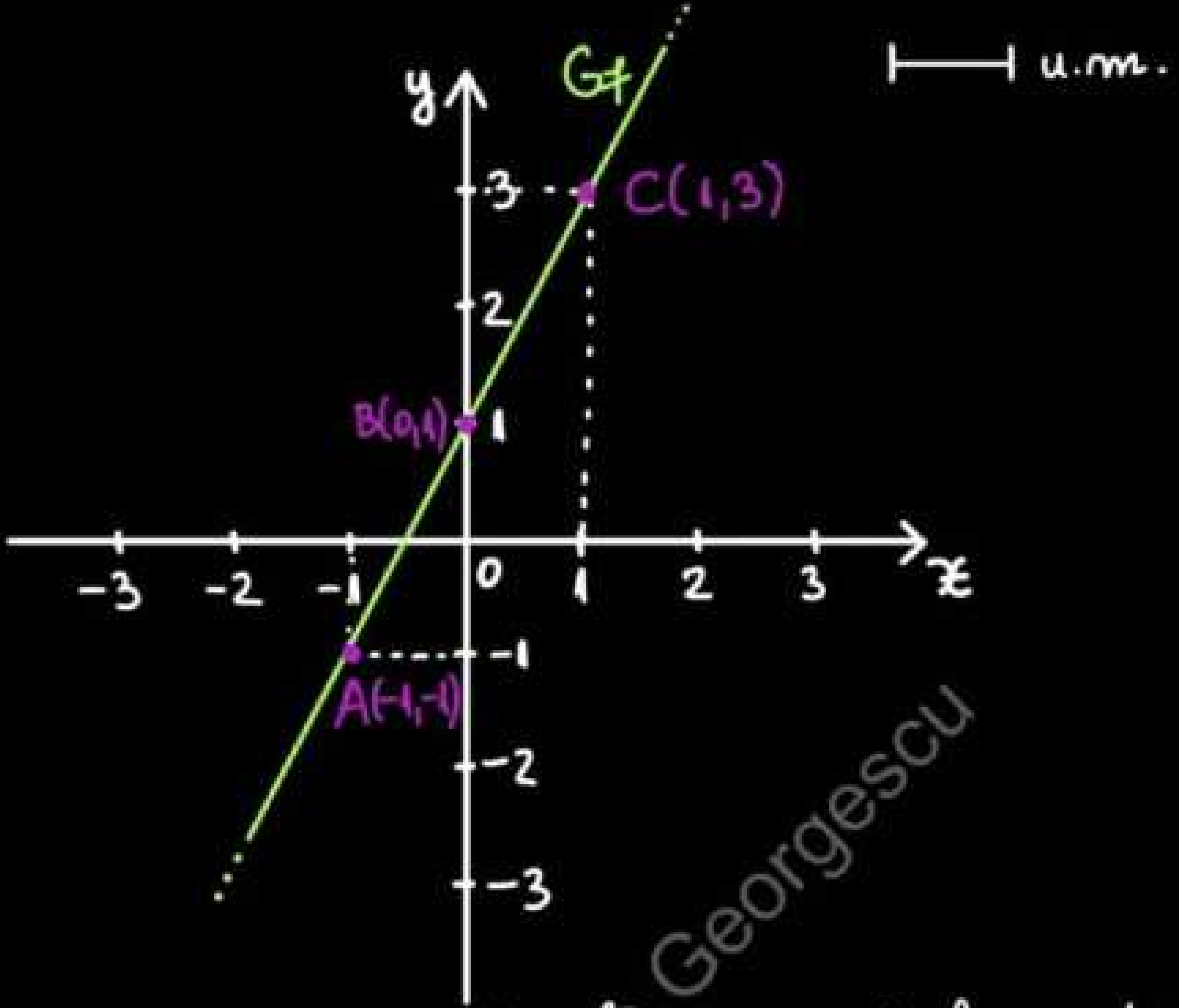
$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=2x+1.$$

Reprezentați G_f într-un sistem cartezian xOy.

$$f(-1)=2\cdot(-1)+1=-2+1=-1 \Rightarrow A(-1,-1)\in G_f$$

$$f(0)=2\cdot 0+1=1 \Rightarrow B(0,1)\in G_f$$

$$f(1)=2\cdot 1+1=3 \Rightarrow C(1,3)\in G_f$$



• Reprezentarea graficului unei funcții liniare într-un sistem cartezian folosind metoda intersecției cu axele de coordonate•

Exemplu:

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-4.$

$G_f \cap Ox = \{A(a,0)\}$

$A(a,0)\in G_f \Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow 2a-4=0 \Leftrightarrow$

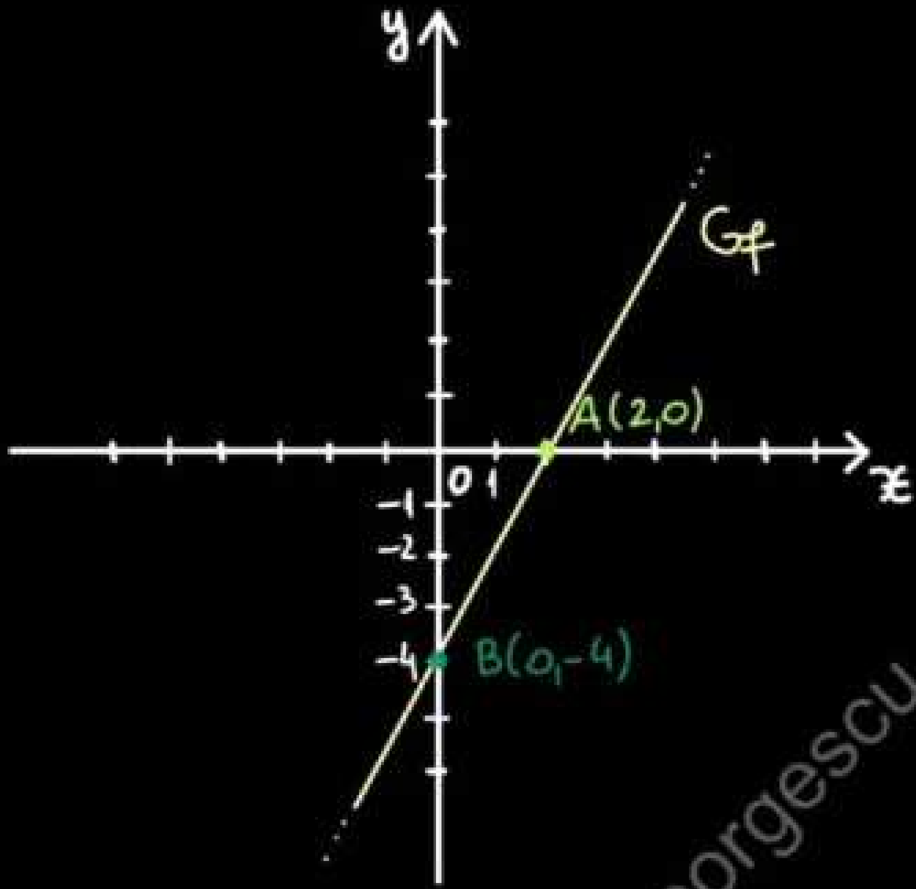
$2a=4 \Leftrightarrow a=\frac{4}{2} \Leftrightarrow a=2.$

Așadar, $G_f \cap Ox = \boxed{\{A(2,0)\}}$

$G_f \cap Oy = \{B(0,b)\}$

$B(0,b)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=b \Leftrightarrow 2\cdot 0-4=b \Leftrightarrow b=-4.$

Ca atare, $G_f \cap Oy = \boxed{\{B(0,-4)\}}$



Care este unul dintre avantajele acestei metode?

Obs.

i) Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ o funcție liniară. Pentru a determina punctul de intersecți dintre reprezentarea geometrică a G_f și axa Ox trebuie să rezolvăm ecuația $f(x)=0$, iar pentru $G_f\cap Oy$, calulăm $f(0)$.

ii) Dacă $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ se poate arăta ușor că

$$G_f\cap Ox=\{A(-\frac{b}{a},0)\}$$

și

$$G_f\cap Oy=\{B(0,b)\}.$$

• Determinarea funcției liniare al cărei grafic trece prin două puncte date. •

Exemplu: Determinați funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ știind că graficul ei trece prin punctele $A(1,-1)$ și $B(-2,5)$.

Sol.

$A(1,-1)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=-1 \Leftrightarrow a+b=-1$

$B(-2,5)\in G_f \Leftrightarrow f(-2)=5 \Leftrightarrow -2a+b=5$

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=5 \end{cases}$$

$$\ominus\ 3a=-6 \Rightarrow a=-\frac{6}{3}=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} a=-2 \\ a+b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow b=-1-a=-1-(-2)=-1+2=1$$

Așadar, $a=-2$ și $b=1$.

În concluzie, $f(x)=-2x+1$.

Sunt punctele $A(1,-1)$, $B(-2,5)$ și $C(3,-5)$ coliniare?

• Metodă grafică de rezolvare a sistemelor liniare de două ecuații cu două necunoscute •

Exemplu: Rezolvați sistemul:

$$(S)\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x-2 \end{cases}$$

Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x+1$ și $g(x) = x-2$.

Reprezentăm grafic funcțiile f și g într-un sistem cartezian xOy.

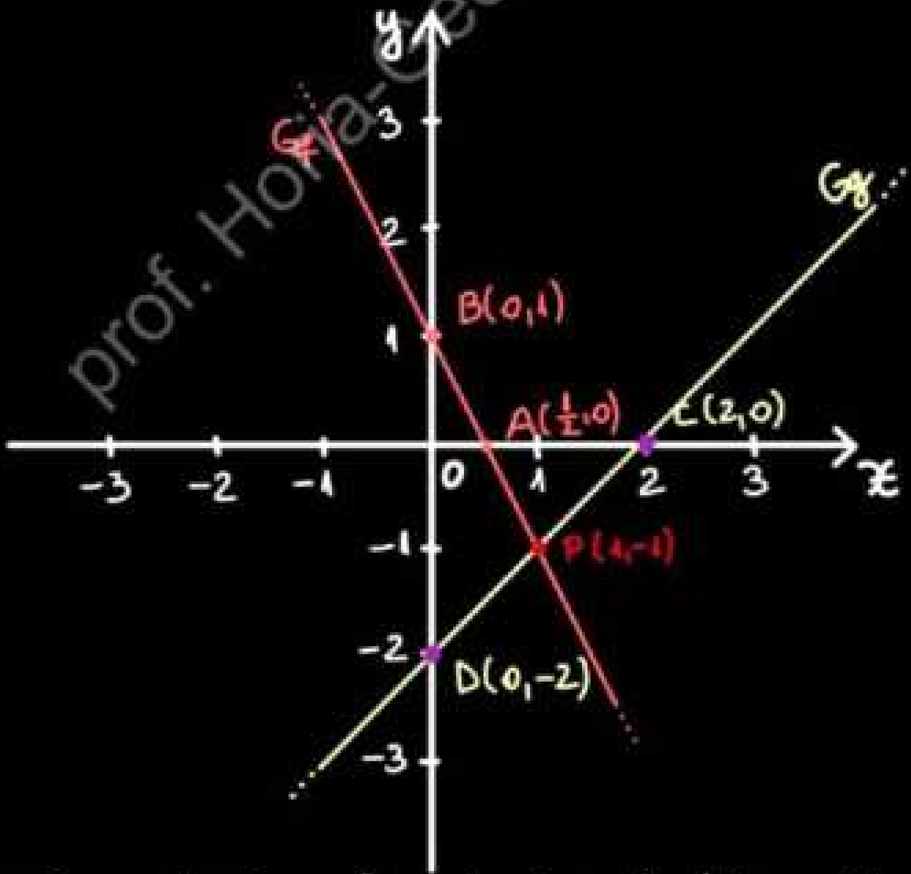
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

deci $G_f \cap Ox = \{A(\frac{1}{2}, 0)\}$

$f(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$, deci $G_f \cap Oy = \{B(0,1)\}$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, deci $G_g \cap Ox = \{C(2,0)\}$.

$g(0) = -2$, deci $G_g \cap Oy = \{D(0,-2)\}$



$G_f \cap G_g = \{P(1,-1)\}$, deci soluția sistemului S este $x = 1$ și $y = -1$.

• Intersecția graficelor a două funcții liniare

Punctul de intersecție a graficelor a două funcții liniare $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se determină rezolvând ecuația $f(x)=g(x)$.

Exemplu.

Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$ și $g(x)=x-2$.

$G_f \cap G_g = ?$

Sol.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -2x+1=x-2 \Leftrightarrow -2x-x=-2-1$

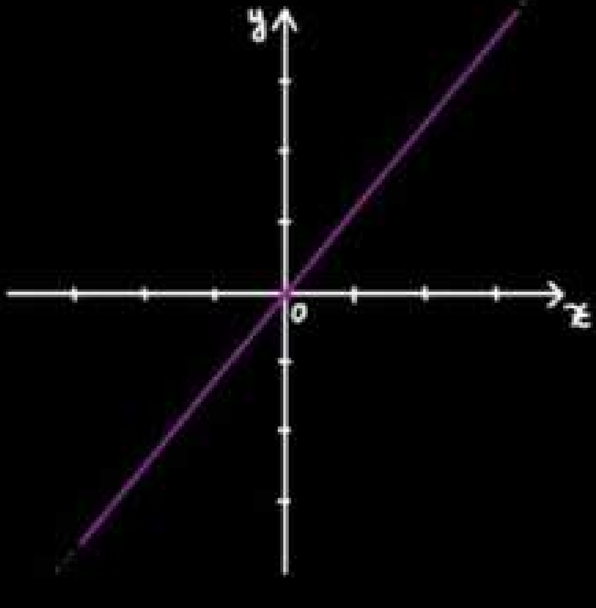
$\Leftrightarrow -3x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{-3}=1.$

Evident, $y=f(1)=g(1)=1-2=-1$.

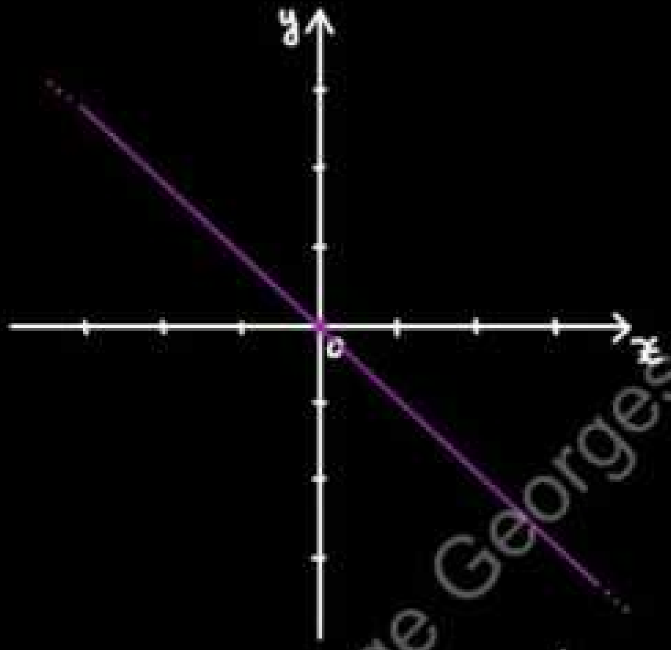
În concluzie, $G_f \cap G_g = \{P(1,-1)\}$.

• Funcții liniare particulare

i) Prima bisectoare a sistemului de axe ortogonale xOy este dată de funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, deci este dreapta de ecuație $y=x$.



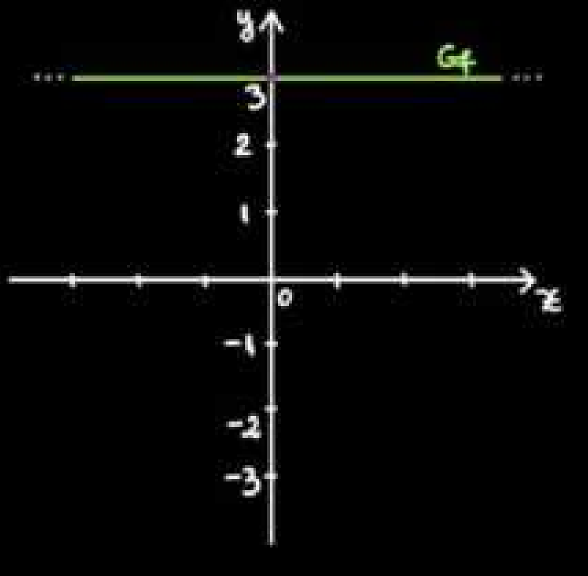
ii) A doua bisectoare a sistemului de axe ortogonale xOy este dată de funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$, deci este dreapta de ecuație $y=-x$.

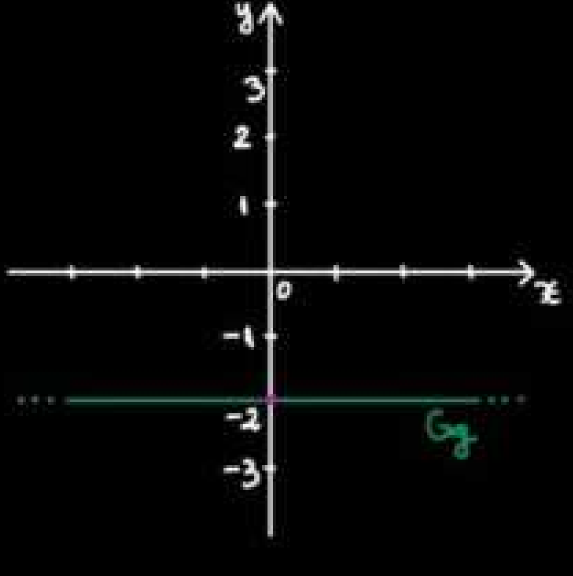


iii) Funcțiile liniare constante de tipul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$ se reprezintă grafic ca fiind drepte paralele la axa Ox care trec prin $y=c$.

Exemple:

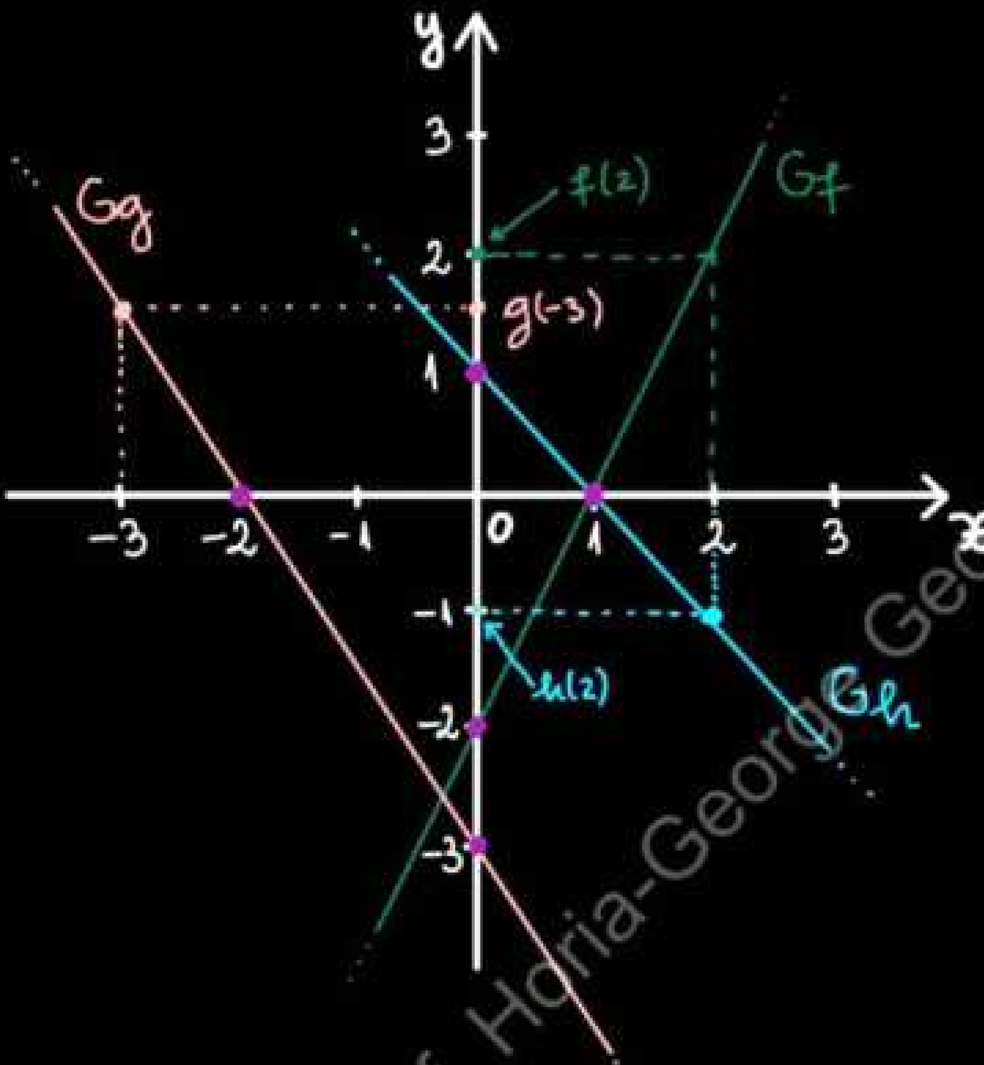
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3$ $\qquad$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-2$.





- Lecturi grafice:

Considerăm funcțiile liniare $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au următoarele reprezentări grafice:



$h(1) = 0;$
$f(1) = 0;$
$g(-2) = 0;$
$h(0) = 1;$
$f(0) = -2;$
$g(-2) = 0;$

- Funcții de tipul $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat (care nu se reduce la un punct).

Studiați reprezentarea geometrică (într-un sistem cartezian) a următoarelor funcții:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = |x|$

ii) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-4$

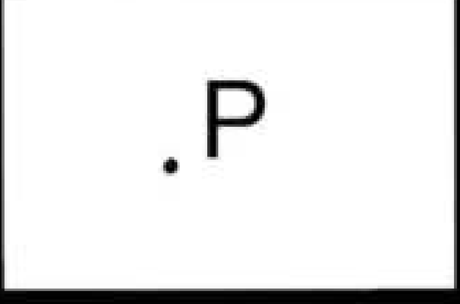
iii) $f:(-2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-4$

iv) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3, & \text{dacă } x\in(-\infty,-2]\\ -3, & \text{dacă } x\in(-2,1]\\ 2x-4, & \text{dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Horia-George Georgescu

ELEMENTE FUNDAMENTALE DE GEOMETRIE (I)



Punct. Dreaptă. Plan.

Bazele geometriei: Euclid în cartea sa „Elemente". → Geometrie euclidiană.

Def. "Punctul poate fi asemănat cu urma lăsată de vârful unui creion bine ascuțit atunci când atinge foaia de hârtie.

Punctul nu are nicio dimensiune (grosime).

Punctele se notează în general cu litere mari: A, B, P, M etc.

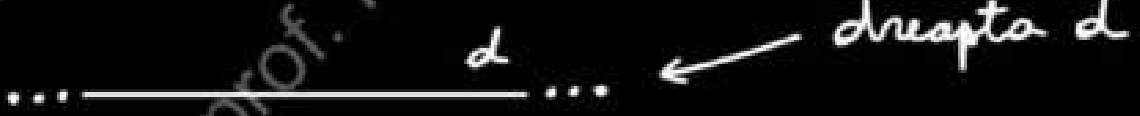
P × Q

P = Q
Puncte identice

Exemplu: • A ← punctul A

„Def." Dreapta poate fi asemănată cu un fir de ață foarte subțire („fără grosime"), infinit și bine întins la ambele capete.

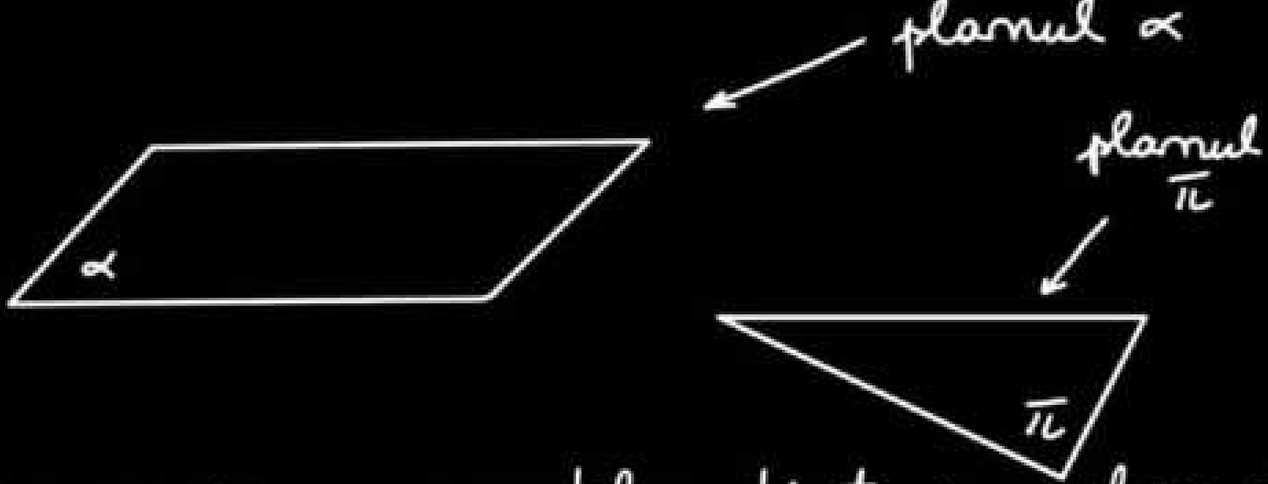
Dreptele se notează cu litere mici ale alfabetului latin: a, b, d etc.



Dreapta nu are lungime.

„Def." Planul poate fi asemănat cu o coală de hârtie fără grosime și nemărginită în toate direcțiile.

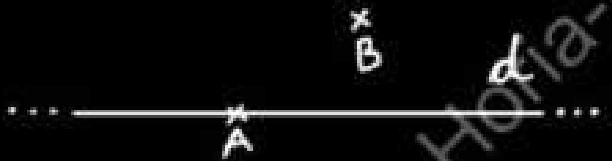
Planele se notează cu litere ale alfabetului grecesc: α, β, γ, π etc.



Def. Multimea punctelor dintr-un plan situate de aceeași parte a unei drepte s.n. semiplan.

• Poziția unui punct față de o dreaptă •

Un punct se poate afla (aparține) pe o dreaptă sau în afara ei.



• punctul A se află pe dreapta d, iar B nu se află pe dreapta d.

Scriem: $A \underset{\text{„aparține" (se află în/pe)}}{\in} d$ și $B \notin d$.

Def. O porțiune dintr-o dreaptă mărginită la un capăt s.n. semidreapta.

Semidreapta
(închisă)
[OA.
O ∈ [OA
„Pleacă din punctul O".

Semidreapta
(deschisă)
(OA.
O ∉ (OA

Def. O porțiune dintr-o dreaptă mărginită la ambele capete s.n. segment (de dreaptă).

Segmentul
(închis)
[AB]
A, B ∈ [AB]

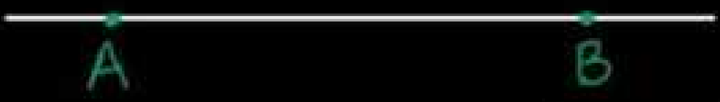
Segmentul
(deschis)
(AB)
A, B ∉ (AB)

O axiomă este un adevăr matematic acceptat ca atare.

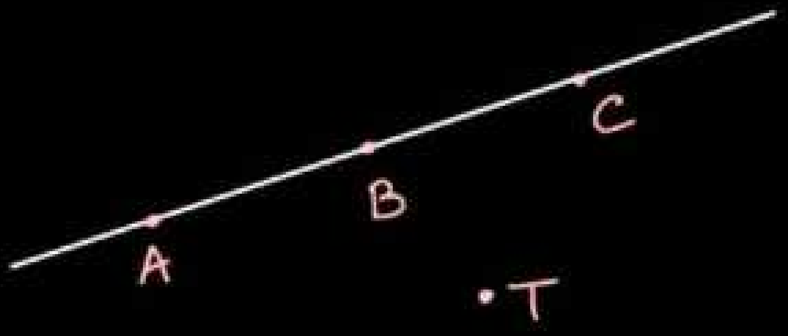
Axioma lui Euclid

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Dreapta AB.



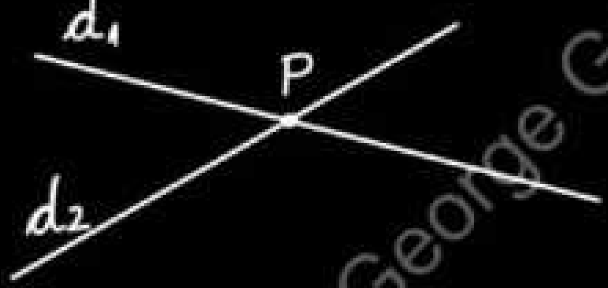
Def. Trei sau mai multe puncte s.n. coliniare dacă se află pe aceeași dreaptă.



A-B-C coliniare
A, B, T necoliniare

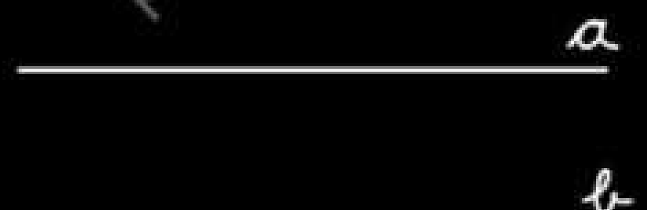
• Pozițiile relative a două drepte •

Def. Două drepte care se intersectează (au un punct comun) s.n. drepte concurente.



d_1 și d_2 sunt concurente

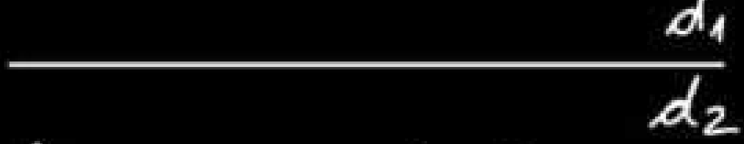
Def. Două drepte coplanare (situate în același plan) care nu au niciun punct comun s.n. drepte paralele.



Dreptele a și b sunt paralele.
Notăm: $a \parallel b$.

Exemple de drepte paralele:
- liniile unui caiet dictando
- liniile portativului

Def. Două drepte s.n. confundate dacă se suprapun.



Obs. În anumite teorii matematice, $d_1 \parallel d_2$ și în cazul în care dreptele sunt confundate.

Def. Fie un segment care să reprezinte o unitate de măsură (de exemplu, 1cm).

Lungimea unui alt segment reprezintă numărul care ne arată de câte ori se cuprinde segmentul unitate în segmentul nostru.

În general, vom măsura lungimile segmentelor folosind rigla gradată.

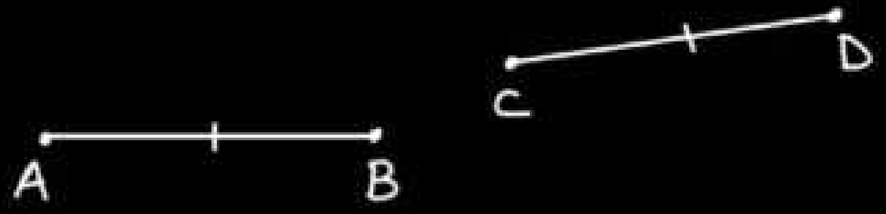
Def. Distanta de la punctul A la punctul B reprezintă lungimea segmentului [AB].

$$dist\ (A,B) = [AB]$$

Obs. i) Dacă $A = B$, atunci $dist(A,B) = 0$.

ii) $dist(A,B) = dist(B,A)$.

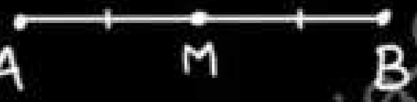
Def. Două segmente care au aceeași lungime s.n. segmente congruente.



Notăm: $[AB] \equiv [CD]$

„congruent cu".

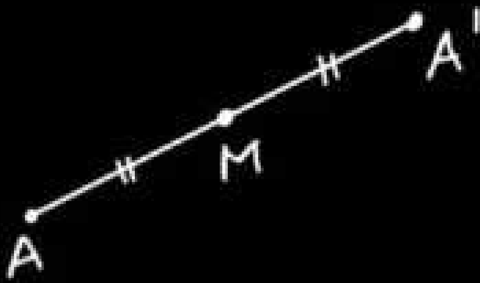
Def. Mijlocul unui segment este punctul care împarte segmentul dat în două segmente congruente.



$[AM] \equiv [MB] \Rightarrow$

$M = \text{mij}[AB]$.

Def. Simetricul punctului A față de punctul M este punctul A' a.î. M să fie mijlocul segmentului [AA'].



$M = \text{mij}[AA']$

Notăm:

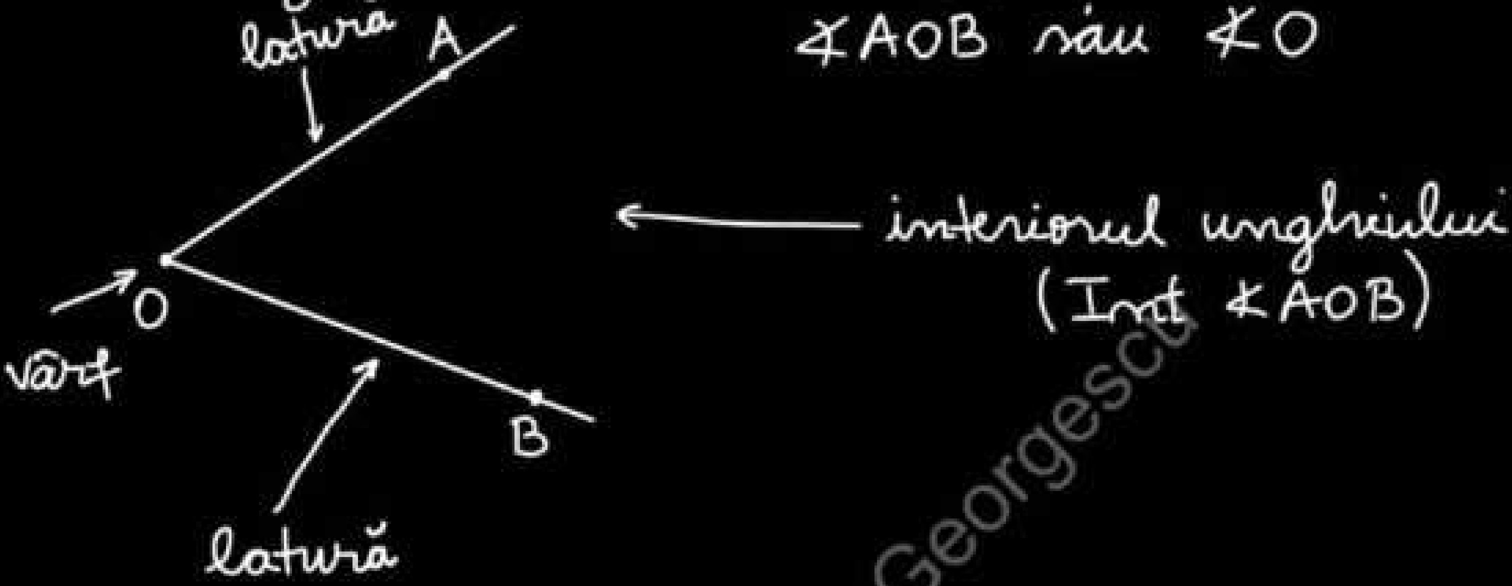
$\text{sim}_M A = A'$.

Unim punctul A cu M și prelungim cu un segment de lungime egală cu a segmentului AM.

Unghiul

Def. Figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeași origine s.n. unghi.

Notatie:
∢AOB sau ∢O



Măsura unui unghi este o mărime care ne spune cât de mare este „deschiderea" unghiului respectiv.

În cazul în care deschiderea este maximă, atunci avem un unghi alungit.

∢MON este alungit.

O unitate de măsură pentru unghiuri este gradul sexagesimal (pe scurt, gradul).

Orice unghi alungit are măsura egală cu 180°.

Def. A 180-a parte a unui unghi alungit reprezintă un grad (1°).

A 60-a parte dintr-un grad s.n. minut (sexagesimal) și se notează cu $'$.

Așadar, $1^\circ = 60'$.

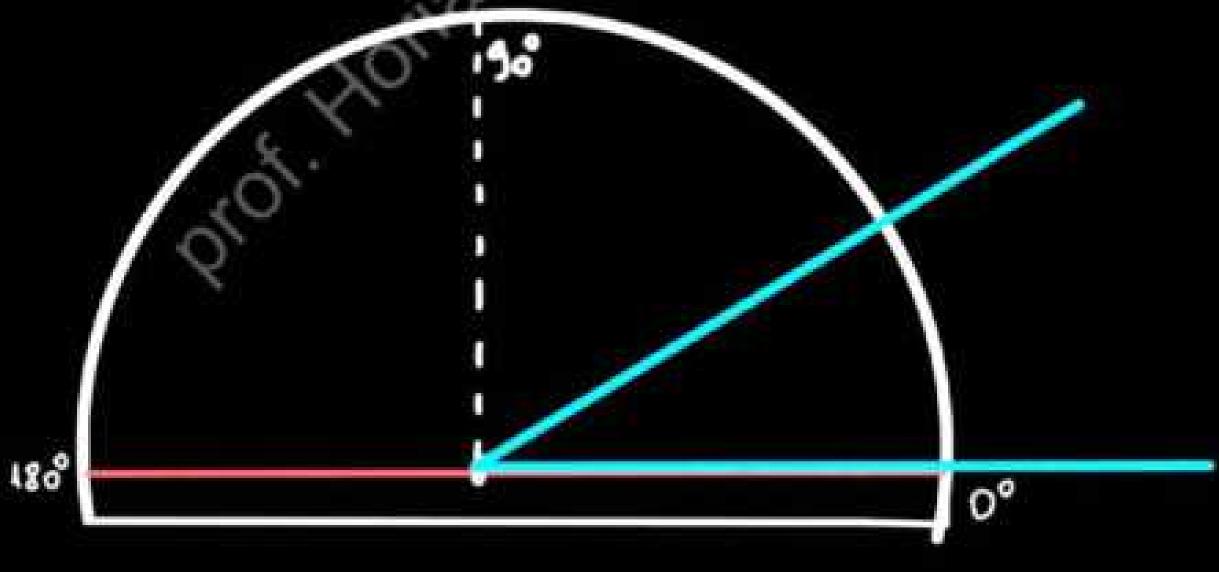
A 60-a parte dintr-un minut s.n. secundă (sexagesimală) și se notează cu $''$.

Așadar,

$$1' = 60''.$$

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

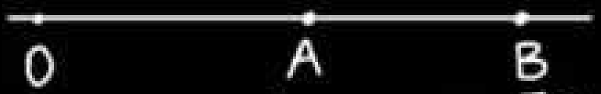
Instrumentul geometric cu care măsurăm unghiuri s.n. raportor.



- Clasificarea unghiurilor după măsură:

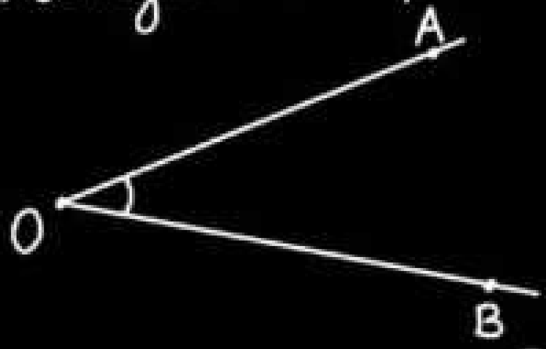
(i) Unghiul cu măsura de 0° s.n. unghi nul.

$\measuredangle AOB = 0^\circ$.



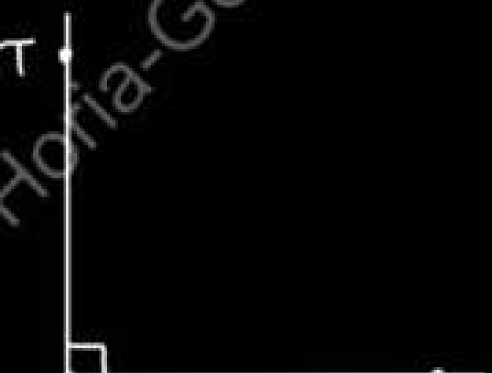
(ii) Unghiul nenul cu măsura mai mică de 90° s.n. unghi ascuțit.

$\measuredangle AOB < 90^\circ$.



(iii) Unghiul cu măsura egală cu 90° s.n. unghi drept.

$\measuredangle TVR = 90^\circ$.

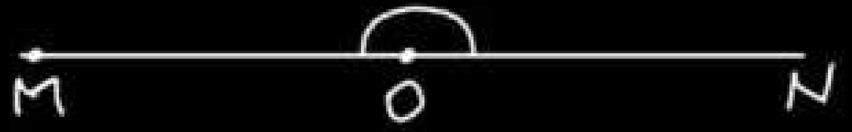


(iv) Unghiul cu măsura cuprinsă între 90° și 180° s.n. unghi obtuz.

$90^\circ < \measuredangle TOC < 180^\circ$

ⓥ Unghiul cu măsura de 180° s.n. unghi alungit.

$\sphericalangle MON = 180^\circ$.



<u>Obs.</u> Trei puncte sunt coliniare dacă și numai dacă determină un unghi alungit.

<u>Def.</u> Un unghi care nu este nici nul și nici alungit s.n. unghi propriu.

- Calcule cu măsuri de unghiuri:

i) $30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

ii) $15^\circ 30' + 27^\circ 17' = 42^\circ 47'$

iii) $13^\circ 40' + 15^\circ 30' = \underbrace{28^\circ 70'}_{1^\circ = 60'} = 29^\circ 10'$

iv) $70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$

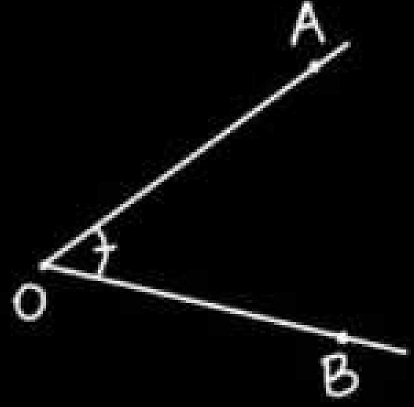
v) $80^\circ 40' - 10^\circ 15' = 70^\circ 25'$

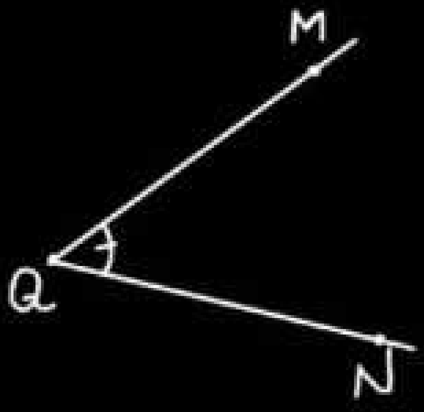
vi) $90^\circ - 23^\circ 18' = 89^\circ 60^\circ - 23^\circ 18' = 66^\circ 42'$

<u>Obs.</u>

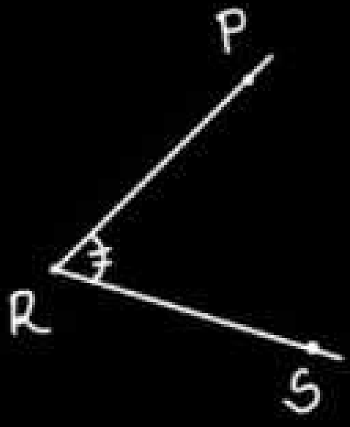
$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ 59' 60'';$$
$$180^\circ = 179^\circ 60' = 179^\circ 59' 60''.$$

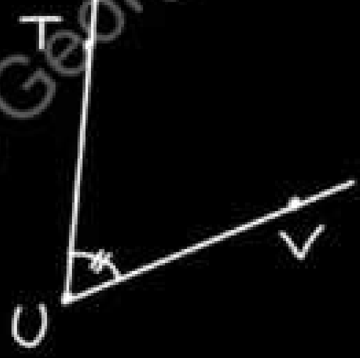
Def. Două unghiuri care au aceeași măsură s.n. unghiuri congruente.





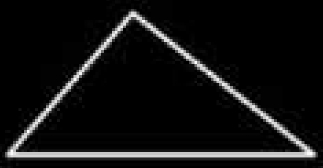
$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle MQN$

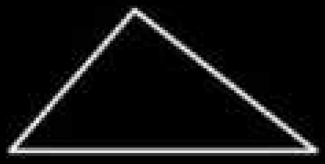


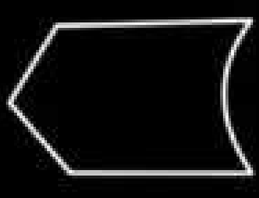


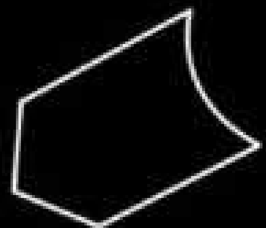
$\sphericalangle PRS \equiv \sphericalangle TUV$

„**Def.**" Două figuri geometrice sunt congruente dacă prin suprapunere coincid.

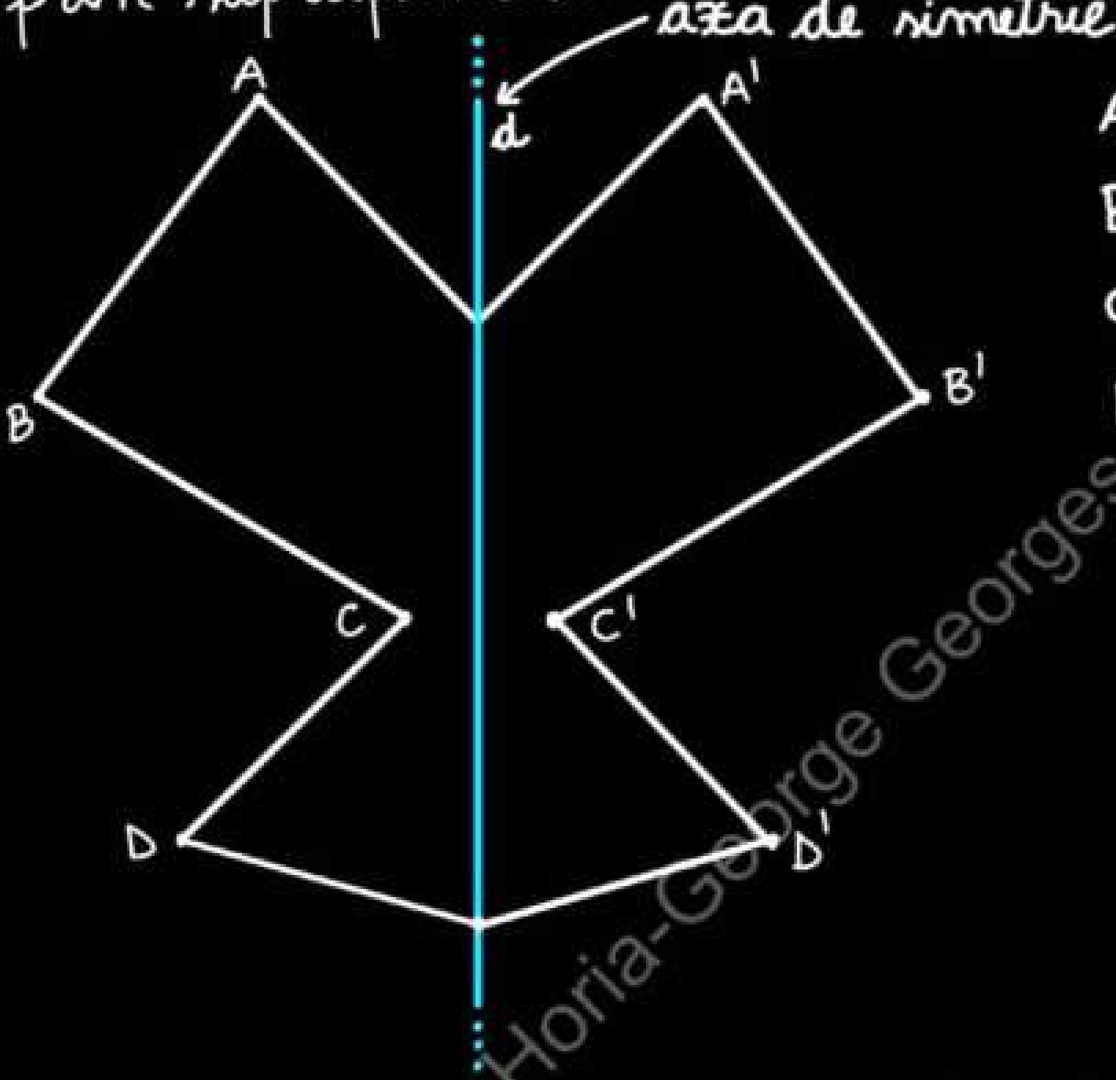








„**Def**" Axa de simetrie este o dreaptă după care dacă se îndoaie o foaie de hârtie cu un desen, cele două părți ale desenului coincid prin suprapunere.



$A' = sim_d A$

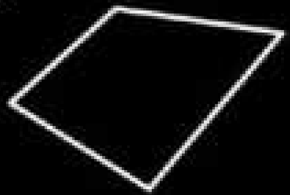
$B' = sim_d B$

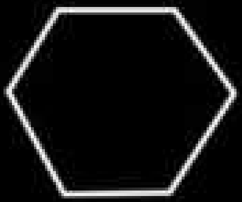
$C' = sim_d C$

$D' = sim_d D$

Def. Figura geometrică închisă formată doar din segmente s.n. poligon.

polys – mai multe; gonos – unghi;

		Număr de laturi
	patrulater (tetragon)	4
	pentagon	5



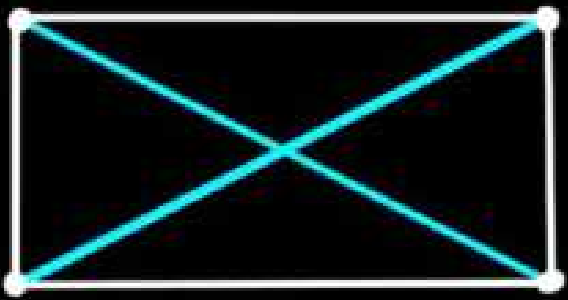
hexagon 6

heptagon : 7 laturi
octogon : 8 laturi
eneagon : 9 laturi
decagon : 10 laturi
dodecagon : 12 laturi

Def. Segmentul care unește două vârfuri nealăturate ale unui poligon s.n. diagonală.

Exemple:

diagonalele pătratului



diagonalele dreptunghiului

• Unități de măsură pentru lungime •

Unitatea fundamentală pentru lungime este metrul (m).

Originea metrului:

$\frac{1}{10^7}$ din distanța de la pol la Ecuator de-a lungul unui meridian reprezintă 1 metru. (sec. XVIII).

Prototip: bara de platină de 1 m (1889-1960)

1960-1983: definirea metrului folosind atomul de Kripton 86.

1983 → : distanța parcursă de lumină în vid în $\frac{1}{299792458}$ dintr-o secundă reprezintă un metru.

Instrumente care ne ajută să măsurăm lungimi: ruletă, riglă gradată, metrul de croitorie, metrul de tâmplărie etc.

SUBMULTIPLII m MULTIPLII m

$$\begin{tikzcd}
mm \arrow[r, bend right, ":10"'] & cm \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & dm \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & \boxed{m} \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & dam \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & hm \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & km \arrow[l, bend right, "\cdot 10"']
\end{tikzcd}$$

milimetru centimetru decimetru metru decametru hectometru kilometru

Exemple:

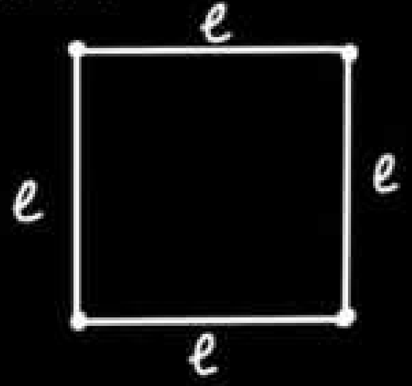
$4400\,m = 4400:100\,hm = 44\,hm$;

$231\,m = 231\cdot 10\,dm = 2310\,dm$;

$2,3\,m = 2,3\cdot 1000\,mm = 2300\,mm$.

Def. Perimetrul unui poligon reprezintă suma lungimilor tuturor laturilor poligonului respectiv.

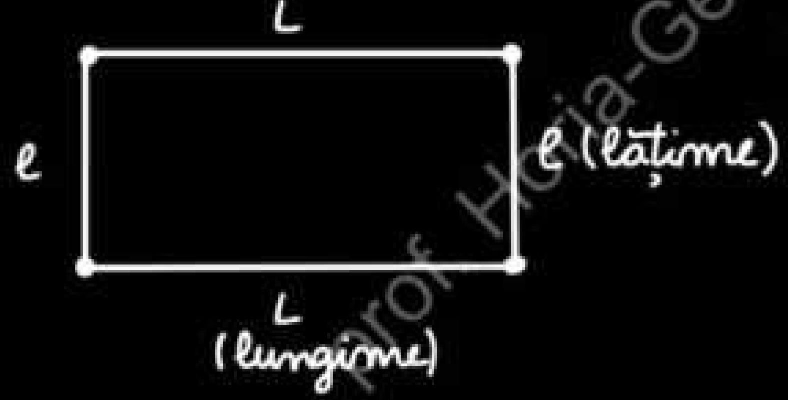
Formule:



Perimetrul pătratului

$P_{\square} = l+l+l+l$

$P_{\square} = 4\cdot l$



Perimetrul dreptunghiului

$P_{\boxed{}} = L+L+l+l$

$P_{\boxed{}} = 2L+2l$

$P_{\boxed{}} = 2(L+l)$.

- Alte unități de măsură pentru lungime

inci (țol): 1 in = 1" = 2,54 cm.

picioare (feet): 1 ft = 12 in = 30,48 cm.

mile : 1 milă ≃ 1,6 Km.

nanometru : 1 nm = 10^{-9} m (o miliardime dintr-un metru)

yarzi : 1 yd ≃ 0,9 m;

leghe : 1 leghe ≃ 5,55 Km; („20000 de leghe sub mări"- Jules Verne)

• Unități de măsură pentru arie •

„**Def.**” Aria unei suprafețe este o mărime care ne arată cât de întinsă este acea suprafață.

Unitatea fundamentală pentru arie este metrul pătrat (m^2) și reprezintă aria unui pătrat cu latura de 1 m.

SUBMULTIPLII m^2 MULTIPLII m^2

$$\begin{tikzcd}
mm^2 \arrow[r, bend right, ":100"'] & cm^2 \arrow[l, bend right, "\cdot 100"'] \arrow[r, bend right, ":100"'] & dm^2 \arrow[l, bend right, "\cdot 100"'] \arrow[r, bend right, ":100"'] & \boxed{m^2} \arrow[l, bend right, "\cdot 100"'] \arrow[r, bend right, ":100"'] & dam^2 \arrow[l, bend right, "\cdot 100"'] \arrow[r, bend right, ":100"'] & hm^2 \arrow[l, bend right, "\cdot 100"'] \arrow[r, bend right, ":100"'] & km^2 \arrow[l, bend right, "\cdot 100"']
\end{tikzcd}$$

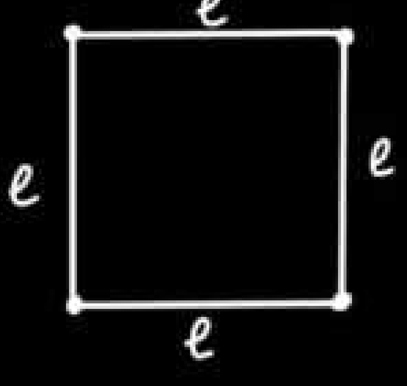
Exemple:

$$20\ dam^2 = 20 \cdot 100\ m^2 = 2000\ m^2$$

$$3\ dm^2 = 3 : 100\ m^2 = 0{,}03\ m^2$$

$$345\ cm^2 = 345 : 10000 = 0{,}0345\ m^2$$

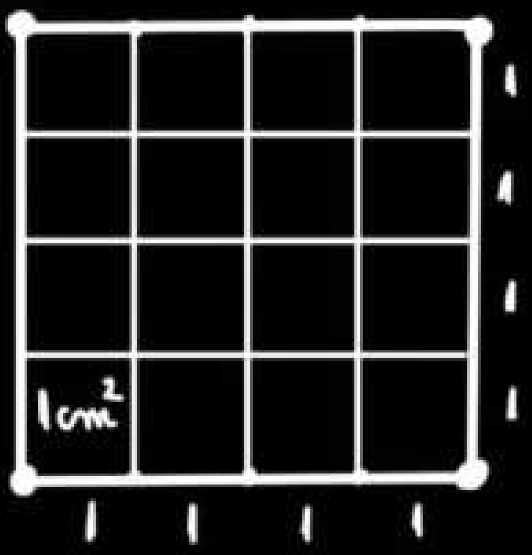
Formule:



Aria pătratului

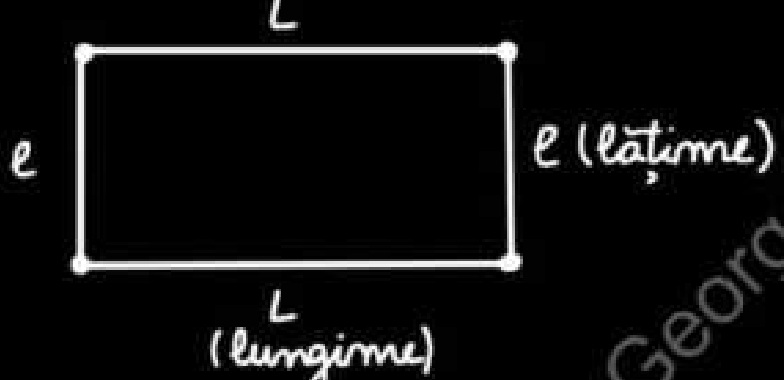
$$A_{\square} = l^2.$$

Exemplu:



$l = 4\,cm;$

$A_{\square} = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16\,cm^2.$



Aria dreptunghiului

$A_{\square} = L \cdot l.$

- Alte unități de măsură pentru arie

ar (ari): $1\,ar = 100\,m^2.$

hectar (ha): $1\,ha = 1\,hm^2 = 10000\,m^2 = 100\,ar.$

pogon : $1\,pogon \simeq 5000\,m^2 = \frac{1}{2}\,ha$
(jumătate de hectar)

• Unități de măsură pentru volum •

„Def." Volumul unui corp geometric este o mărime care ne arată cât loc ocupă corpul respectiv în spațiu.

Unitatea fundamentală pentru volum este metrul cub (m^3) și reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 m.

SUBMULTIPLII m^3 MULTIPLII m^3

$$\begin{tikzcd}
mm^3 \arrow[r, bend right, ":1000"'] & cm^3 \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & dm^3 \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & \boxed{m^3} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & dam^3 \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & hm^3 \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & km^3 \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"']
\end{tikzcd}$$

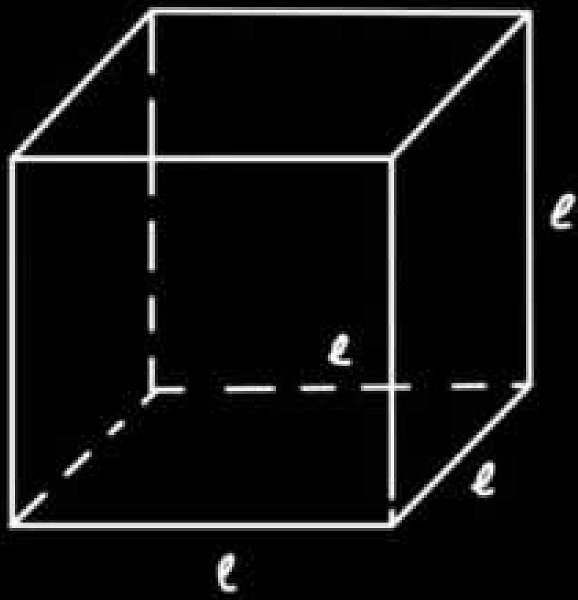
Exemple:

$2 m^3 = 2 \cdot 10^6 cm^3$;

$123 dm^3 = 123 \cdot 10^{-3} m^3 = 123 : 1000 m^3 = 0{,}123 m^3$;

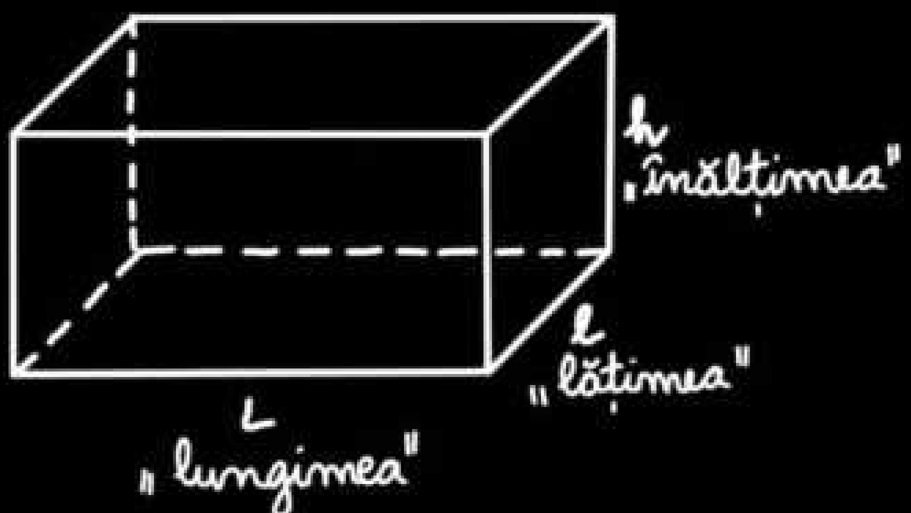
$3 cm^3 = 3 \cdot 10^{-9} dam^3$.

Formule:



Volumul cubului

$V_{cub} = l^3$



Volumul paralelipipedului dreptunghic

$V = L \cdot l \cdot h.$

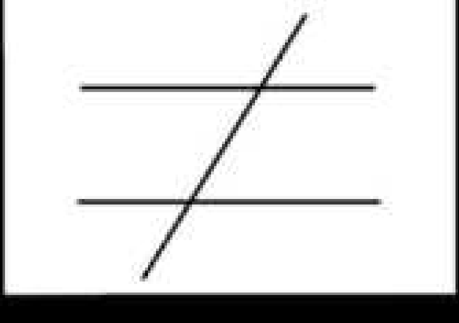
- Alte unități de măsură pentru volum

litrul: $1\ dm^3 = 1\ l$ (legătura dintre unitatea de măsură pentru volum și cea pentru capacitate)

ounces/uncii: $1\ oz$ (uncie) $\simeq 28{,}4\ ml$ $(24\text{-}33\ g)$

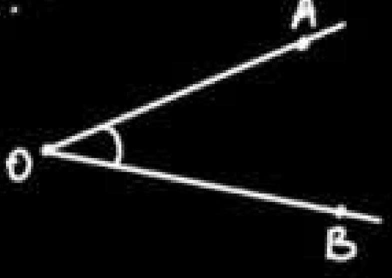
Horia-George Georgescu

ELEMENTE FUNDAMENTALE DE GEOMETRIE (II)



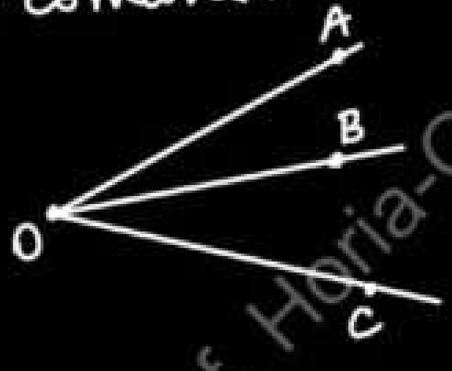
Unghiuri adiacente
Unghiuri opuse la vârf
Unghiuri în jurul unui punct

Def. Figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeași origine s.n. unghi.



$\sphericalangle AOB$ ← unghiul AOB

Def. Două unghiuri sunt adiacente dacă au același vârf, o latură comună și celelalte două laturi situate de o parte și de alta a laturii comune.

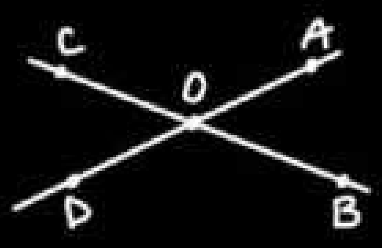


Exemplu: $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$

Obs. $\text{Int}(\sphericalangle AOB)\cap \text{Int}(\sphericalangle BOC)=\emptyset$

(interioarele unghiurilor sunt disjuncte)

Def. Două unghiuri cu același vârf s.n. unghiuri opuse la vârf dacă laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt, adică laturile celor două unghiuri sunt semidrepte opuse.

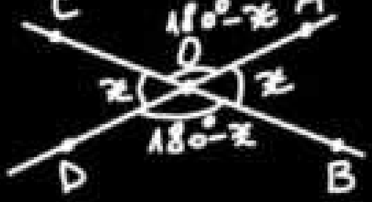


Exemplu: $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$

$\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$

Teoremă. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

Dem.



Notăm $\sphericalangle AOB \overset{not}{=} x$.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC \\ \sphericalangle BOC = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$

$x + \sphericalangle AOC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = 180^\circ - x$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COD \\ \sphericalangle AOD = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow 180^\circ - x + \sphericalangle COD = 180^\circ \Rightarrow$

$\sphericalangle COD = x$.

Similar, $\sphericalangle BOD = 180^\circ - x$.

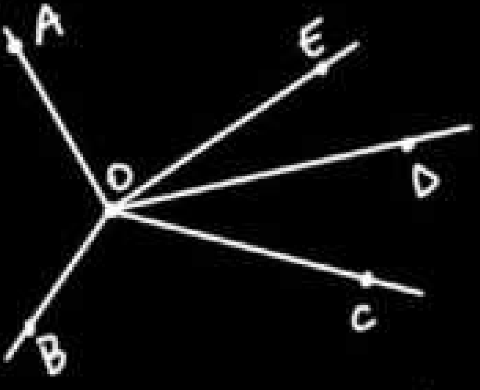
În concluzie, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

Def. Trei sau mai multe unghiuri s.n. unghiuri în jurul unui punct dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

i) unghiurile au același vârf;

ii) orice punct al planului se află pe o latură, coincide cu vârful comun sau se află în interiorul unui unghi;

iii) interioarele unghiurilor sunt disjuncte (nu se intersectează în niciun punct.



$\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD,$
$\sphericalangle DOE, \sphericalangle EOA.$

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu 360°.

$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ$.

Unghiuri complementare
Unghiuri suplementare

Def. Două unghiuri s.n. complementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 90°.

Obs. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ complementare $\iff \hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ$

Exemplu: $\hat{\alpha}=20^\circ, \hat{\beta}=70^\circ$;

În acest caz, un unghi dintre cele două reprezintă complementul celuilalt unghi.

Notăm cu $c(\hat{u})$ complementul unghiului de u°.

Obs. $c(u)=90^\circ-u^\circ$.

Exemplu. $c(30^\circ)=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Def. Două unghiuri s.n. suplementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 180°.

Obs. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ suplementare $\iff \hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^\circ$.

Exemplu: $\hat{\alpha}=120^\circ, \hat{\beta}=60^\circ$.

În acest caz, un unghi dintre cele două reprezintă suplementul celuilalt unghi.

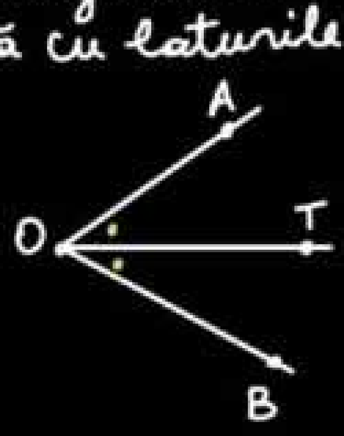
Notăm cu $s(\hat{u})$ suplementul unghiului de u°.

Obs. $s(u)=180^\circ-u^\circ$.

Exemplu. $s(70^\circ)=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

Bisectoarea unui unghi

Def. Bisectoarea unui unghi reprezintă semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului și care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.

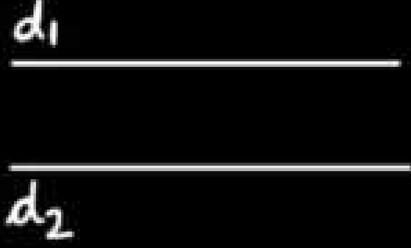


$[OT$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$

$\sphericalangle AOT \equiv \sphericalangle BOT$

Paralelism

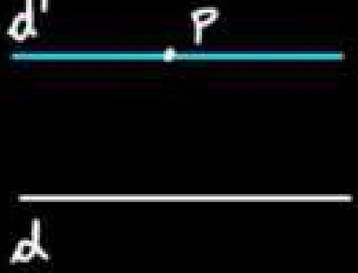
Def. Două drepte coplanare care nu au nici un punct comun (i.e. nu se intersectează) s.n. drepte paralele.



$d_1 \cap d_2 = \phi$, deci d_1 și d_2 sunt paralele

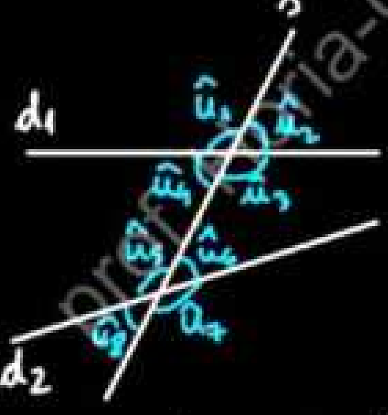
Notăm $d_1 \parallel d_2$ și citim „dreapta d_1 este paralelă cu dreapta d_2".

Axioma (lui Euclid). Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la dreapta dată.



$P \notin d \Rightarrow \exists !\, d'$ a.î. $P \in d'$ și $d' \parallel d$.

Def. Două drepte d_1 și d_2 tăiate de o secantă s determină următoarele perechi de unghiuri:



i) alterne interne (a.i.): $\begin{cases} \hat{u}_4 \text{ și } \hat{u}_6 \\ \hat{u}_3 \text{ și } \hat{u}_5 \end{cases}$

ii) alterne externe (a.e.): $\begin{cases} \hat{u}_1 \text{ și } \hat{u}_7 \\ \hat{u}_2 \text{ și } \hat{u}_8 \end{cases}$

iii) corespondente (coresp.) $\begin{cases} \hat{u}_1 \text{ și } \hat{u}_5 \\ \hat{u}_2 \text{ și } \hat{u}_6 \\ \hat{u}_4 \text{ și } \hat{u}_8 \\ \hat{u}_3 \text{ și } \hat{u}_7 \end{cases}$

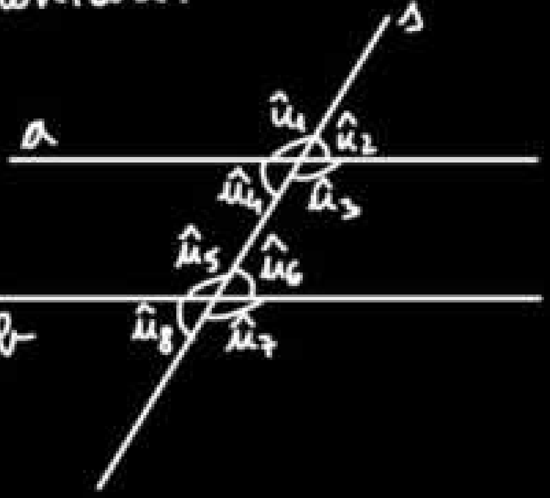
iv) interne de aceași parte a secantei (i.d.a.p.s.): $\hat{u}_4$ și $\hat{u}_5$, $\hat{u}_3$ și $\hat{u}_6$.

v) externe de aceași parte a secantei (e.d.a.p.s.): $\hat{u}_1$ și $\hat{u}_8$, $\hat{u}_2$ și $\hat{u}_7$.

Prop. Fie dreptele $d_1 \parallel d_2$ și o dreaptă s care intersectează dreapta d_1. Atunci s intersectează și dreapta d_2.

Justificare (exercițiu).

Obs. Considerăm două drepte paralele a și b taiate de secanta s. Atunci secanta s determină perechi de unghiuri: a.i. congruente, a.e. congruente, coresp. congruente, i.d.a.p.s. suplementare și e.d.a.p.s suplementare.



Exemple:

$\hat{u}_5 \equiv \hat{u}_6$ (a.i)

$\hat{u}_7 \equiv \hat{u}_3$ (coresp.)

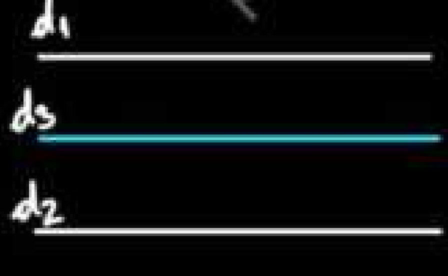
$\hat{u}_6+\hat{u}_3=180^\circ$ (i.d.a.p.s)

Criteriul de paralelism

Dacă două drepte tăiate de o secantă determină perechi de unghiuri a.i. congruente sau a.e. congruente sau coresp. congruente sau i.d.a.p.s suplementare sau e.d.a.p.s. suplementare, atunci cele două drepte sunt paralele.

Proprietatea de tranzitivitate a relației de paralelism.

Două drepte distincte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

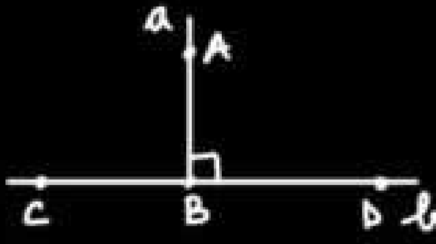


$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_3 \\ d_2 \parallel d_3 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

$d_1 \neq d_2$

Perpendicularitate

Def. Două drepte concurente care formează un unghi drept (unghi cu măsura de 90°) s.n. drepte perpendiculare.



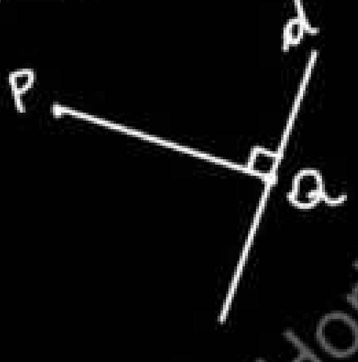
Notăm $a \perp b$ și citim „dreapta a este perpendiculară pe dreapta b.

$AB \perp CD$

B s.n. piciorul perpendicularei construite din A pe dreapta CD.

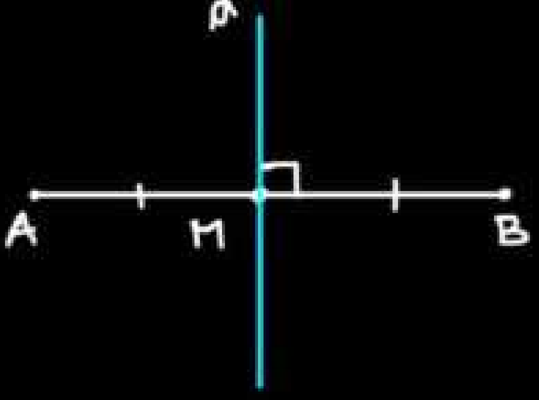
Teoremă. Două drepte coplanare perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

Def. Distanța de la un punct la o dreaptă reprezintă lungimea segmentului determinat de acel punct și piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreaptă.



$\text{dist}(P, d) = PQ$, unde $PQ \perp d$
$Q \in d$

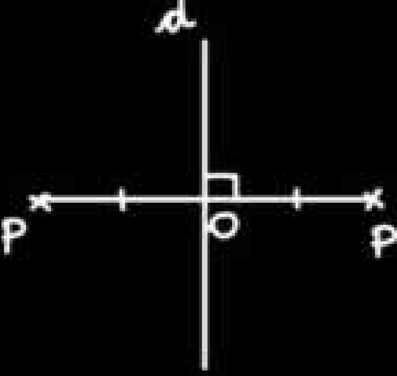
Def. Mediatoarea unui segment reprezintă perpendiculara ce trece prin mijlocul segmentului respectiv.



$M = \text{mij}[AB]$
$d \perp AB$, $M \in d$.

d este mediatoarea segmentului AB.

Def. Simetricul punctului P față de dreapta d este punctul P' a.î. d să fie mediatoarea segmentului PP'.



$$\left.\begin{matrix} d \perp PP' \\ PO \equiv OP' \end{matrix}\right\} \Rightarrow P' = sim_d P$$

Obs. d s.n. axă de simetrie

Cercul

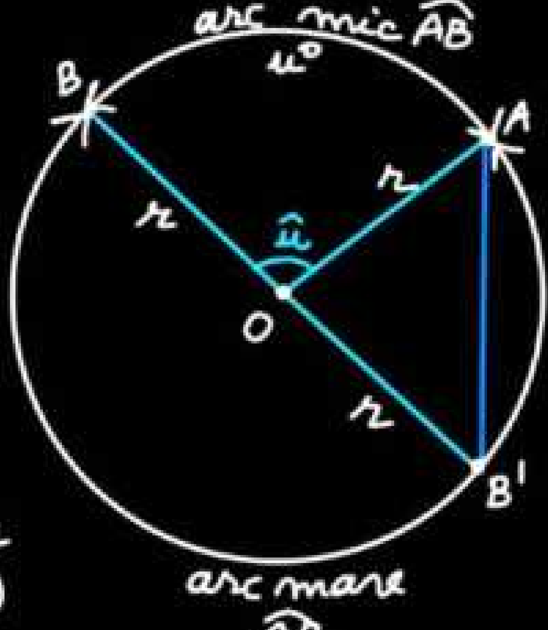
Noțiuni elementare

Def. Fie O un punct din plan și r un număr pozitiv. Mulțimea punctelor din plan situate la distanța r față de punctul O s.n. cerc de centru O și rază r.

Notăm $\mathcal{C}(O, r) = \{P \in \mathcal{P} \mid OP = r\}$

Obs. (Def) Cercul reprezintă locul geometric al tuturor punctelor din plan egal depărtate de un punct fix denumit centrul cercului.

Elemente în cerc:



(i) Centrul cercului: punctul O

(ii) Raza cercului: segmentul determinat de centrul cercului și un punct situat pe cerc (de exemplu [OA])
$[OA] \equiv r$

(iii) Coardă: segmentul determinat de două puncte situate pe cerc (de exemplu coarda [AB'])

(iv) Diametrul: coarda care trece prin centrul cercului (de exemplu [BB'])
$[BB'] = d$; Obs. $d = 2 \cdot r$

(v) Arc de cerc: porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte de pe cerc (de exemplu arcul $\widehat{AB}$)

Def. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc și cu laturile coarde în cerc s.n. unghi la centru.

Exemplu: $\sphericalangle AOB$.

Obs. Măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului mic descris de acel unghi.

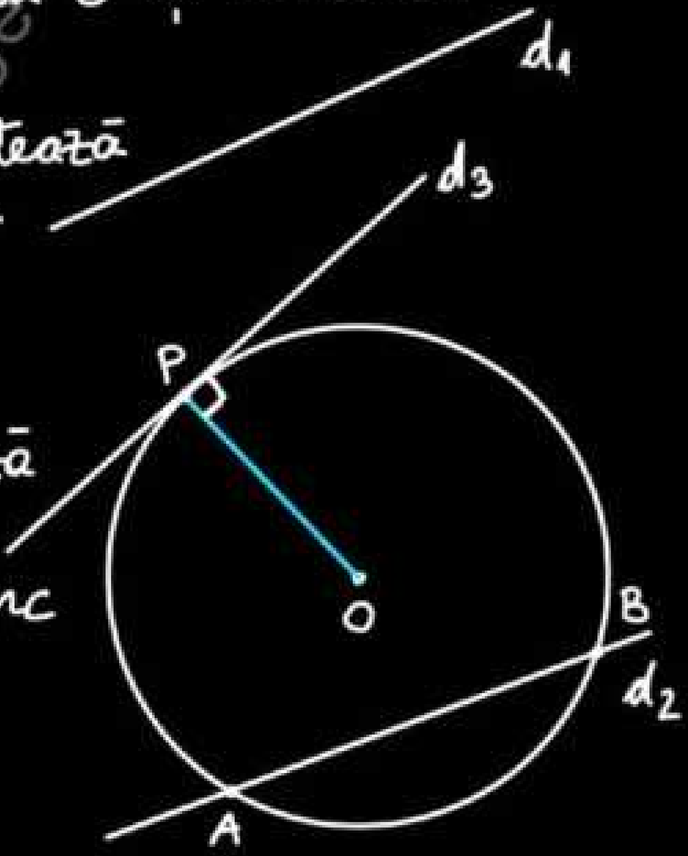
Exemplu: $m(\sphericalangle AOB) = m(\overset{\frown}{AB})$.
(arcul mic)

Obs. Măsura unui semicerc (jumătate de cerc) este egală cu 180°, iar măsura unui cerc este egală cu 360°.

Obs. Într-un cerc toate razele sunt congruente.

Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

Considerăm cercul de centru O și rază r.



(i) Dreapta care nu intersectează cercul în nici un punct s.n. dreaptă exterioară (d_1)

$$d_1 \cap \mathcal{C}(O,r) = \phi.$$

(ii) Dreapta care intersectează cercul în două puncte distincte s.n. secantă la cerc (d_2)

$$d_2 \cap \mathcal{C}(O,r) = \{A,B\}$$

(iii) Dreapta care intersectează cercul într-un punct s.n. tangentă la cerc, iar punctul respectiv s.n. punct de tangență (d_3).

$$d_3 \cap \mathcal{C}(O,r) = \{P\}$$

Teoremă. Tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în punctul de tangență.

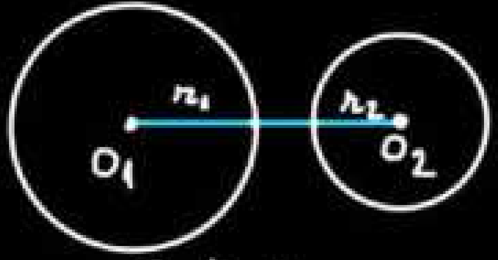
$$d_3 \perp OP.$$

Pozițiile relative a două cercuri

Considerăm două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. cu $r_1 \geqslant r_2$.

Cele două cercuri se pot afla în următoarele poziții:

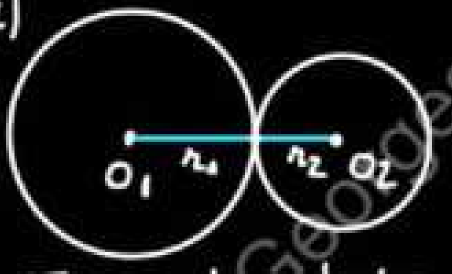
i)



Exterioare

$O_1O_2 > r_1 + r_2$

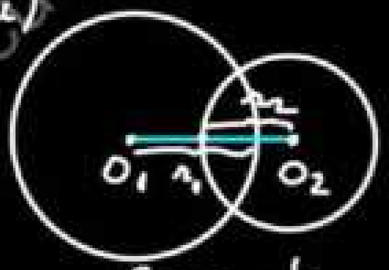
ii)



Tangente exterior

$O_1O_2 = r_1 + r_2$

iii)



Secante

$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$

iv)

Tangente interior

$O_1O_2 = r_1 - r_2$

v)

Interioare

$O_1O_2 < r_1 - r_2$

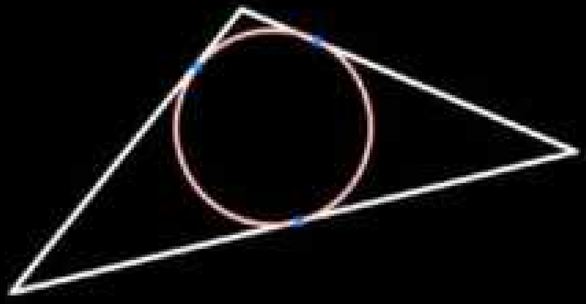
vi)

Concentrice

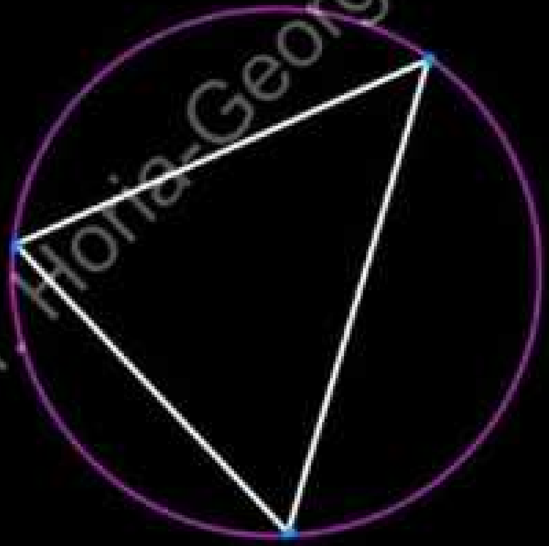
$O_1 = O_2 = O$

Cerc înscris într-un triunghi
Cerc circumscris unui triunghi

Def. Cercul înscris într-un triunghi este cercul la care cele trei laturi ale triunghiului îi sunt tangente.



Def. Cercul circumscris unui triunghi este cercul care conține (trece prin) toate cele trei vârfuri ale triunghiului.



Triunghiul lui Sierpinski

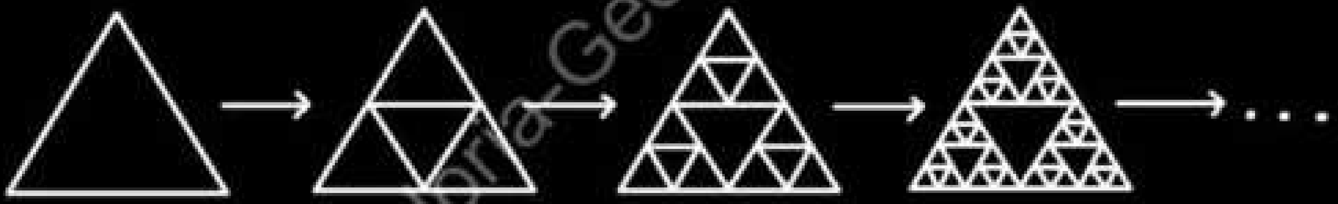
„Def." Fractalii sunt figuri geometrice care pot fi divizate în părți a.î. fiecare parte să fie o copie identică (sau măcar aproximativ) în miniatură a întregului.

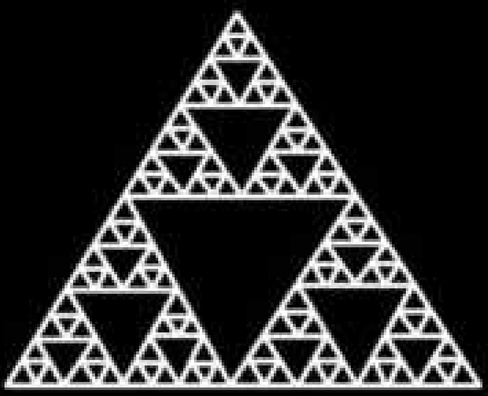
Obs. Orice fractal este autosimilar, se definește simplu (și recursiv) și are o structură fină.

Exemple de fractali din natură: fulgul de zăpadă, norii, sistemul de vase sanguine, conopida, broccoli etc.

Triunghiul lui Sierpinski este un exemplu clasic de fractal.

Mai jos este reprezentat modul în care se definește (construiește) acest fractal, pornind de la un triunghi echilateral.

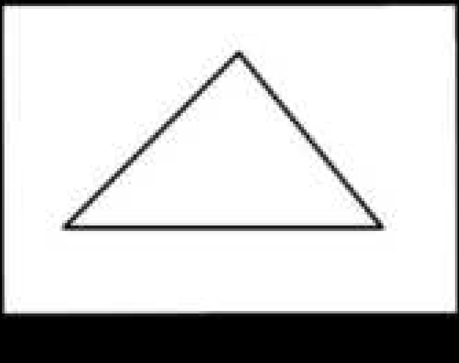




Triunghiul lui Sierpinski

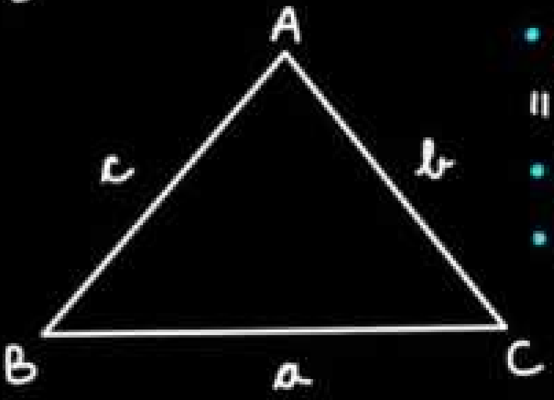
Horia-George Georgescu

TRIUNGHIUL



Triunghi. Elemente. Clasificare

Def. Considerăm trei puncte necoliniare.
Figura geometrică rezultată în urma reuniunii segmentelor determinate de cele trei puncte s.n. triunghi.
Altfel spus, poligonul cu trei laturi s.n. triunghi.



Elementele triunghiului:
- Notăm ΔABC și citim „triunghiul ABC".
- Vârfuri: A, B și C
- Laturi: [AB], [BC], [AC]

Unghiuri (interioare): $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$
($\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCA$)

Obs. $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$

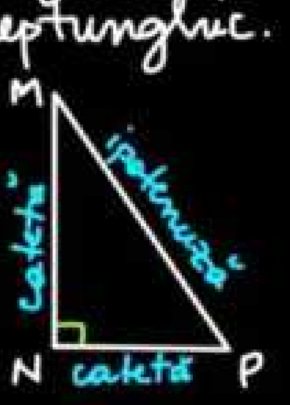
Clasificarea triunghiurilor

Ⓘ După măsurile unghiurilor

ⓘ Triunghiul care are toate unghiurile ascuțite s.n. triunghi ascuțitunghic.

$\sphericalangle A < 90^\circ$
$\sphericalangle B < 90^\circ$
$\sphericalangle C < 90^\circ$

(ii) Triunghiul care are un unghi drept s.n. triunghi dreptunghic.



$\sphericalangle MNP = 90^\circ$
[MN] și [NP] sunt catetele
[MP] este ipotenuza

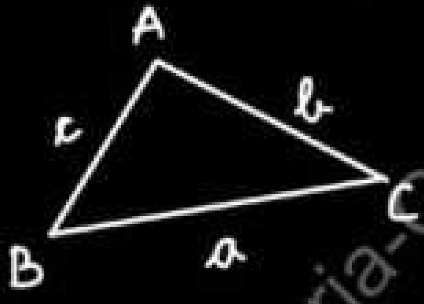
Def. Într-un triunghi dreptunghic laturile care formează unghiul drept se numesc catete, iar latura care se opune unghiului drept s.n. ipotenuză.

(iii) Triunghiul care are un unghi obtuz s.n. triunghi obtuzunghic.

$\sphericalangle RUW > 90°$

(II) După lungimile laturilor

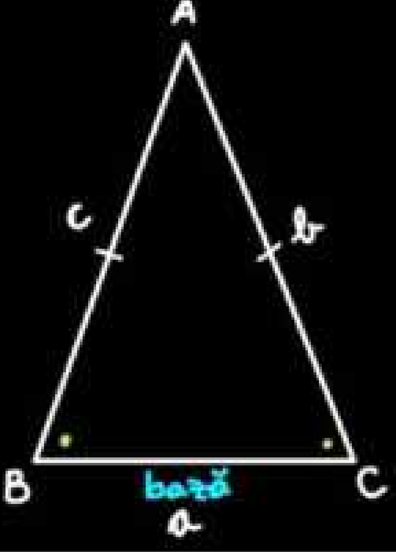
(i) Triunghiul care are laturile de lungimi diferite s.n. triunghi oarecare (scalen).



$a \neq b \neq c \Rightarrow \Delta ABC$ oarecare

(ii) Triunghiul care are două laturi congruente s.n. triunghi isoscel.

Obs. Latura care nu este congruentă cu celelalte două laturi s.n. bază.



$[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel

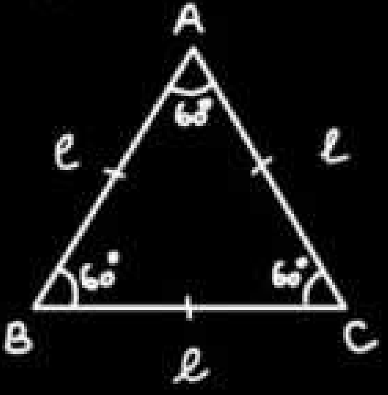
$(c = b)$

a s.n. bază

Prop. $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$

(unghiurile de la bază sunt congruente)

(iii) Triunghiul care are toate laturile congruente s.n. triunghi echilateral.



$a = b = c = \ell \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral

Def. Perimetrul unui triunghi reprezintă suma lungimilor tuturor laturilor triunghiului.

Def. Jumătate din valoarea perimetrului unui triunghi s.n. semiperimetru.

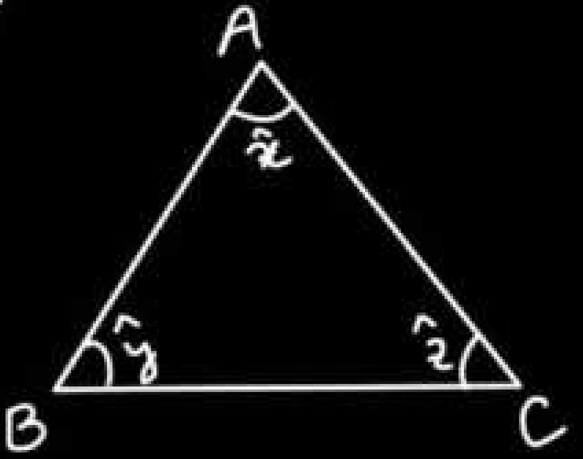
Def. Numim unghi exterior unui triunghi orice unghi adiacent și suplementar unui unghi interior al triunghiului.

Unghiuri interioare: $\hat{x}, \hat{y}$ și $\hat{z}$.

Unghiuri exterioare: $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4, \hat{u}_5, \hat{u}_6$

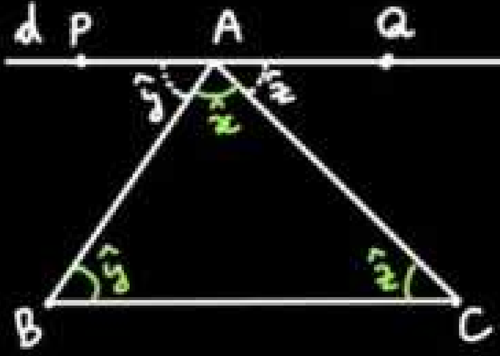
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor oricărui triunghi este egală cu 180°



$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180°.$$

Dem (Euclid).



Fie ΔABC.

Construim dreapta $d \parallel BC$.

Evident, $\sphericalangle PAB + \hat{x} + \sphericalangle QAC = 180^\circ$.

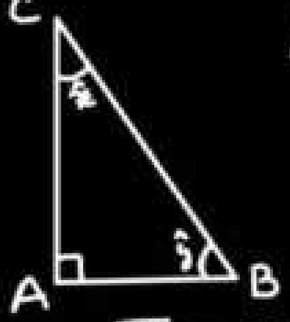
$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel BC \\ AB \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle PAB = \hat{y}$ (a.i.)

$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel BC \\ AC \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle QAC = \hat{z}$ (a.i.)

În concluzie, $\sphericalangle PAB + \hat{x} + \sphericalangle QAC = \hat{x} + \hat{y} + z = 180^\circ$.

□

Consecință. În orice triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt complementare.



ΔABC dreptunghic cu $\sphericalangle CAB = 90^\circ$

$\hat{x} + \hat{y} = 90^\circ$.

$c(\hat{x}) = \hat{y}$;

Teorema unghiului exterior

Teoremă. Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare triunghiului neadiacente unghiului exterior.

$\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{y} + \hat{z}$

$\hat{u}_3 = \hat{u}_4 = \hat{x} + z$

$\hat{u}_5 = \hat{u}_6 = \hat{x} + \hat{y}$

Dem.

Arăt că $\hat{u}_5 = \hat{u}_6 = \hat{x} + \hat{y}$.

$\hat{u}_5 = \hat{u}_6$ deoarece sunt unghiuri opuse la vârf.

În plus, $\hat{u}_5 + \hat{z} = 180^\circ$ și $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^\circ$.

Așadar, $\hat{u}_5 + \hat{z} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \mid -\hat{z}$, de unde obținem $\hat{u}_5 = \hat{x} + \hat{y}$.

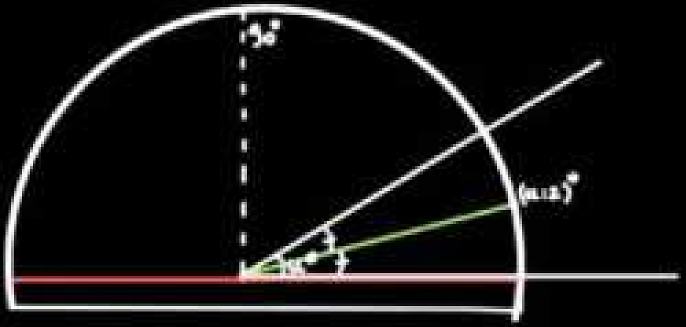
Celelalte egalități se demonstrează similar.

□

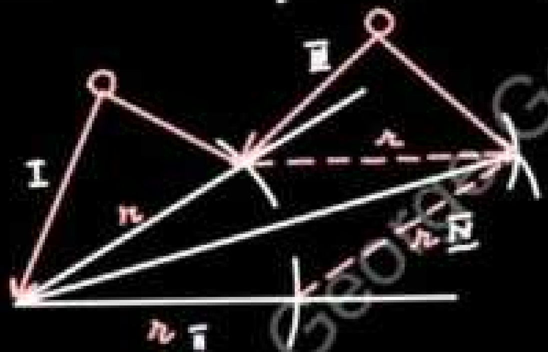
Construcții

① Construcția bisectoarei unui unghi de u°

1.1 Folosind rigla și raportorul

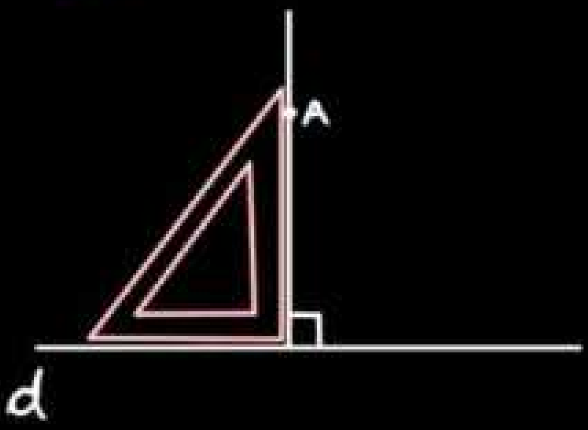


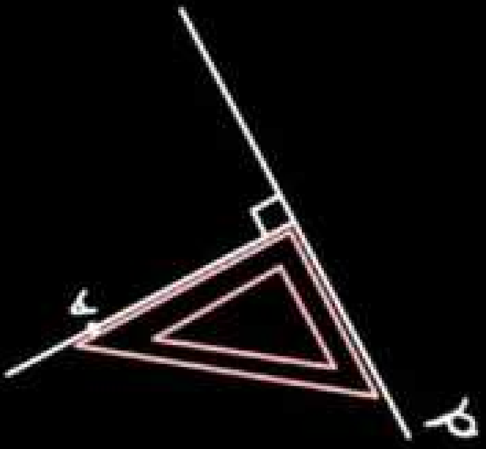
1.2 Folosind rigla și compasul



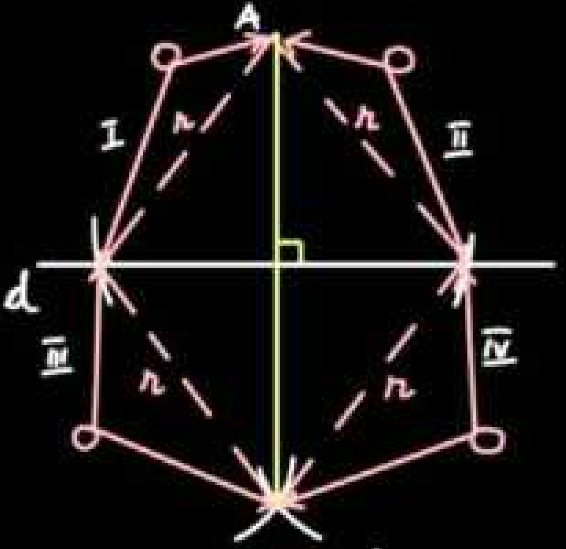
② Construcția perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă.

2.1 Folosind rigla și echerul





2.2 Folosind rigla și compasul

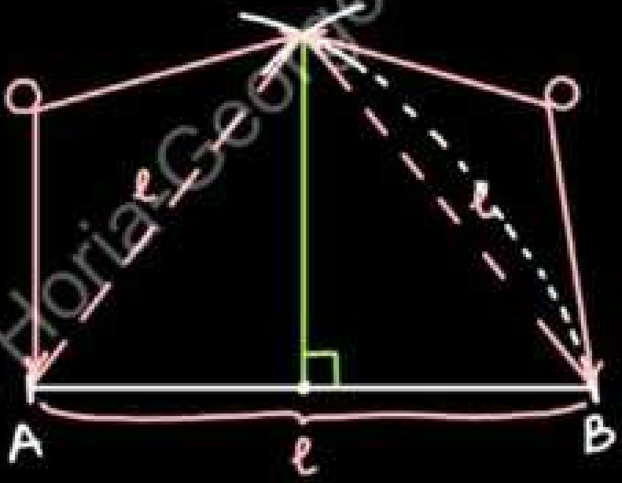


3. Construcția mediatoarei unui segment

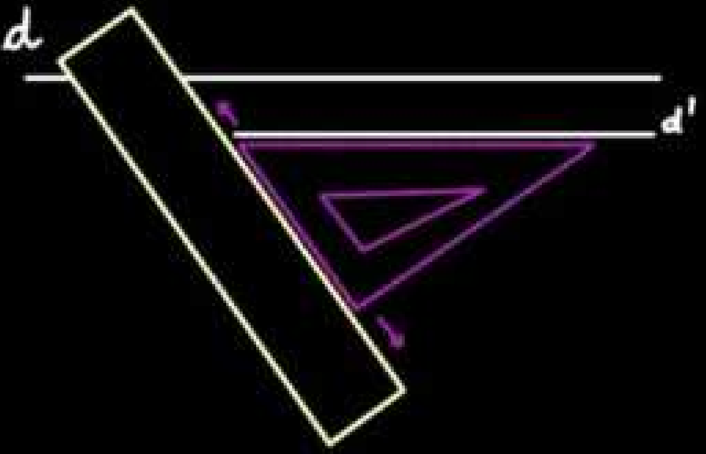
3.1. Folosind echerul (gradat)

(Ne bazăm pe definiție)

3.2. Folosind rigla și compasul

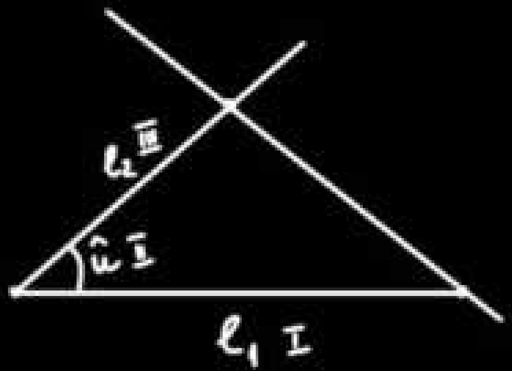


4. Construcția a două drepte paralele folosind rigla și echerul prin translație

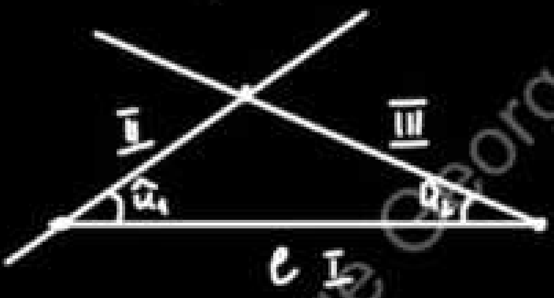


5. Constructia triunghiului

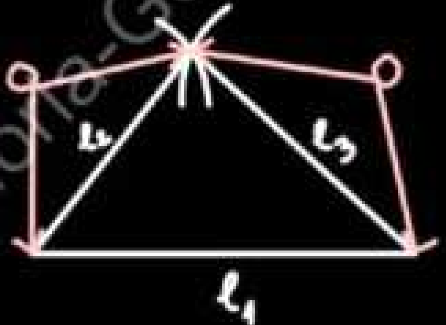
5.1 Cazul latură-unghi-latură $\overset{l_1\ \hat{u}\ l_2}{(L.U.L)}$



5.2 Cazul unghi-latură-unghi $\overset{\hat{u}_1\ l\ \hat{u}_2}{(U.L.U)}$

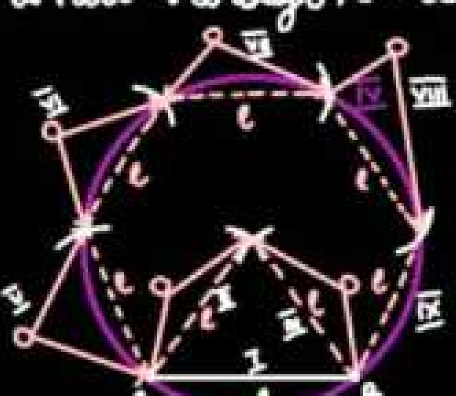


5.3 Cazul latură-latură-latură $\overset{l_1\ l_2\ l_3}{(L.L.L.)}$



Obs. Trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi dacă suma oricăror două numere este mai mare decât al treilea număr.

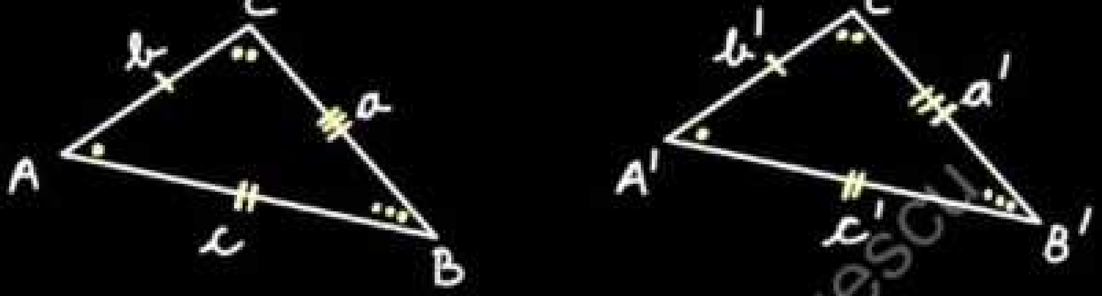
6. Construcția unui hexagon regulat cu rigla și compasul



Congruența triunghiurilor

Def." Două triunghiuri (în general, figuri geometrice) "sînt congruente dacă prin suprapunere coincid.

Def. Două triunghiuri sînt congruente dacă au elementele (laturi și unghiuri) corespunzătoare congruente două câte două.



$$(*)\quad \left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A'B']\\ [BC]\equiv[B'C']\\ [AC]\equiv[A'C']\\ \sphericalangle A\equiv\sphericalangle A'\\ \sphericalangle B\equiv\sphericalangle B'\\ \sphericalangle C\equiv\sphericalangle C'\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

Obs. Elementele corespunzătoare s.n. elemente omoloage.

Exemple: ∢A și ∢A' ; [AC] și [A'C'] din configurația anterioară (*).

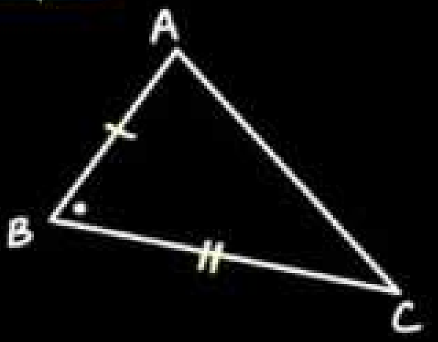
Cazurile (criteriile) de congruență pentru triunghiurile oarecare

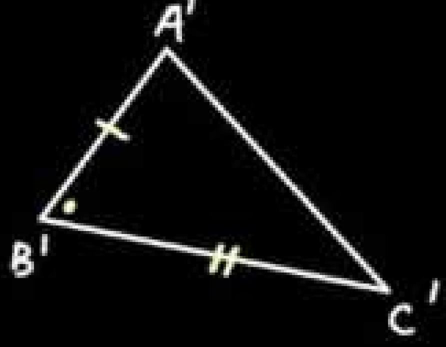
Condiții necesare și suficiente ca două triunghiuri să fie congruente.

① Cazul L.U.L (latură-unghi-latură)

Două triunghiuri sînt congruente dacă au două perechi de laturi respectiv congruente (două câte două) și unghiurile formate de cele două laturi respectiv congruente.

Exemplu:



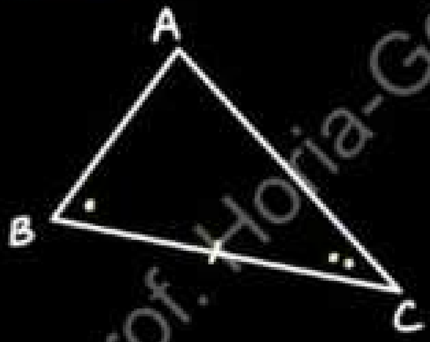


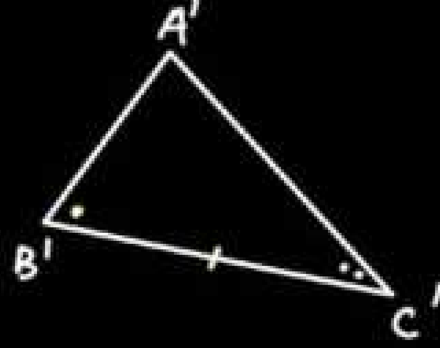
$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A'B']\ (L)\\ \sphericalangle B\equiv\sphericalangle B'\ (U)\\ [BC]\equiv[B'C']\ (L)\end{array}\right\}\overset{L.U.L}{\Longrightarrow}\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'.$$

ⓘⓘ Cazul U.L.U. (unghi-latură-unghi)

Două triunghiuri sunt congruente dacă au două laturi respectiv congruente și unghiurile alăturate celor două laturi respectiv congruente.

Exemplu:

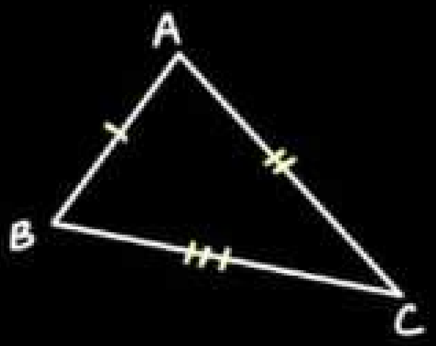


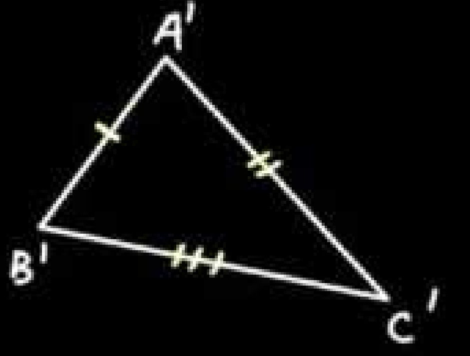


$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle B\equiv\sphericalangle B'\ (U)\\ [BC]\equiv[B'C']\ (L)\\ \sphericalangle C\equiv\sphericalangle C'\ (U)\end{array}\right\}\overset{U.L.U}{\Longrightarrow}\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

(iii) Cazul L.L.L. (latură-latură-latură)

Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente.





Exemplu:

$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A'B']\ (L)\\ [BC]\equiv[B'C']\ (L)\\ [AC]\equiv[A'C']\ (L)\end{array}\right\}\overset{L.L.L}{\Longrightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$$

Metoda triunghiurilor congruente

Metoda triunghiurilor congruente este o metodă care ne poate ajuta să demonstrăm că două segmente/unghiuri sunt congruente.

Tehnica este următoarea:

Încadrăm cele două segmente/unghiuri ca fiind laturi/unghiuri în două triunghiuri ce intuim a fi congruente și demonstrăm apoi (folosind criteriile de congruență pentru triunghiuri) că cele două triunghiuri sunt congruente.

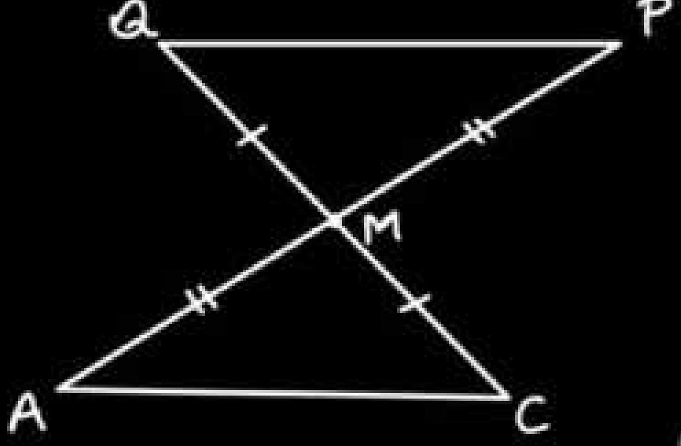
În consecință, laturile(segmentele)/unghiurile respective vor fi și ele respectiv congruente.

Obs. Dacă două triunghiuri sunt congruente atunci laturilor congruente li se opun unghiuri congruente și unghiurilor congruente li se opun laturi congruente.

Exemplu:

În figura de mai jos, segmentele [AP] și [CQ] au același mijloc (punctul M).

Demonstrați că [AC]≡[QC].



Ipoteză:

$M = \text{mij}[AP]$

$M = \text{mij}[CQ]$

Concluzie:

$[AC] \equiv [QP]$

Demonstrație:

$M = \text{mij}[AP] \Rightarrow AM = MP$

$M = \text{mij}[CQ] \Rightarrow CM = MQ$

$$\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[MP]\ (L)\\ \sphericalangle AMC\equiv\sphericalangle PMQ\ (U\text{ - opuse la vârf})\\ [CM]\equiv[MQ]\ (L)\end{array}\right\}\xRightarrow{L.U.L}\Delta AMC\equiv\Delta PMQ$$

$$\Delta AMC \equiv \Delta PMQ \overset{def}{\Rightarrow} [AC]\equiv[QP] \ \square$$

Obs.

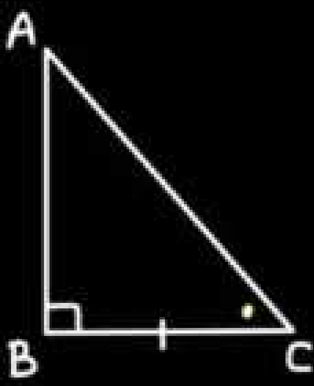
Din $\Delta AMC \equiv \Delta PMQ$ obținem și faptul că $\sphericalangle PQM \equiv \sphericalangle MCA$ și $\sphericalangle QMP \equiv \sphericalangle MAC$, deci $AC \parallel QP$ (de ce?).

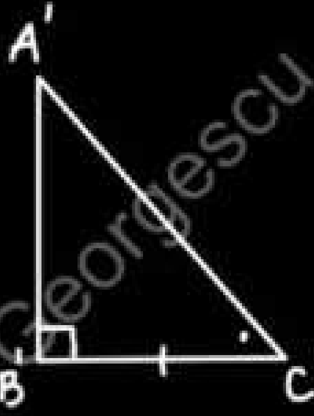
Cazurile de congruență pentru triunghiurile dreptunghice

Condiții necesare și suficiente ca două triunghiuri dreptunghice să fie congruente.

ⓘ Cazul C.U. (catetă-unghi)

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au o catetă și un unghi ascuțit respectiv congruente.

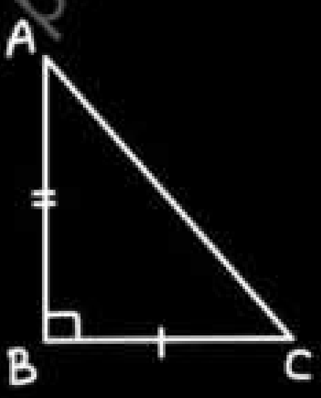


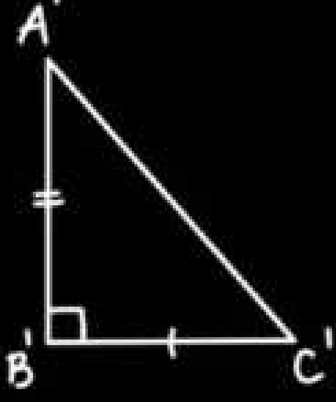


$$\left.\begin{array}{l}[BC]\equiv[B'C']\ (c)\\ \sphericalangle C\equiv\sphericalangle C'\ (u)\end{array}\right\}\overset{C.U.}{\Longrightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$$

(ii) Cazul C.C. (catetă-catetă)

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au catetele respectiv congruente.

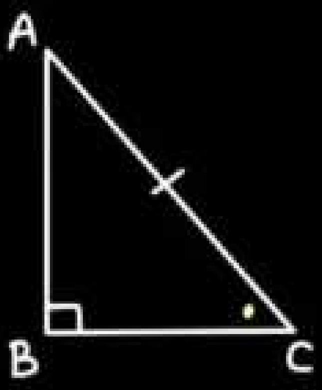


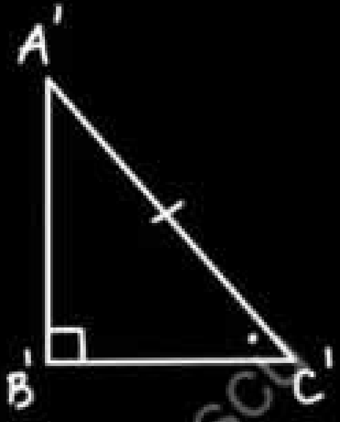


$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A'B']\ (c)\\ [BC]\equiv[B'C']\ (c)\end{array}\right\}\overset{C.C.}{\Longrightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$$

iii) Cazul I.U. (ipotenuză-unghi)

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit respectiv congruente.

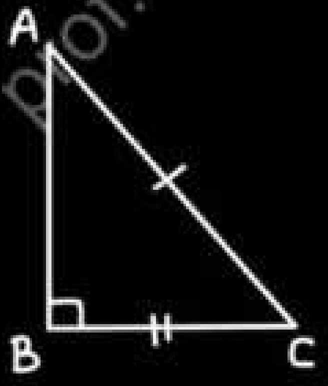


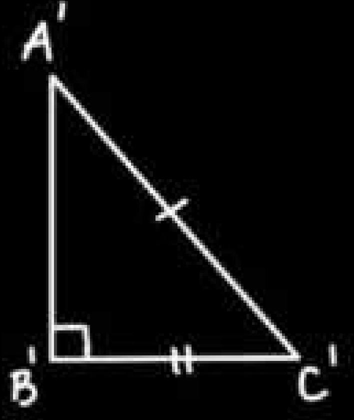


$$\left.\begin{array}{l}[AC]\equiv[A'C']\ (I)\\ \sphericalangle C\equiv\sphericalangle C'\ (u)\end{array}\right\}\overset{I.U.}{\Longrightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$$

iv) Cazul I.C. (ipotenuză-catetă)

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente.





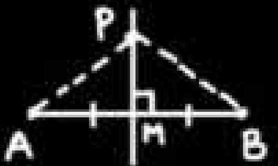
$$\left.\begin{array}{l}[AC]\equiv[A'C']\ (I)\\ [BC]\equiv[B'C']\ (c)\end{array}\right\}\overset{I.C.}{\Longrightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$$

Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment

(*)
Teoremă. Orice punct de pe mediatoarea unui segment se află la egală distanță de extremitățile segmentului.

$$\left.\begin{array}{l} m \text{ mediatoarea lui } [AB] \\ P \in m \end{array}\right\} \Rightarrow PA = PB$$

Dem. Se utilizează criteriul C.C. (exercițiu)



Reciproc,

(**)
Teoremă. Dacă un punct din plan se află la egală distanță de capetele unui segment, atunci acel punct se află pe mediatoarea segmentului respectiv.

$$\left.\begin{array}{l} P \in \mathcal{P}(\text{plan}) \\ [PA] \equiv [PB] \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \text{mediatoarei lui } [AB].$$

Dem.

Se construieste $PM \perp AB$, unde $M \in [AB]$ și se folosește cazul de congruență I.C. (exercițiu)

Consecință. Locul geometric al tuturor punctelor din plan egal distanță de capetele unui segment reprezintă mediatoarea segmentului respectiv.

Dem. Reiese imediat din (*) și (**).

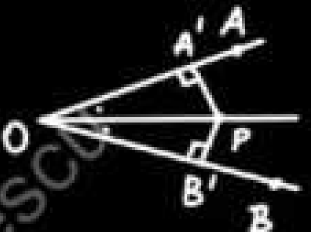
Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi

(*)

Teoremă. Orice punct de pe bisectoarea unui unghi se află la egală distanță de laturile unghiului.

$$\left.\begin{array}{l} b\text{ - bisectoarea } \measuredangle AOB \\ P \in b \end{array}\right\} \Rightarrow dist(P, OA) = dist(P, OB)$$

Dem. Se utilizează criteriul I.U. (exercițiu)



Reciproc,

(**)

Teoremă. Dacă un punct din plan se află la egală distanță de laturile unui unghi, atunci acel punct se află pe bisectoarea unghiului respectiv.

$$\left.\begin{array}{l} P \in \mathcal{P}\,(plan) \\ dist(P, OA) = dist(P, OB) \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \text{bisectoarei } \measuredangle AOB$$

Dem.

Se utilizează cazul de congruență C.U. (exercițiu).

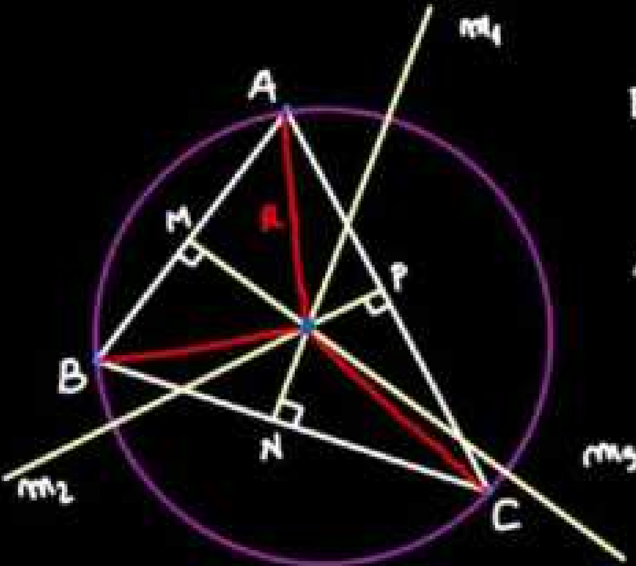
Consecință. Locul geometric al tuturor punctelor din plan la egală distanță de laturile unui unghi reprezintă bisectoarea unghiului respectiv.

Dem. Reiese imediat din (*) și (**).

Linii importante în triunghi

i) Mediatoarele laturilor unui triunghi.

Teoremă. Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente, punctul lor de intersecție se notează cu O și reprezintă centrul cercului circumscris triunghiului respectiv.



m_1, m_2, m_3 mediatoarele laturilor BC, AC, AB.

$m_1 \cap m_2 \cap m_3 \overset{not}{=} \{O\}$

O s.n. centrul cercului circumscris ΔABC.

Dem.

$$\left.\begin{array}{l} O \in m_1 \Rightarrow OB = OC \\ O \in m_2 \Rightarrow OC = OA \end{array}\right\} \Rightarrow OB = OA,$$

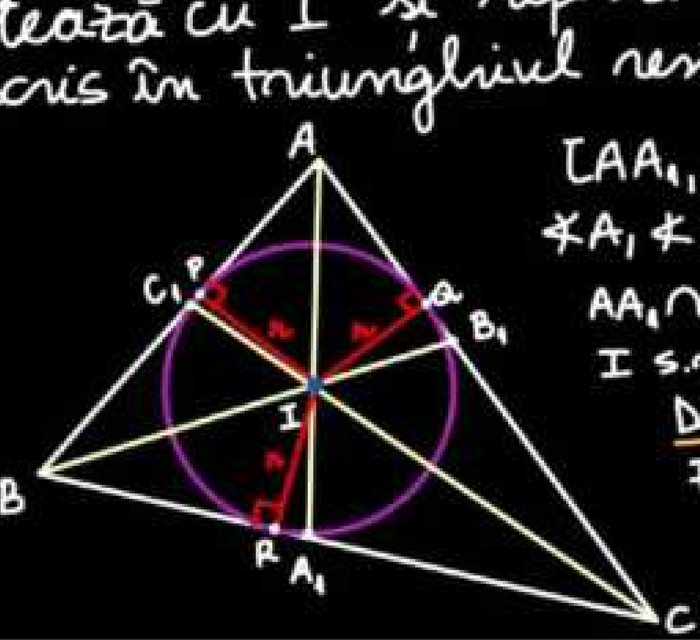
deci $O \in m_3$. □

$OA = OB = OC$ reprezintă raza cercului circumscris (R)

Studiați unde se află centrul cercului circumscris în cazul unui triunghi dreptunghic (exercițiu).

ii) Bisectoarele unghiurilor unui triunghi

Teoremă. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente, punctul lor de intersecție se notează cu I și reprezintă centrul cercului înscris în triunghiul respectiv.



$[AA_1, [BB_1, [CC_1$ sunt bisectoarele $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$.

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \overset{not}{=} \{I\}$

I s.n. centrul cercului înscris în ΔABC

Dem.

Fie $OR \perp BC, R \in [BC]$

$OQ \perp AC, Q \in [AC]$

$OP \perp AB, P \in [AB$.

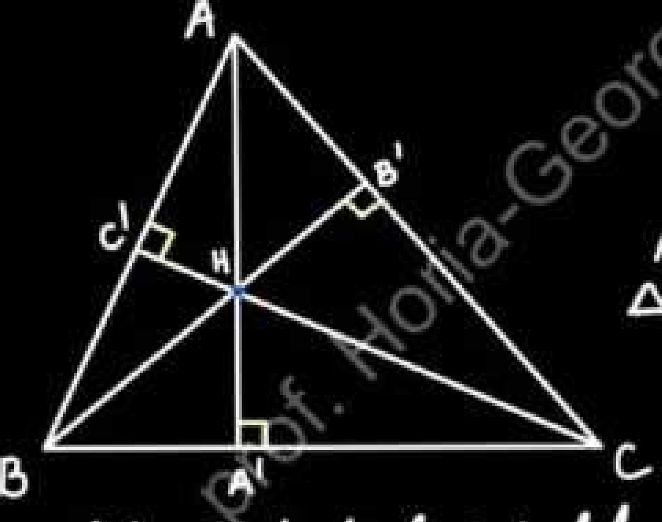
$$\left.\begin{array}{l} I\in AA_1 \Rightarrow IP=IQ \\ I\in BB_1 \Rightarrow IP=IR \end{array}\right\} \Rightarrow IQ=IR, \text{ deci } I\in CC_1. \ \square$$

$OP=OR=OQ$ reprezintă raza cercului înscris în ΔABC și se notează cu r.

(iii) Înălțimile unui triunghi

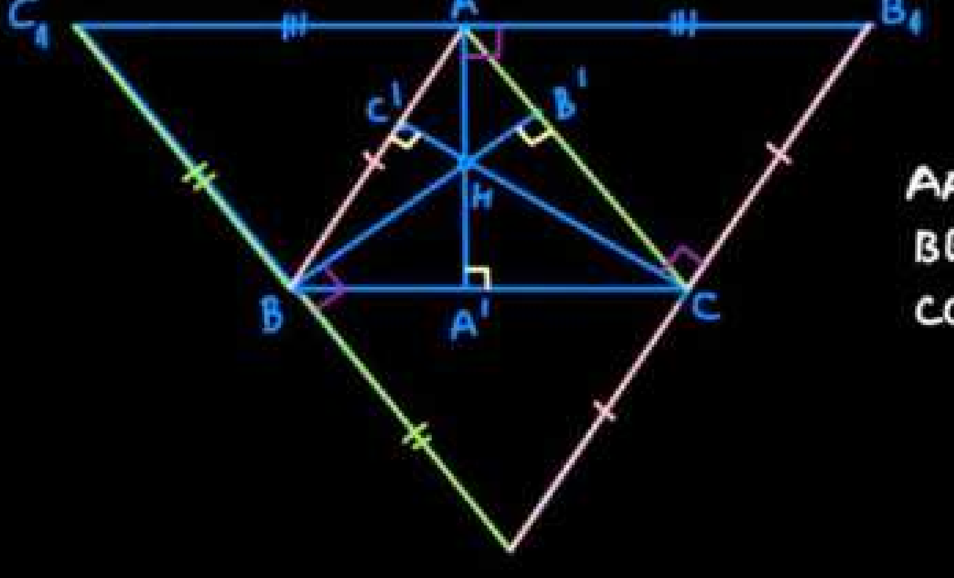
Def. Înălțimea unui triunghi reprezintă segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei duse din vârf pe latura opusă („perpendiculara din vârf pe latura opusă").

Teoremă. Cele trei înălțimi ale unui triunghi sunt concurente, punctul de intersecție se notează cu H și s.n. ortocentrul triunghiului.



$AA' \perp BC$, $A' \in BC$
$BB' \perp AC$, $B' \in AC$, adică
$CC' \perp AB$, $C' \in AB$
AA', BB', CC' sunt înălțimile ΔABC
$AA' \cap BB' \cap CC' = \{H\}$
H s.n. ortocentrul ΔABC

Dem. (după studiul paralelogramului)



$AA' \perp BC$, $A' \in BC$
$BB' \perp AC$, $B' \in AC$
$CC' \perp AB$, $C' \in AB$

Construim paralele la laturile triunghiului care să treacă prin vârfurile triunghiului.

Acestea se intersectează în A_1, B_1 și C_1 (conform figurii).

Din congruența laturilor paralelogramelor obținute (de exemplu $ACBC_1$ și ACA_1B) rezultă că $B = \text{mij}[C_1A_1]$, $C = \text{mij}[B_1A_1]$ și $A = \text{mij}[C_1B_1]$.

$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp BC \\ C_1B_1 \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \perp C_1B_1.$$

Analog, $BB' \perp A_1C_1$ și $CC' \perp A_1B_1$.

Observăm că înălțimile ΔABC sunt mediatoarele $\Delta A_1B_1C_1$, deci sunt concurente. □

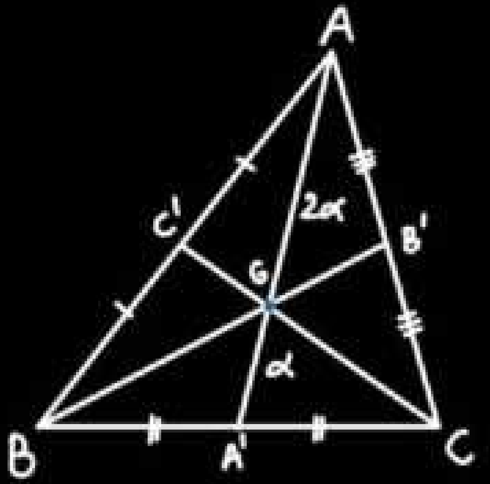
Obs În cazul unui triunghi obtuzunghic, o înălțime poate să cadă pe prelungirea uneia dintre laturi , iar în cazul unui triunghi dreptunghic, H coincide cu vârful unghiului drept. (exercițiu: desen)

(iv) Medianele unui triunghi

Def. Mediana unui triunghi este un segment determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.

Teoremă. În orice triunghi, medianele sunt concurente. Punctul în care acestea se intersectează se numește centrul de greutate al triunghiului și se notează cu G.

În plus, centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la o treime de bază și două treimi de vârf.



AA', BB', CC' – mediane

$AA' \cap BB' \cap CC' = \{G\}$

$A'G = \frac{1}{3} \cdot AA'$; $AG = \frac{2}{3} \cdot AA'$;

$B'G = \frac{1}{3} \cdot BB'$; $BG = \frac{2}{3} \cdot BB'$;

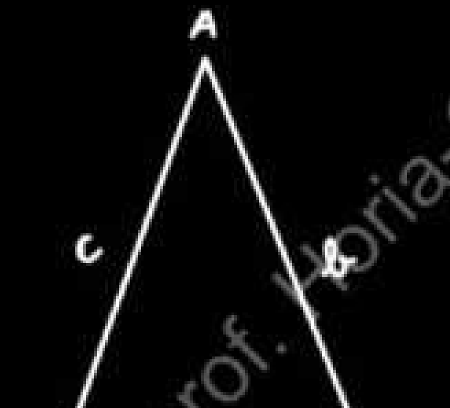
$C'G = \frac{1}{3} \cdot CC'$; $CG = \frac{2}{3} \cdot CC'$;

Dem. (vezi „Paralelogramul")

Triunghiul isoscel. Proprietăți.

Def. Triunghiul care are două laturi congruente s.n. triunghi isoscel.

Obs. Latura care nu este congruentă cu celelalte două laturi s.n. bază.



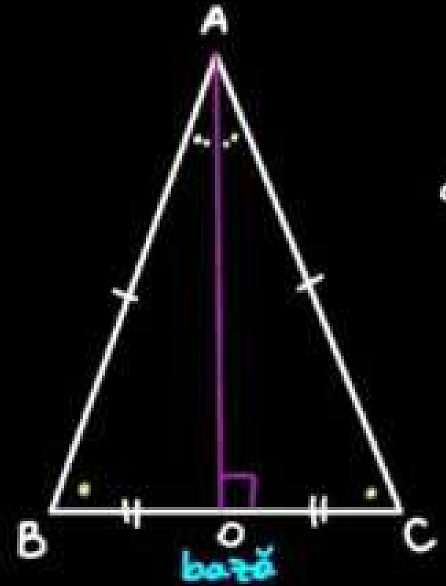
$[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel

$(c = b)$

a s.n. bază

Prop. Triunghiul isoscel are unghiurile alăturate bazei congruente.

Prop. În orice triunghi isoscel, înălțimea corespunzătoare bazei este bisectoare, mediană, mediatoare și axă de simetrie. Altfel spus, liniile importante corespunzătoare bazei triunghiului isoscel coincid.



AO înălțime <=> AO mediană <=> AO mediatoare <=> AO bisectoare.

Prop. În orice triunghi isoscel:

i) liniile mijlocii paralele cu laturile congruente sunt congruente;

ii) bisectoarele alăturate bazei sunt congruente

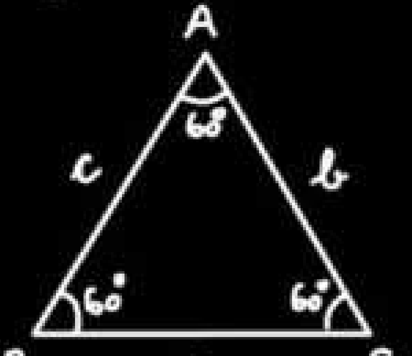
iii) înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente

iv) medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

Dem. (exercițiu)

Triunghiul echilateral. Proprietăți.

Def. Triunghiul care are toate laturile congruente s.n. triunghi echilateral.



$a = b = c \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral

Prop. Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente și fiecare are măsura de 60°.

Prop. În triunghiul echilateral toate liniile importante care pornesc din același vârf coincid

Prop. În triunghiul echilateral toate liniile mijlocii sunt congruente.

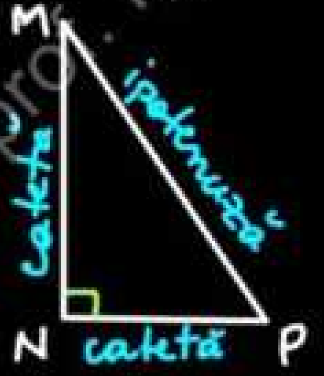
Dem. (exercițiu)

Prop. Dacă un triunghi isoscel are un unghi de 60°, atunci triunghiul este echilateral.

Dem. (exercițiu pe cazuri)

Teoreme în triunghiul dreptunghic

Def. Triunghiul care are un unghi drept s.n. triunghi dreptunghic.



$\sphericalangle MNP = 90°$

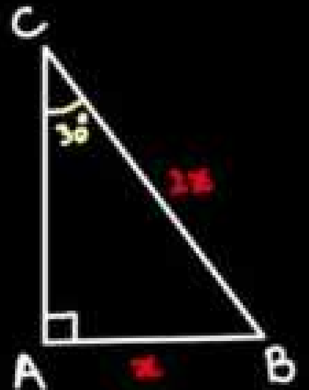
[MN] și [NP] sunt catetele

[MP] este ipotenuza

Def. Într-un triunghi dreptunghic laturile care formează unghiul drept se numesc catete, iar latura care se opune unghiului drept s.n. ipotenuză.

Teorema unghiului de 30° (T∢30°)

Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 30°, atunci cateta care se opune acelui unghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.



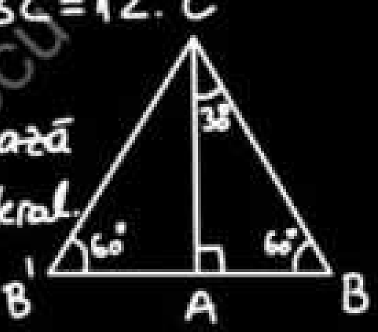
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ dreptunghic } (\sphericalangle A=90^\circ)\\ \sphericalangle C=30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow AB=\frac{BC}{2}$$

Exemple:

i) $BC=4$ și $\sphericalangle C=30^\circ \Rightarrow AB=2$;

ii) $AB=6$ și $\sphericalangle C=30^\circ \Rightarrow BC=12$.

Dem. Se construiește $B'=\text{sim}_A B$ și se demonstrează că $\Delta CAB' \equiv \Delta CAB$ (C.C.), deci $\Delta CB'B$ este echilateral.



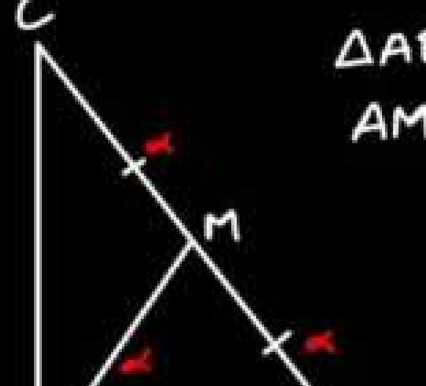
Reciproca teoremei unghiului de 30° (R.T.∢30°)

Dacă într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci cateta respectivă se opune unui unghi de 30°.

Dem. Tehnică similară ca în cazul teoremei directe. (exercițiu)

Teorema medianei din unghiul drept

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei din unghiul drept este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.



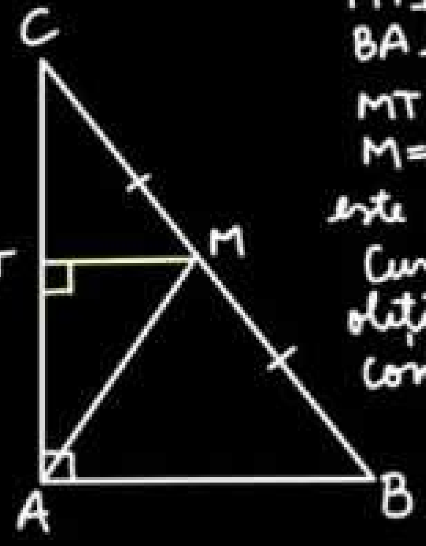
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ dreptunghic } (\sphericalangle A=90^\circ)\\ AM \text{ mediana}\end{array}\right\} \Rightarrow AM=\frac{MB}{2}.$$

Obs. $AM=CM=MB$.

Exemplu:

$BC=8 \Rightarrow CM=MB=AM=4$.

Dem.



Construim $MT \perp AC$.

$$\left.\begin{array}{l} MT \perp AC \\ BA \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow MT \parallel BA$$

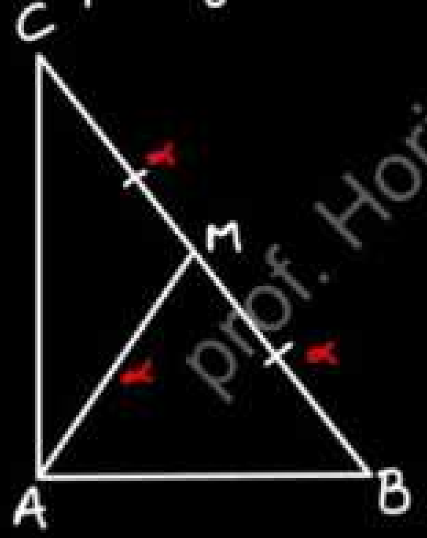
$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel BA \\ M = \text{mij } [BC] \end{array}\right\} \Rightarrow MT \text{ l.m. în } \Delta CAB\text{, deci } MT$$

este și mediană în ΔCMA.

Cum MT este înălțime și mediană în ΔCMA obținem că ΔCMA este isoscel, de unde reiese concluzia. □

Reciproca teoremei medianei din unghiul drept

Dacă mediana unui triunghi este egală cu jumătate din latura pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic.



$$MA = CM = MB \Rightarrow \sphericalangle CAB = 90^\circ.$$

Dem.

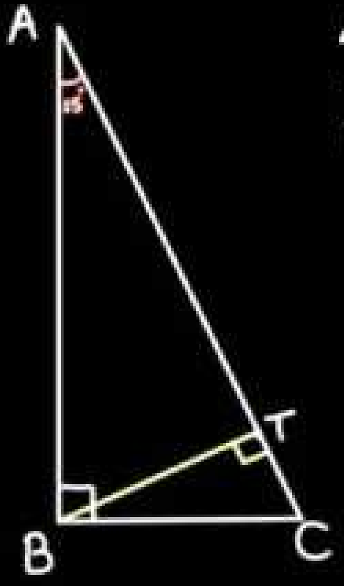
Deoarece $MA = CM = MB$ rezultă că punctele A, C, B sunt conciclice (se află pe un cerc de centru M).

$$\left.\begin{array}{l} CB \text{ diametru} \\ \sphericalangle CAB \text{ (unghi înscris în cerc)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CAB = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2},$$

deci $\sphericalangle CAB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. □

Teorema unghiului de 15° ($T\sphericalangle 15^\circ$)

Dacă un triunghi are un unghi de 15°, atunci înălțimea din unghiul drept este egală cu un sfert din ipotenuză.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ dreptunghic } (\sphericalangle B=90^\circ)\\ \sphericalangle A=15^\circ\\ BT\perp AC,\ T\in[AC]\ (BT \text{ înălțime})\end{array}\right\} \Rightarrow BT=\frac{AC}{4}.$$

Dem.

Construim mediana BM.

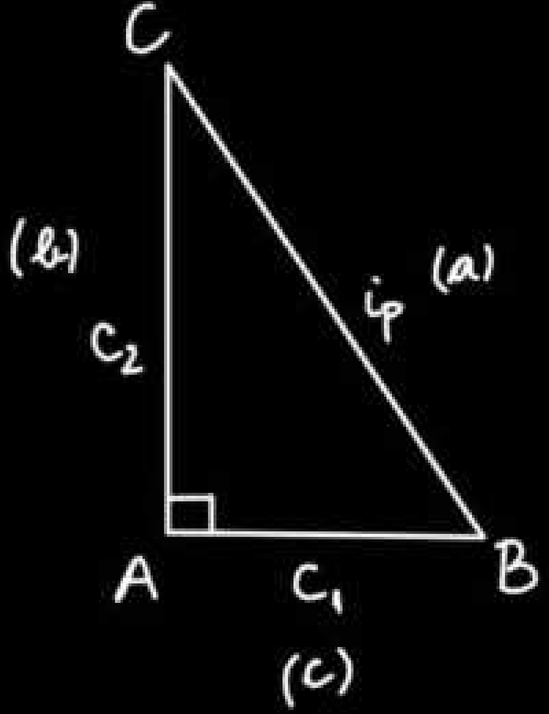
Din T. medianei avem că $BM = AM = MC$, deci ΔAMB este isoscel.

Se obține că $\sphericalangle BMT=30^\circ$ și din $T\sphericalangle 30^\circ$ rezultă că

$$BT=\frac{BM}{2}=\frac{\frac{AC}{2}}{2}=\frac{AC}{4}. \quad \square$$

Teorema lui Pitagora

Def. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



ΔABC dreptunghic ($\measuredangle A = 90^\circ$)

$$\overset{T.P.}{\Longrightarrow} AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\left(\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ c_1^2 + c_2^2 = ip^2 \end{array} \right)$$

Def. Un triplet de forma (x, y, z) unde $x, y, z \in \mathbb{N}$ s.n. tripled pitagoreic dacă $x^2 + y^2 = z^2$.

Exemple: $(3,4,5)$; $(6,8,10)$; $(15,20,25)$.

Prop. Există o infinitate de triplete (numere) pitagoreice.

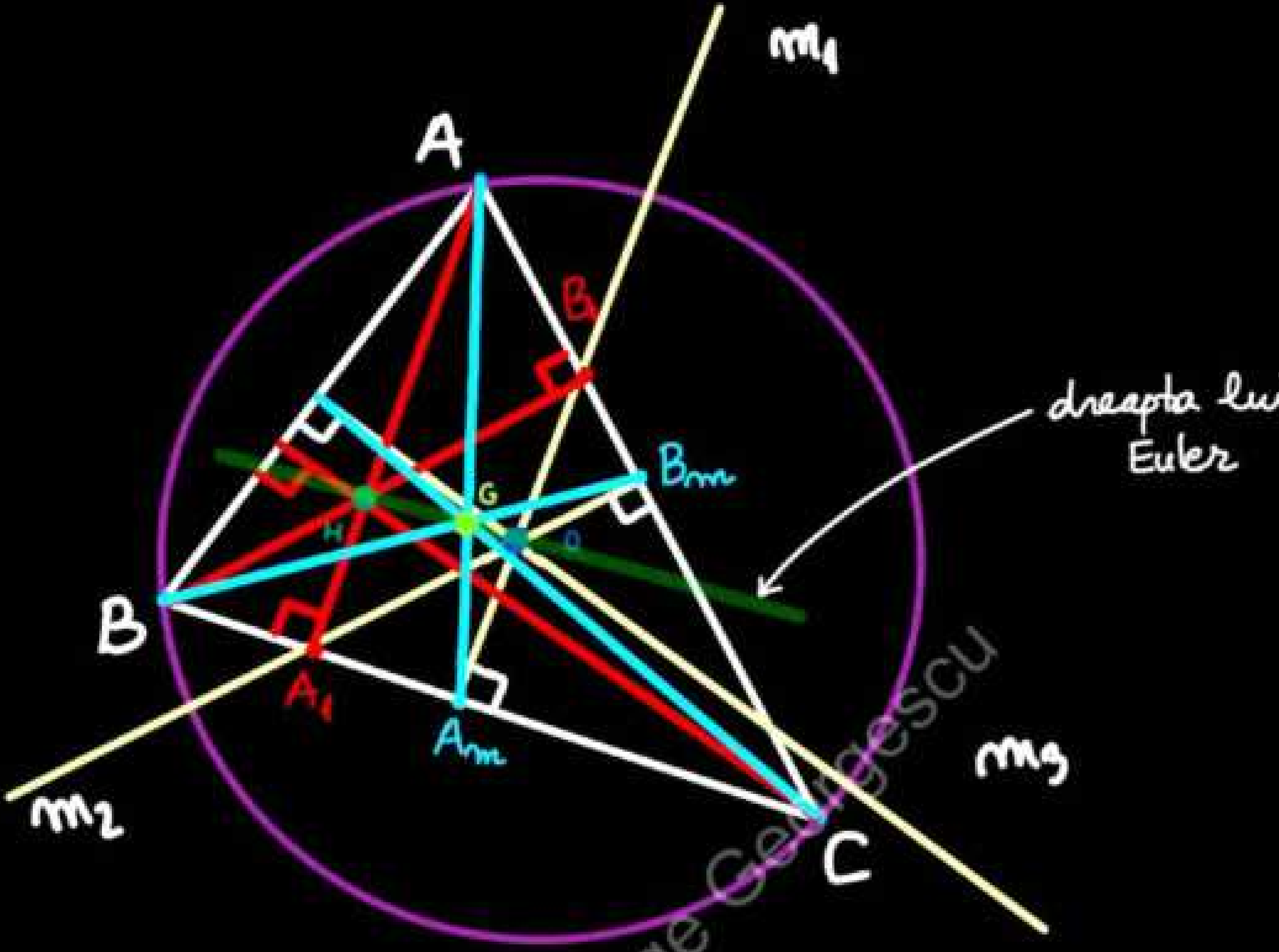
Justificare. $(3K, 4K, 5K)$ este un triplet pitagoreic pentru orice $K \in \mathbb{N}^*$.

Dreapta lui Euler

În orice triunghi, centrul cercului circumscris (O), ortocentru (H) și centrul de greutate (G) sunt coliniare sau coincid (în cazul triunghiului echilateral).

Dreapta care trece prin aceste trei puncte s.n. dreapta lui Euler.

Dacă triunghiul nu este echilateral, avem relația $HG = 2OG$.



Dem.

Dacă △ABC este isoscel, atunci cele trei puncte se află pe o mediană.

Tratăm cazul triunghiului oarecare.

Fie A_m = mij [BC], B_m = mij [AC], $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in [BC]$ și $BB_1 \perp AC$, $B_1 \in [AC]$.

$$\left.\begin{array}{l} OB_m \parallel BH \\ OA_m \parallel AH \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle HAB \sim \triangle OA_mB_m$$

Folosind Teorema fundamentală a asemănării rezultă că:

$\frac{HA}{OA_m} = \frac{HB}{OB_m} = \frac{AB}{A_mB_m} = 2$, deoarece A_mB_m este linie mijlocie în △ABC.

Așadar,

$$\frac{HA}{OA_m}=2.$$

Cum $\frac{AG}{GA_m}=2$ rezultă că $\Delta OGA_m \sim \Delta HGA$ (cazul l.u.l), deci $\sphericalangle OGA_m \equiv \sphericalangle AGH$.

Din Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf rezultă că O, G și H sunt coliniare. □

Cele trei probleme ale Antichității

Ⓘ Cvadratura (cuadratura cercului).

Construiți un pătrat care să aibă aceeași arie ca cea a unui cerc de rază dată folosind doar rigla și compasul (instrumentele pe care le aveau geometrii din antichitate).

Soluție: 1882 - Linderman-Weierstrass

Este imposibilă această construcție doar cu rigla și compasul deoarece π este transcendent.

Construcții aproximative: Ramanujan

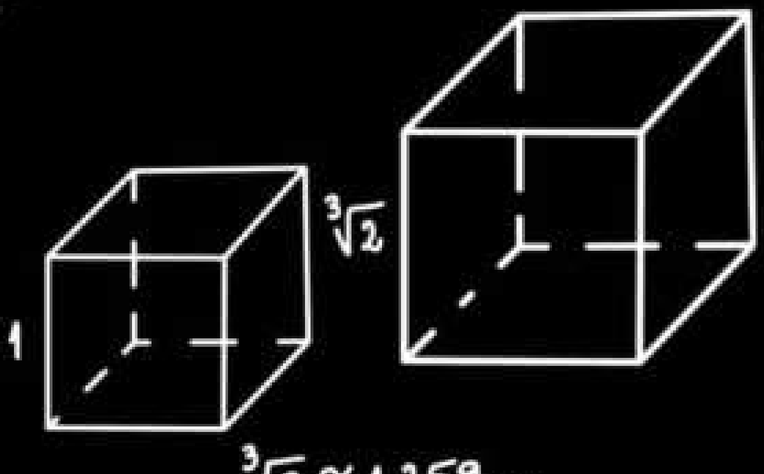
(II) Dublarea cubului

Se dă un cub de muchie l.
Construiți cu rigla și compasul un segment de lungime x a.î. cubul de muchie x să aibă volumul dublu față de cubul inițial.

<u>Obs.</u> Obținem ecuația $x^3=2a^3$ cu soluția $x=a\sqrt[3]{2}$.
În cazul particular $a=1$ se cere construirea segmentului de lungime $\sqrt[3]{2}$.

Soluție: C.F. Gauss și E. Galois,
Wantzel (1837)

$\sqrt[3]{2}$ nu poate fi construit cu rigla și compasul.



$\sqrt[3]{2} \simeq 1,259...$

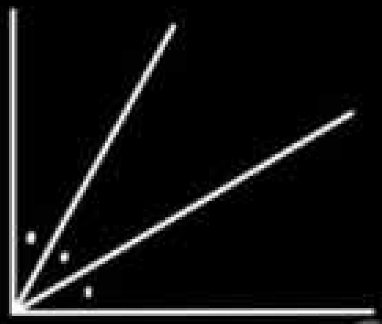
(III) Trisecția unghiului

Împărțiți un unghi în trei părți egale folosind doar rigla și compasul.

Soluție:

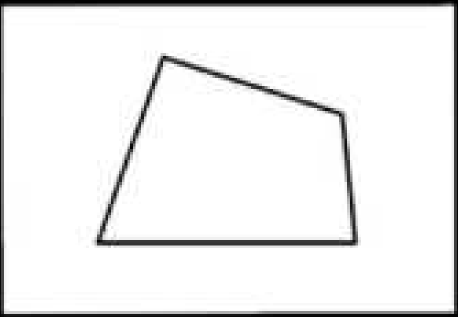
Construcții aproximative: Arhimede, Pappus.

Galois, Descartes: trisecția nu este posibilă



Horia-George Georgescu

PATRULATERE
PERIMETRE ȘI ARII



PATRULATERUL CONVEX
PARALELOGRAMUL

Def. Poligonul cu patru laturi s.n. patrulater.

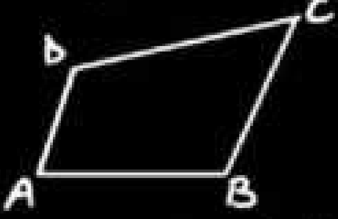


fig.1

vârfuri : A, B, C, D

laturi : [AB], [BC], [CD], [DA].

Def. Un patrulater este convex dacă prelungind oricare dintre cele patru laturi, toate celelalte laturi sunt situate de aceeași parte a ei.

Exemplu. (fig.1).

Def. Un patrulater s.n. concav dacă nu este convex. (fig.2)

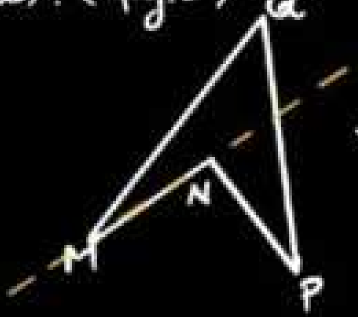


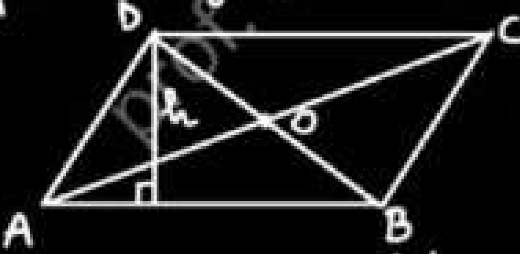
fig.2

cave (eng.): peșteră; pivniță.

cave (fra.)

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°. Dem. (Exercițiu)

Def. Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele (două câte două) s.n. paralelogram. (fig.3)



$AB \parallel DC$ și $AD \parallel BC$

fig.3 (paralelogramul ABCD)

Proprietățile paralelogramului (fig.3)

În orice paralelogram:

i) laturile opuse sunt congruente: $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$;

ii) unghiurile opuse sunt congruente: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$;

iii) unghiurile alăturate sînt suplementare:
ex. $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$.

iv) diagonalele se înjumătățesc: $[AO] \equiv [OC]$, $[BO] \equiv [OD]$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

Exercițiu (Demonstrați proprietățile i) - iv))

Dacă într-un patrulater convex este adevărată cel puțin una dintre proprietățile paralelogramului atunci patrulaterul respectiv este paralelogram.

Propoziție. Dacă un patrulater convex are o pereche de laturi paralele și congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dem. (Exercițiu)

Obs. Paralelogramul nu are axe de simetrie.

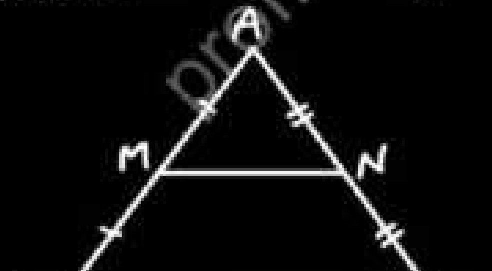
Def. Distanța dintre două laturi opuse ale unui paralelogram s.n. înălțimea paralelogramului.

Concepte legate de studiul paralelogramului

Linia mijlocie în triunghi

Proprietatea centrului de greutate al unui triunghi

Def. Linia mijlocie în triunghi reprezintă segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale triunghiului.

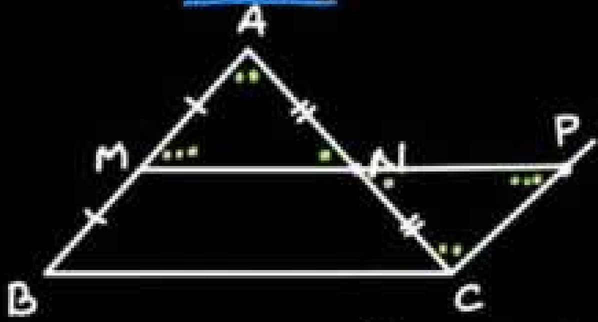


$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ M = \text{mij}[AB] \\ N = \text{mij}[AC]\end{array}\right\} \Rightarrow MN \text{ este linie mijlocie (l.m.) în } \Delta ABC.$$

Teoremă.

Linia mijlocie în orice triunghi este paralelă cu a treia latură a triunghiului și este egală cu jumătate din aceasta.

Dem.



MN – l.m. în ΔABC

Construim paralela prin C la dreapta AB și punctul în care această paralelă intersectează dreapta MN îl vom nota cu P.

Se arată că $\Delta AMN \equiv \Delta CPN$ (exercițiu), deci $CP = AM = MB$.

$\left.\begin{array}{l} CP \parallel BM \\ CP = BM \end{array}\right\} \Rightarrow$ BCPM paralelogram $\Rightarrow MN \parallel BC$.

Rămâne de arătat că $MN = \frac{BC}{2}$.

$\Delta AMN \equiv \Delta CPN \overset{def}{\Rightarrow} MN = NP \Rightarrow MN = \frac{MP}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} MN = \frac{MP}{2} \\ MP = BC \text{ (deoarece BCPM este paralelogram)} \end{array}\right\} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$,

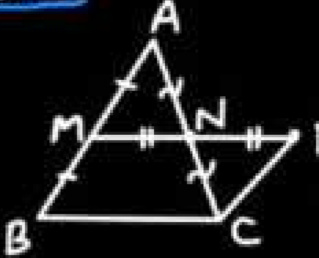
ceea ce încheie demonstrația. □

Teoremă. Dacă M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC și $MN \parallel BC$, unde $N \in BC$, atunci N este mijlocul laturii AC (i.e. MN este l.m. în ΔABC).

Altfel spus, dacă o dreaptă trece prin mijlocul unei laturi a unui triunghi și este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci ea trece și prin mijlocul celeilalte laturi.

Obs. Această teoremă reprezintă un caz particular al teoremei lui Thales care se studiază în capitolul „Asemănarea triunghiurilor".

Dem.



$MN \parallel BC$

$M = $ mij$[AB]$

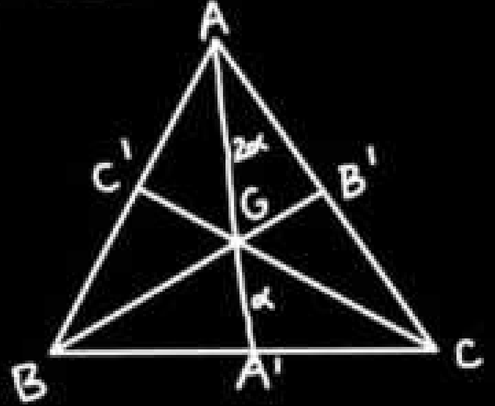
Construim paralela prin C la dreapta AB și punctul în care această paralelă intersectează dreapta MN îl vom nota cu P.

Se arată că $\Delta AMN \equiv \Delta CPN$ (exercițiu), deci $CP = AM = MB$.

$\left.\begin{array}{l} CP = AM \\ CP \parallel AM \end{array}\right\} \Rightarrow$ CPAM este paralelogram $\Rightarrow AN = NC$, deci $N = $ mij$[AC]$. □

Teoremă. În orice triunghi, medianele sunt concurente. Punctul în care acestea se intersectează se numește centrul de greutate al triunghiului și se notează cu G.

În plus, centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la o treime de bază și două treimi de vârf.



AA', BB', CC' - mediane

$AA' \cap BB' \cap CC' = \{G\}$

$A'G = \frac{1}{3} \cdot AA'$; $AG = \frac{2}{3} \cdot AA'$;

$B'G = \frac{1}{3} \cdot BB'$; $BG = \frac{2}{3} \cdot BB'$;

$C'G = \frac{1}{3} \cdot CC'$; $CG = \frac{2}{3} \cdot CC'$;

Dem.

AA', BB', CC' - mediane

Fie $\{G\} = BB' \cap CC'$, $M = \text{mij}[BG]$ și $N = \text{mij}[CG]$.

Așadar, $C'B'$ l.m. în ΔABC și MN l.m. în ΔGBC.

Vreau să arăt că și AA' trece prin G.

$$\left.\begin{array}{l} C'B' \text{ l.m. în } \Delta ABC \\ MN \text{ l.m. în } \Delta ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C'B' \parallel BC \\ MN \parallel BC \\ C'B' = \frac{BC}{2} \\ MN = \frac{BC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C'B' \parallel MN \Rightarrow$$

$MNB'C'$ este paralelogram

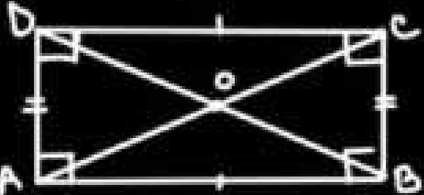
Prin urmare, $BM = MG = GB'$, deci $BG = \frac{2}{3} \cdot BB'$.

Similar, considerăm $\{G'\} = BB' \cap AA'$ și ajungem la $BG' = \frac{2}{3} BB'$, deci G și G' coincid.

În concluzie, $AA' \cap BB' \cap CC' = \{G\}$.

Dreptunghiul

Def. Paralelogramul cu un unghi drept s.n. dreptunghi.



ABCD dreptunghi
$AB = DC \overset{not}{=} L$ (lungimea)
$AD = BC \overset{not}{=} l$ (lățimea)

Obs. Dreptunghiul este un paralelogram particular, deci are toate proprietățile paralelogramului.

Proprietăți specifice dreptunghiului

ⓘ Diagonalele sunt congruente : $AC = BD$

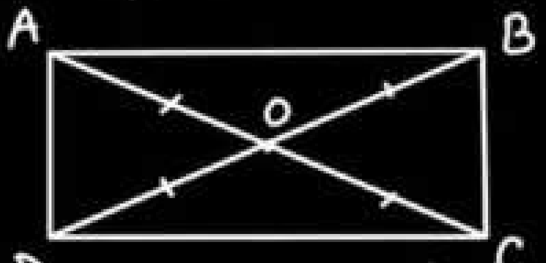
(ii) Toate unghiurile sunt congruente și măsura fiecărui unghi este de 90° (i.e. fiecare unghi este drept)

Dem. (exercițiu)

Teoremă. Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă diagonalele sunt congruente.

Dem.

„=>"



ABCD paralelogram
$AC = DB$.
Vreau să arăt că ABCD este dreptunghi.

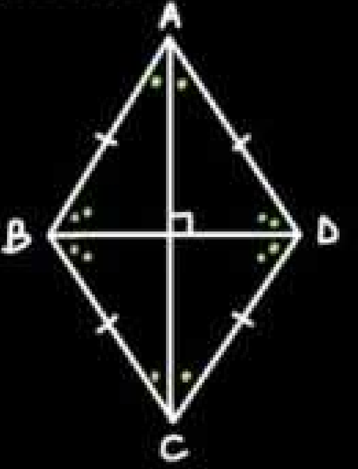
Cum $O = \text{mij}\,[AC]$ (deoarece ABCD este paralelogram), rezultă că BO este mediană în ΔABC.

$$BO = \frac{AC}{2} \xRightarrow[\text{teoremei medianei în triunghiul dreptunghic}]{\text{Reciproca}} \sphericalangle ABC = 90°,$$ deci ABCD este dreptunghi

„<=" exercițiu.

Rombul

Def. Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente s.n. romb.



rombul ABCD

Obs. Rombul este un paralelogram particular, deci are toate proprietățile paralelogramului.

Proprietăți specifice rombului

ⓘ Toate laturile sunt congruente : $AB = BC = CD = DA$

ⓘⓘ Diagonalele sunt perpendiculare : $AC \perp BD$

ⓘⓘⓘ Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor rombului:

$[AC = \text{bis } \sphericalangle BAD$

$[CA = \text{bis } \sphericalangle BCD$

$[BD = \text{bis } \sphericalangle ABC$

$[DB = \text{bis } \sphericalangle ABC$

Dem. (exercițiu).

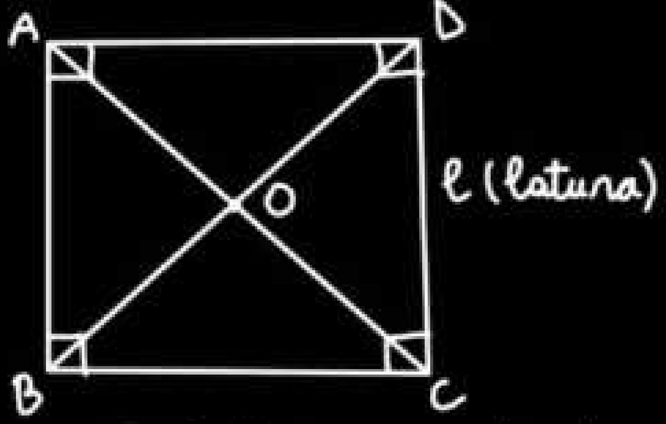
Prop. Dacă un paralelogram are cel puțin una dintre proprietățile specifice rombului, atunci paralelogramul respectiv este romb.

Dem. (exercițiu).

Pătratul

Def. I. Rombul cu un unghi drept s.n. pătrat.

Def. II. Dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente s.n. pătrat.



ABCD pătrat

Obs. Pătratul are toate proprietățile dreptunghiului și ale rombului.

Recapitulare:

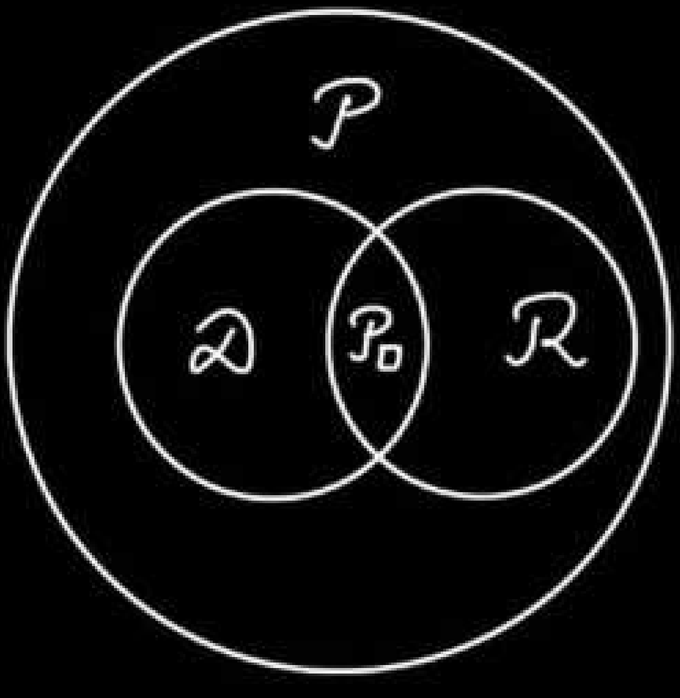
Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea tuturor paralelogramelor, cu $\mathcal{D}$ mulțimea tuturor dreptunghiurilor, cu $\mathcal{R}$ mulțimea tuturor rombuilor și cu $\mathcal{P}_\square$ mulțimea tuturor pătratelor.

Atunci:

$$\mathcal{P}_\square \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}_\square \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{P}$$

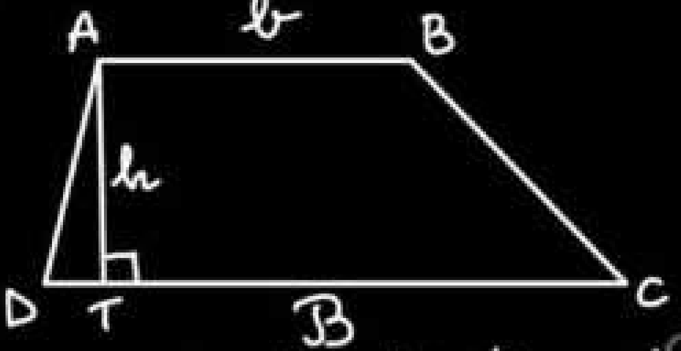
$$\mathcal{D} \cap \mathcal{R} = \mathcal{P}_\square$$



Trapezul

Def. Patrulaterul convex cu două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele s.n. trapez.

Obs. Dintre cele două laturi paralele, cea de lungime mai mare s.n. baza mare și se notează cu B, iar cealaltă s.n. baza mică și se notează cu b.



ABCD trapez

$AB \parallel DC$

$AD \nparallel BC$

$AT \perp DC$, $T \in DC$

$DC \overset{not}{=} B$; $AB \overset{not}{=} b$.

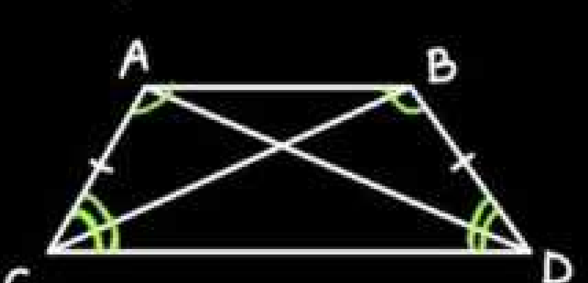
Def. Distanta dintre cele două laturi neparalele ale unui trapez s.n. înălțimea trapezului și se notează în general cu h.

Def. Trapezul cu un unghi de 90° s.n. trapez dreptunghic.

ABCD trapez dreptunghic

$AD \perp DC$; $AB \parallel DC$;

Def. Trapezul cu laturile neparalele congruente s.n. trapez isoscel.



ABCD trapez isoscel

$AC = BD$; $AC \nparallel BD$;

Proprietăți specifice trapezului isoscel

(i) Unghiurile alăturate unei baze sunt congruente: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$.

(ii) Diagonalele sunt congruente: $[AD] \equiv [BC]$.

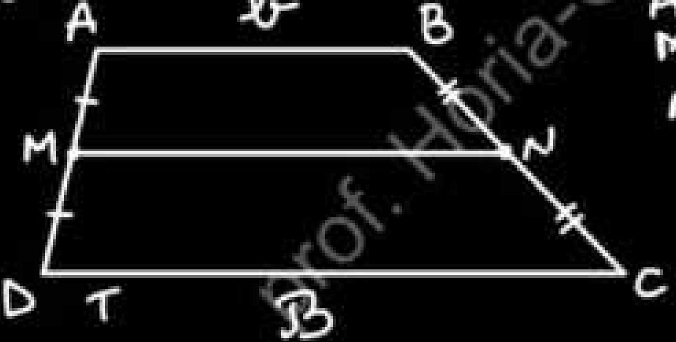
Dem. (exercițiu)

Prop. Dacă un trapez are cel puțin una dintre proprietățile trapezului isoscel, atunci acel trapez este isoscel.

Dem. (exercițiu)

Def. Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez s.n. linie mijlocie în trapez și se notează cu l.m.

Teoremă. Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu cele două baze și are lungimea egală cu semisuma bazelor (media aritmetică a bazelor)

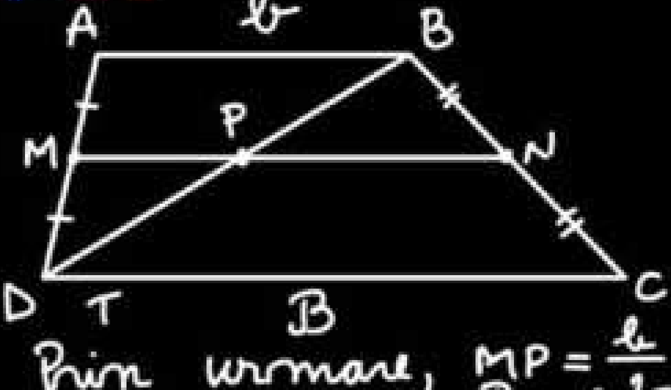


ABCD trapez

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mij}\,[AD] \\ N = \text{mij}\,[BC] \end{array}\right\} \Rightarrow MN \text{ este l.m. în trapezul } ABCD$$

$$\overset{T.}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ MN \parallel DC \\ MN = \text{l.m} = \dfrac{B+b}{2}. \end{array}$$

Dem.



Fie $\{P\} = DB \cap MN$.

$$\left.\begin{array}{l} N = \text{mij}[BC] \\ PN \parallel DC \end{array}\right\} \Rightarrow P = \text{mij}[DB],$$

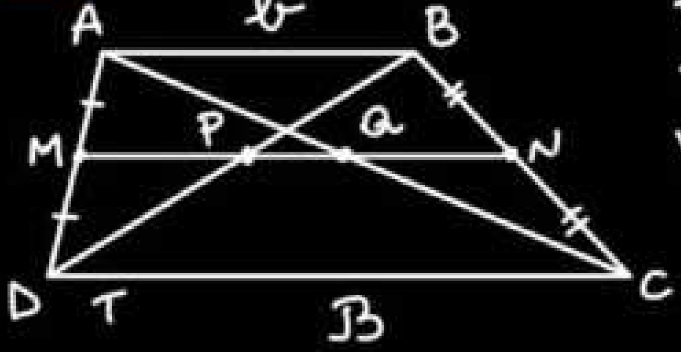
deci PN este l.m. în ΔBDC

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mij}[AD] \\ P = \text{mij}[DB] \end{array}\right\} \Rightarrow MP \text{ l.m. în } \Delta ADB$$

Prin urmare, $MP = \dfrac{b}{2}$ și $PN = \dfrac{B}{2}$, de unde $MN = MP + PN = \dfrac{b}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{b+B}{2}$, ceea ce încheie demonstrația □

Teoremă. Segmentul determinat de intersecțiile diagonalelor unui trapez cu l.m. a trapezului are lungimea egală cu $\frac{B-b}{2}$.

Dem.



MN l.m. în trapezul ABCD

$\{P\} = DB \cap MN$;

$\{Q\} = AC \cap MN$;

Vreau să demonstrez că

$$PQ = \frac{B-b}{2}.$$

$MN = MP + PQ + QN$;

Evident, MP este l.m. în $\triangle ADB$ și QN este l.m. în $\triangle ACB$. (exercițiu)

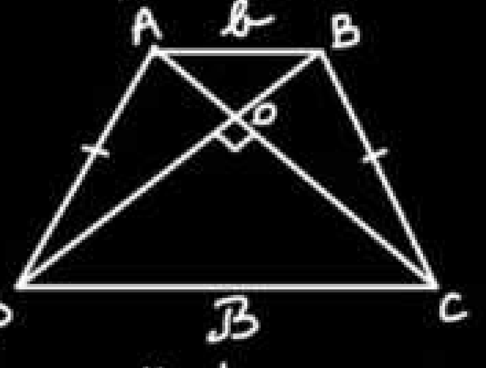
Așadar,

$$MN = MP + PQ + QN \Rightarrow \frac{B+b}{2} = \frac{b}{2} + PQ + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{B+b}{2} - b \Rightarrow PQ = \frac{B-b}{2}. \square$$

Obs. Segmentul PQ unește mijloacele celor două diagonale.

Def. Trapezul isoscel cu diagonalele perpendiculare s.n. trapez isoscel ortodiagonal.

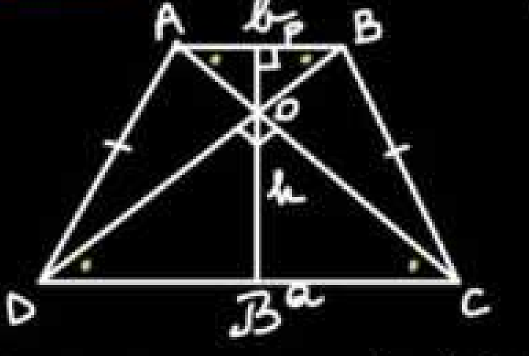


$$\left.\begin{array}{l}\text{ABCD trapez isoscel}\\ AC \perp DB\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD trapez isoscel ortodiagonal}$$

Teoremă. Lungimea înălțimii unui trapez isoscel ortodiagonal este egală cu media aritmetică a lungimilor bazelor (i.e. h = l.m.)

$$h = l.m. = \frac{B+b}{2}.$$

Dem.



Vreau să demonstrez că

$$h = PQ = \frac{B+b}{2}.$$

Se arată ușor că $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$ (exercițiu), deci $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO$, unde $\{O\} = DB \cap AC$. Prin urmare, ΔAOB este dreptunghic isoscel.

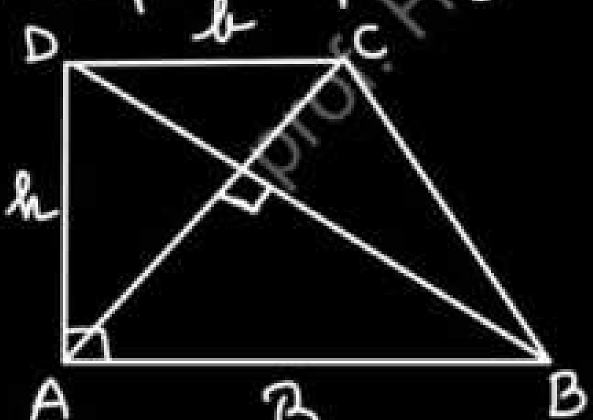
$$\left.\begin{array}{l} OP \perp AB,\ P \in AB \\ \Delta AOB \text{ dreptunghic isoscel} \end{array}\right\} \Rightarrow OP \text{ mediană din unghi drept în } \Delta AOB$$

$$\xRightarrow[\text{din unghi drept}]{\text{T. medianei}} OP = \frac{b}{2}.$$

Se arată apoi și că ΔDOC este dreptunghic isoscel (exercițiu), deci $OQ = \frac{B}{2}$, unde $OQ \perp DC$, $Q \in DC$.

În concluzie, $PQ = OP + OQ = \frac{b}{2} + \frac{B}{2} = \frac{B+b}{2}$ □.

Def. Trapezul dreptunghic cu diagonalele perpendiculare s.n. trapez dreptunghic ortodiagonal.

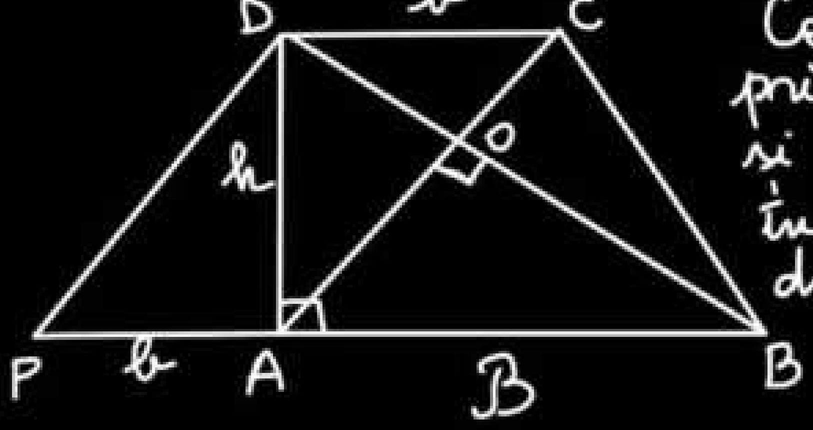


$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ trapez dreptunghic} \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ trapez dreptunghic ortodiagonal.}$$

Teoremă. Lungimea înălțimii unui trapez dreptunghic ortodiagonal este egală cu media geometrică a lungimilor celor două baze.

$$h = DA = \sqrt{B \cdot b}$$

Dem. (A se studia înainte Teorema înălțimii)



Construim o paralelă prin D la diagonala CA și notăm cu P punctul în care paralela intersectează dreapta AB.

$\{O\} = BD \cap AC$.

$\left.\begin{array}{l} PA \parallel DC \\ DP \parallel CA \end{array}\right\} \Rightarrow$ PACD este paralelogram, deci $PA = DC = b$.

$\left.\begin{array}{l} CA \parallel DP \\ BO \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BO \perp AD$, deci $\sphericalangle PDB = 90^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle PDB = 90^\circ \\ DA \perp PB \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{T. înălțimii I}} DA^2 = PA \cdot AB$, deci $h = \sqrt{B \cdot b}$,

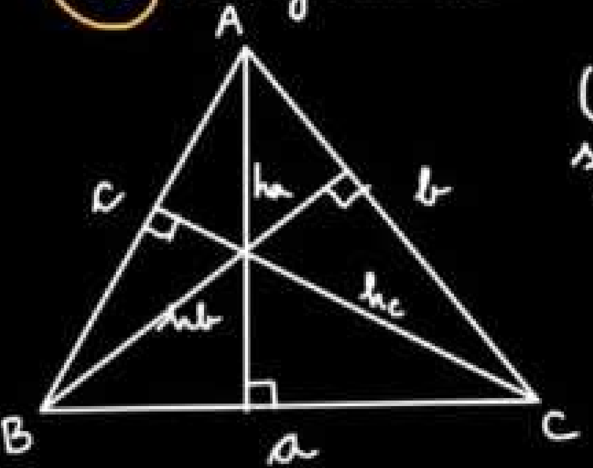
ceea ce încheie demonstrația. □

Perimetre și arii

Formulele de calcul pentru perimetrele ($\mathcal{P}$) și ariile ($\mathcal{A}$) poligoanelor studiate sunt următoarele:

1. Triunghi

1.1. Triunghi oarecare



$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2};$$

↓

(semiprodusul dintre o latură și lungimea înălțimii corespunzătoare)

$$\mathcal{P}_{\triangle ABC} = a + b + c;$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{ab\sin\hat{C}}{2} = \frac{bc\sin\hat{A}}{2} = \frac{ac \cdot \sin\hat{B}}{2}$$

Formula lui Heron:

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$;

Exemplu: $b = 4cm$; $h = 6cm$;

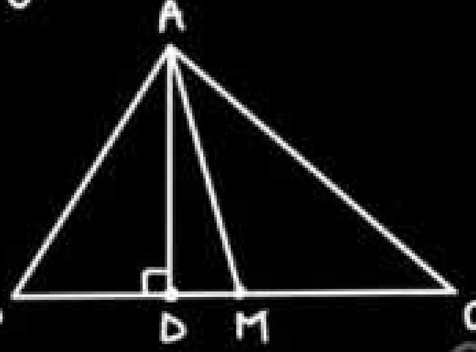
$\mathcal{A} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12cm^2$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$, unde R reprezintă raza cercului circumscris ΔABC.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = p\cdot r$, unde r reprezintă raza cercului înscris în ΔABC, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ reprezintă semiperimetrul ΔABC.

Def. Două triunghiuri care au aceeași arie s.n. triunghiuri echivalente.

Teoremă. (Triunghiuri echivalente) Orice mediană a unui triunghi împarte triunghiul dat în două triunghiuri echivalente.



AD ⊥ BC, D ∈ BC

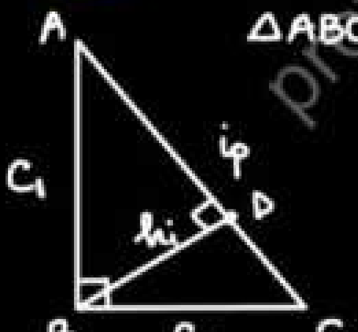
AM mediană $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABM} = \mathcal{A}_{\Delta ACM}$

Dem. $\mathcal{A}_{\Delta ABM} = \frac{BM\cdot AD}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ACM} = \frac{CM\cdot AD}{2}$.

Cum M = mij [BC] obținem că BM = CM, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABM} = \mathcal{A}_{\Delta ACM}$. □

1.2 Triunghiul dreptunghic



ΔABC dreptunghic (∢ABC = 90°)

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{c_1\cdot c_2}{2} = \frac{ip\cdot h_i}{2}$

AD ⊥ AC, D ∈ AC

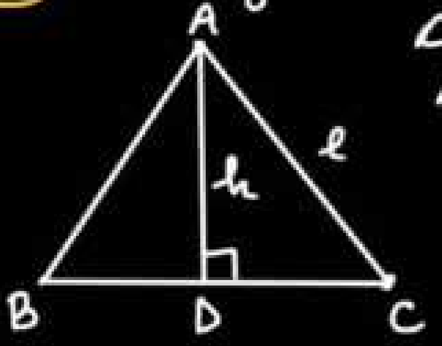
Exemplu:

$C_1 = 6u$;
$C_2 = 8u$;
$\mathcal{A} = \frac{6\cdot 8}{2} \Rightarrow$
$\mathcal{A} = 24\,u^2$;
De încercat și cu Heron.

Din egalitatea $\frac{c_1\cdot c_2}{2} = \frac{ip\cdot h_i}{2}$ obținem $h_i = \frac{c_1\cdot c_2}{ip}$, adică:

Teoremă. (Teorema înălțimii II) În orice triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu valoarea raportului dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

1.3. Triunghi echilateral (de latură ℓ)



$\triangle ABC$ echilateral

$AD \leftarrow$ înălțime

$$\mathcal{P}_{\triangle ABC} = 3 \cdot \ell$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplu:

$\ell = 8u$;

$$\mathcal{A} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$

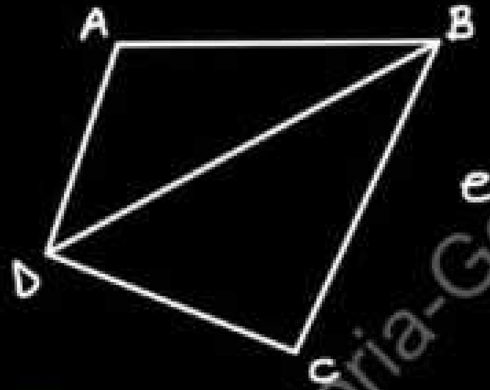
$\Rightarrow \mathcal{A} = 16u^2$

De încercat și cu Heron!

2. Patrulaterul

2.1 Patrulaterul oarecare

Perimetrul reprezintă suma lungimilor tuturor laturilor, iar pentru calculul ariei căutăm să descompunem patrulaterul în triunghiuri la care cunoaștem (sau putem calcula) aria.

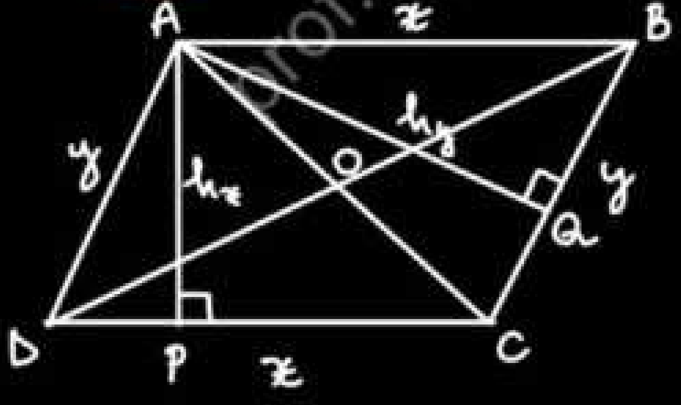


$ABCD$ patrulater (convex)

$$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

ex: $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\triangle ABD} + \mathcal{A}_{\triangle BCD}$

2.2 Paralelogramul



$DC \overset{not}{=} x$

$AP \perp DC$, $P \in DC$

$AP \overset{not}{=} h_x$

$BC \overset{not}{=} y$

$AQ \perp BC$, $Q \in BC$

$AQ \overset{not}{=} h_y$

$\{O\} = BD \cap AC$;

$\mathcal{P}_{ABCD} = 2x + 2y = 2(x+y)$; $\mathcal{A}_{ABCD} = x \cdot y \cdot \sin(\widehat{x,y})$,

$\mathcal{A}_{ABCD} = x \cdot h_x = y \cdot h_y = \text{baza} \cdot h$; unde $(\widehat{x,y})$ este unghiul ascuțit format de laturile x și y.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\widehat{BOC})}{2};$$

Exemplu: baza $= 4u$; $h = 2u \Rightarrow \mathcal{A} = 8u^2$.

Exemplu: $\mathcal{A}_{\triangle ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin(\widehat{ADC})$

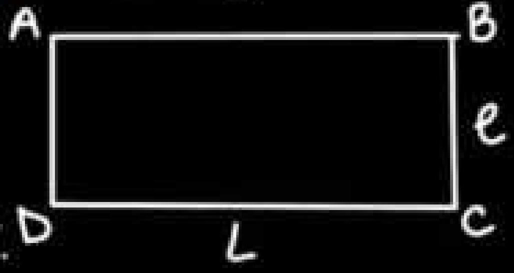
2.3 Dreptunghiul

Exemplu:

$l = 4cm$;

$L = 6cm$;

$\mathcal{A} = 6 \cdot 4 = 24cm^2$.



$\mathcal{P}_{ABCD} = 2L + 2l = 2(L+l)$

$\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l$

(produsul dintre lungime și lățime)

2.4 Rombul

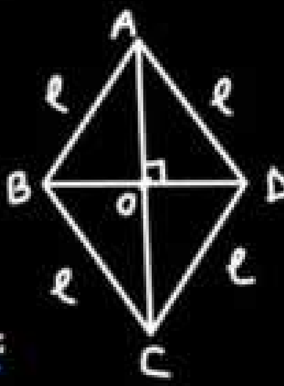
$\mathcal{P}_{ABCD} = 4l$

$AC \overset{not}{=} d_1$

$BD \overset{not}{=} d_2$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

(semiprodusul lungimilor diagonalelor)



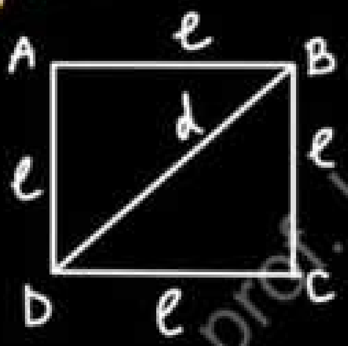
Obs. Aria unui romb se poate calcula aplicând oricare dintre formulele de calcul a ariei unui paralelogram, deoarece rombul este un paralelogram particular.

Exemplu:

$d_1 = 4u$;

$d_2 = 6u$. $\mathcal{A} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12u^2$.

2.5. Pătratul



$\mathcal{P}_{ABCD} = 4l$

$\mathcal{A}_{ABCD} = l^2$

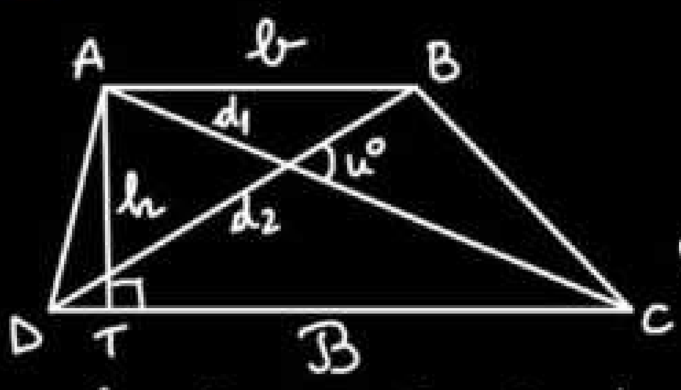
$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

Exemplu:

$l = 3u \Rightarrow$

$\mathcal{A} = 3^2 = 9u^2$.

2.6. Trapez



$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = l.m. \cdot h.$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin u^\circ}{2}$$

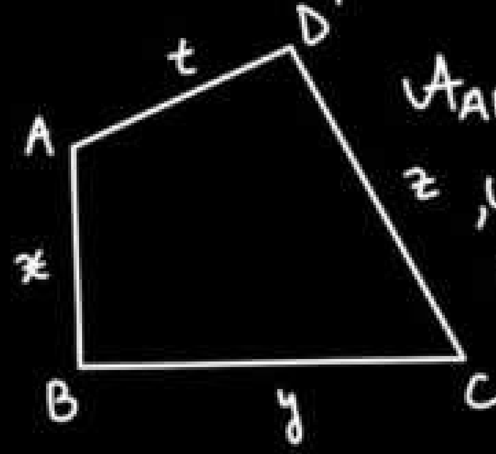
Exemplu: $b = 4u$; $B = 8u$; $h = 3u$; $\mathcal{A} = \frac{(4+8) \cdot 3}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = 18u^2$.

Teoreme legate de arii

Formula lui Arhimede

Aria unui patrulater convex ABCD este egală cu:



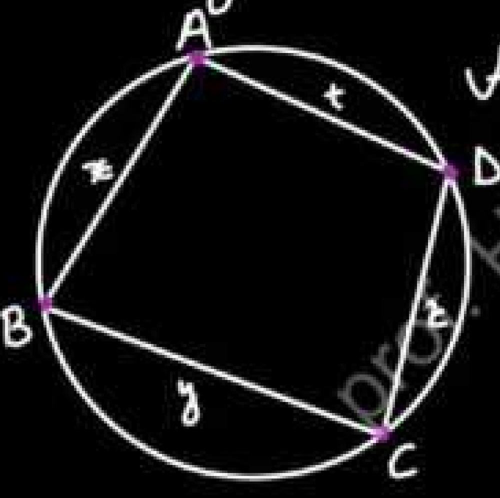
$$\mathcal{A}_{ABCD}=\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-t)-xyzt\cdot\cos^2\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}}$$

, unde p este semiperimetrul lui ABCD

$$p=\frac{x+y+z+t}{2}.$$

Formula lui Brahmagupta

Aria unui patrulater inscriptibil este egală cu:



$$\mathcal{A}_{ABCD}=\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-t)}$$

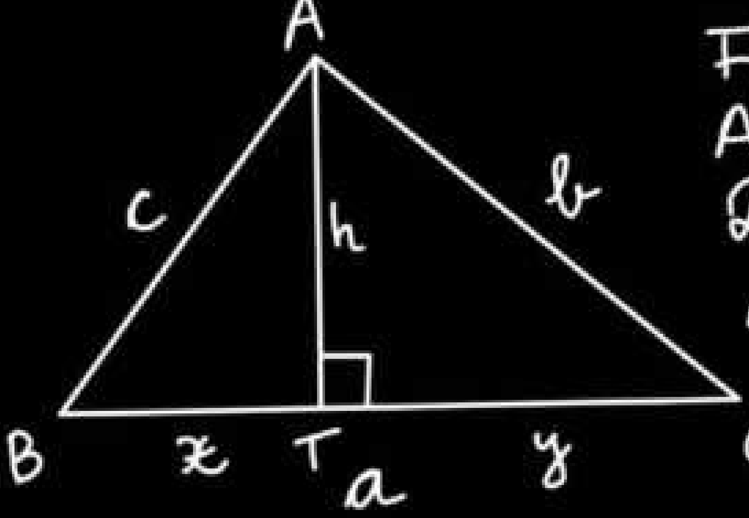
, unde p este semiperimetrul lui ABCD

$$p=\frac{x+y+z+t}{2}.$$

Obs. Formula lui Brahmagupta este un caz particular al Formulei lui Arhimede, deoarece $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$.

Obs. Formula lui Heron este un caz particular al Formulei lui Brahmagupta.

Demonstrația Formulei lui Heron



Fie $AT \perp BC$, $T \in [BC]$.
$AT \overset{\text{not}}{=} h$
Din Teorema lui Pitagora avem: $h^2 = c^2 - x^2$ și
$h^2 = b^2 - y^2$.

Ca atare,

$$c^2 - x^2 = b^2 - y^2 \overset{y=a-x}{\Rightarrow}$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \Rightarrow$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \;\big|+x^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax \Rightarrow$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Dar $h^2 = c^2 - x^2$, deci

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \left(\overset{2a)}{c} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\overset{2a)}{c} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{-a^2 + 2ac - c^2 + b^2}{2a} \cdot \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{-(a-c)^2+b^2}{2a} \cdot \frac{(a+c)^2-b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)}{2a} \cdot \frac{(a+c-b)(a+c+b)}{2a} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{(2p-2a)(2p-2c)\cdot(2p-2b)2p}{4a^2} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{\overset{4}{\cancel{2^4}}p(p-a)(p-b)(p-c)}{\cancel{4}a^2} \Rightarrow$$

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

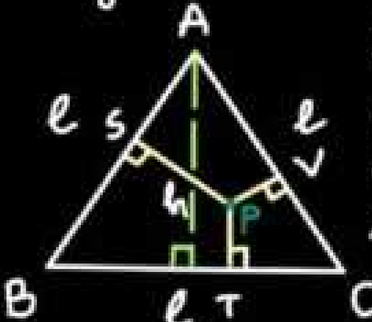
Ca atare,

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{a}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \square$$

Teorema lui Viviani

Suma distanțelor de la un punct din interiorul unui triunghi echilateral la cele trei laturi este constantă și egală cu lungimea înălțimii triunghiului.



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ echilateral} \\ dist(P,AB)=PS \\ dist(P,BC)=PT \\ dist(P,AC)=PV \end{array}\right\} \Rightarrow PS+PT+PV=dist(A,BC)=h$$

Dem.

$$\mathcal{A}_{\Delta APB} = \frac{l\cdot PS}{2};\ \mathcal{A}_{\Delta APC} = \frac{l\cdot PV}{2};$$

$$\mathcal{A}_{\Delta BPC} = \frac{l\cdot PT}{2}.$$

$$\mathcal{A}_{\Delta APB} + \mathcal{A}_{\Delta APC} + \mathcal{A}_{\Delta BPC} = \frac{l\cdot h}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{l\cdot PS}{2} + \frac{l\cdot PV}{2} + \frac{l\cdot PT}{2} = \frac{l\cdot h}{2} \ \Big|\cdot 2 \Rightarrow$$

$$l(PS+PV+PT) = l\cdot h \ \Big|:l \Rightarrow$$

$$h = PS+PV+PT. \quad \square$$

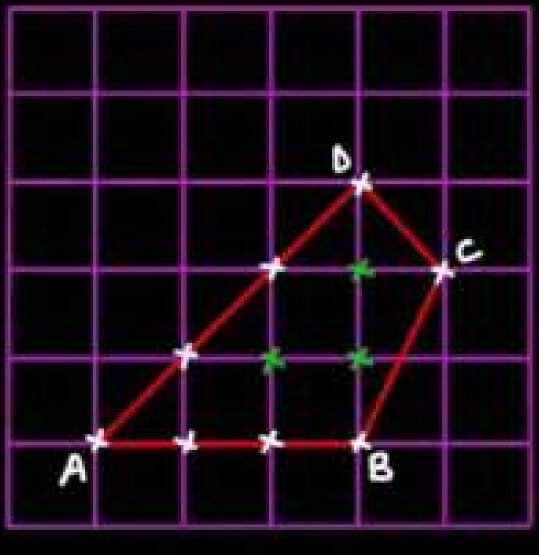
Teorema lui Pick

Fie un poligon care are vârfurile în nodurile unei rețele de pătrate cu latura de 1 u.m. Notăm cu n_p numărul de noduri ale rețelei situate pe laturile poligonului și cu n_i numărul de noduri ale rețelei situate în interiorul poligonului.

Atunci aria poligonului este:

$$\mathcal{A}_{poligon} = n_i + \frac{n_p}{2} - 1$$

Exemplu:



$n_p = 8$

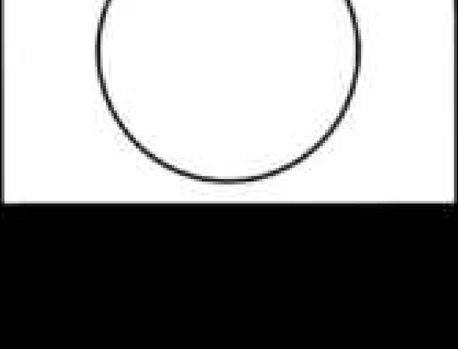
$n_i = 3$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 3 + \frac{8}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 6$$

Horia-George Georgescu

CERCUL



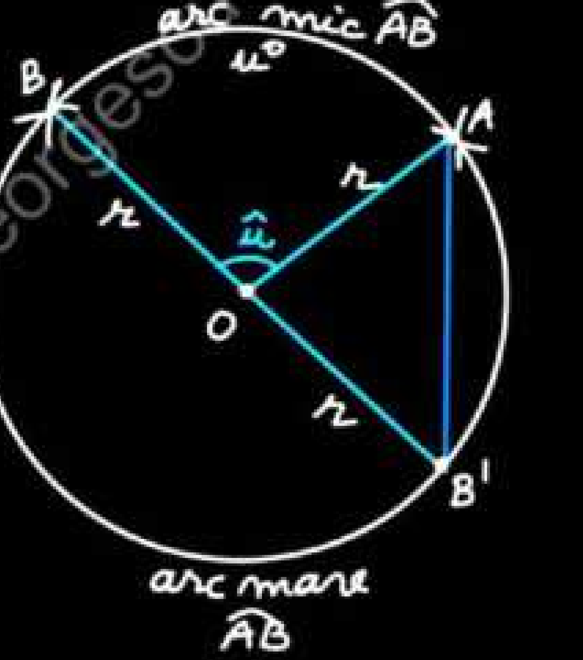
Cercul. Elemente introductive.

Def. Fie O un punct din plan și r un număr pozitiv. Mulțimea punctelor din plan situate la distanța r față de punctul O s.n. cerc de centru O și rază r.

Notăm $\mathcal{C}(O, r) = \{P \in \mathcal{P} \mid OP = r\}$

Obs. (Def) Cercul reprezintă locul geometric al tuturor punctelor din plan egal depărtate de un punct fix denumit centrul cercului.

Elemente în cerc:



(i) Centrul cercului: punctul O

(ii) Raza cercului: segmentul determinat de centrul cercului și un punct situat pe cerc (de exemplu [OA]) ; $[OA] \overset{not}{=} r$

(iii) Coardă: segmentul determinat de două puncte situate pe cerc (de exemplu coarda [AB'])

(iv) Diametrul: coarda care trece prin centrul cercului (de exemplu [BB']) $[BB'] = d$; Obs. $d = 2 \cdot r$

(v) Arc de cerc: porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte de pe cerc (de exemplu arcul $\widehat{AB}$)

Def. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc s.n. unghi la centru.

Exemplu: $\sphericalangle AOB$.

Obs. Măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului mic descris de acel unghi.

Exemplu: $m(\sphericalangle AOB) = \underset{\text{(arcul mic)}}{m(\widehat{AB})}$.

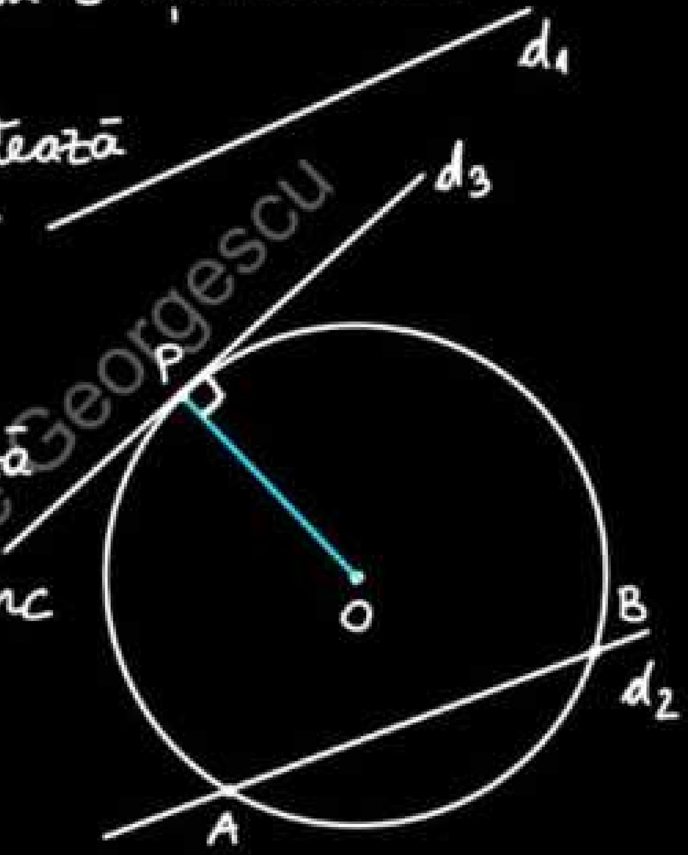
Dacă $\widehat{AB} = 80^\circ$, atunci $\sphericalangle AOB = 80^\circ$.

Obs. Măsura unui semicerc (jumătate de cerc) este egală cu 180°, iar măsura unui cerc este egală cu 360°.

Obs. Într-un cerc toate razele sunt congruente.

Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

Considerăm cercul de centru O și rază r.



(i) Dreapta care nu intersectează cercul în nici un punct s.n. dreaptă exterioară (d_1)

$$d_1 \cap \mathcal{C}(O,r) = \phi.$$

(ii) Dreapta care intersectează cercul în două puncte distincte s.n. secantă la cerc (d_2)

$$d_2 \cap \mathcal{C}(O,r) = \{A,B\}$$

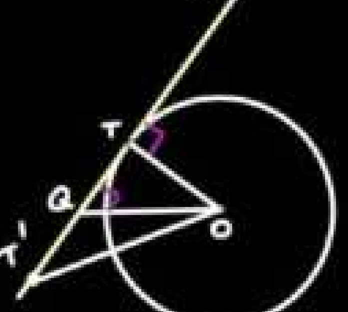
(iii) Dreapta care intersectează cercul într-un punct s.n. tangentă la cerc, iar punctul respectiv s.n. punct de tangență (d_3).

$$d_3 \cap \mathcal{C}(O,r) = \{P\}$$

Teoremă. Tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în punctul de tangență.

$$d_3 \perp OP.$$

Dem.

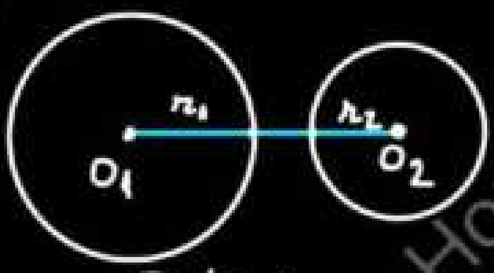


Fie d tangenta la cercul $\mathcal{C}(O,OT)$.
Vreau să arăt că $OT \perp d$, unde $\{T\} = d \cap \mathcal{C}(O,OT)$
Presupunem prin reducere la absurd că $OT \not\perp d$ și că $OQ \perp$ unde $Q \in d$.
Fie $T' = sim_Q T$.
OQ este înălțime și mediană în $\Delta TOT'$, deci $\Delta TOT'$ este isoscel.
Prin urmare $OT' = OT$ raze în cerc și $T, T' \in d$ contradicție cu faptul că d este tangentă la cerc.
□

Pozițiile relative a două cercuri

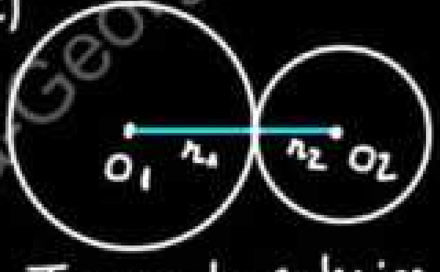
Considerăm două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. cu $r_1 \geq r_2$.
Cele două cercuri se pot afla în următoarele poziții:

i)



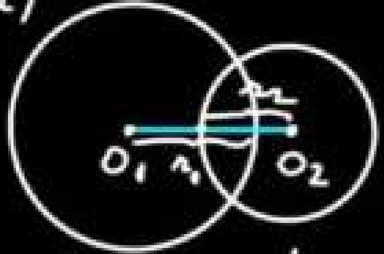
Exterioare
$O_1O_2 > r_1 + r_2$

ii)



Tangente exterior
$O_1O_2 = r_1 + r_2$

iii)



Secante
$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$

iv)

Tangente interior
$O_1O_2 = r_1 - r_2$

v)

Interioare
$O_1O_2 < r_1 - r_2$

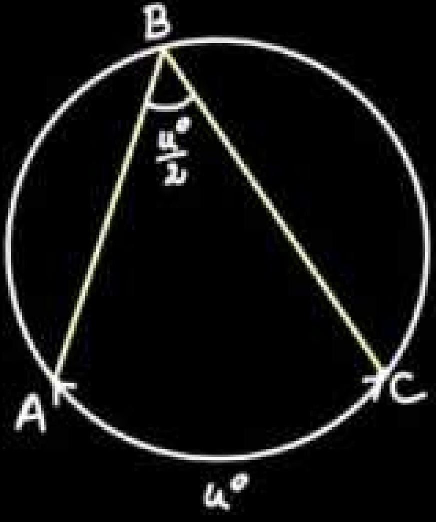
vi)

Concentrice
$O_1 = O_2 = O$

Def. Un unghi cu vârful pe cerc și cu laturile coarde în cerc s.n unghi înscris în cerc.

Exemple: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle MNP$ etc.

Teoremă. Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului mic descris (determinat) de acel unghi.

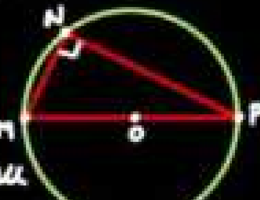


$$m(\sphericalangle ABC) = \frac{m\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

Exemplu:

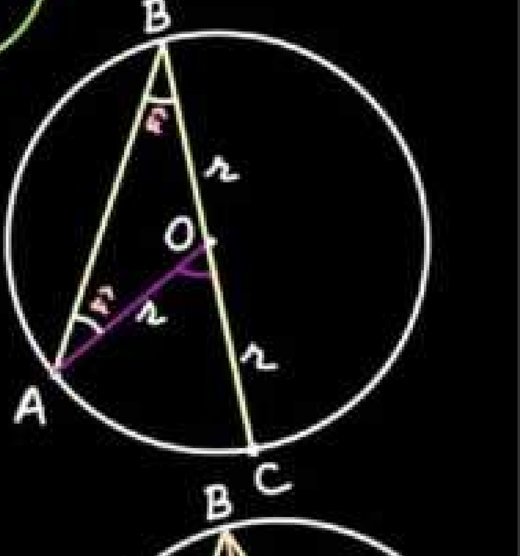
$$\overset{\frown}{AC} = 110^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 55^\circ.$$

Obs. Un unghi înscris în cerc care subîntinde diametrul este drept.



$$\sphericalangle MNP = \frac{\overset{\frown}{MP}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Dem.



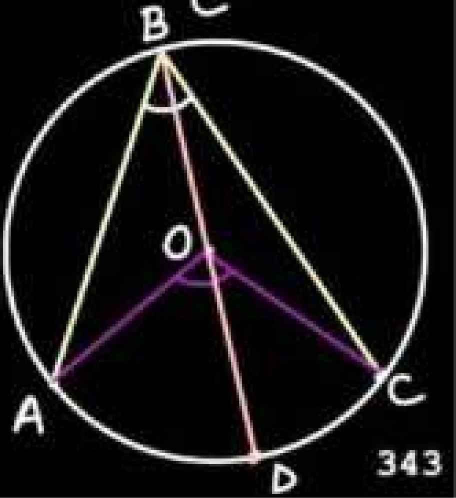
Cazul I. (BC este diametru)

ΔAOB este isoscel și $\sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AC}$ este unghi exterior.

Din Teorema unghiului exterior avem că $\sphericalangle AOC = 2\hat{u}$.

Asadar,

$$2\hat{u} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \hat{u} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$



Cazul II. $(O \in \mathrm{int}(\sphericalangle ABC))$

Fie D punctul diametral opus lui B.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$$

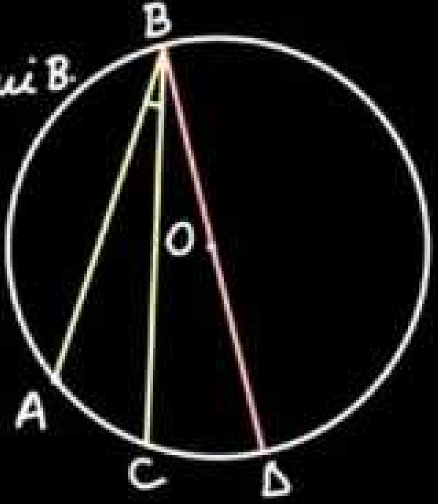
$$\overset{\text{cazul I}}{=} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD+DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}.$$

Cazul III. $(O \in \text{ext}(\sphericalangle ABC))$

Fie D punctul diametral opus lui B.

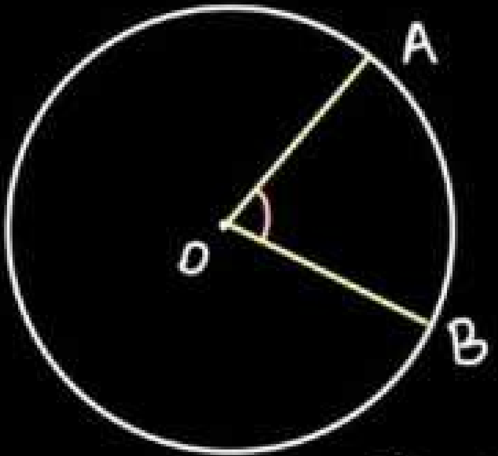
Din cazul I avem:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD - \sphericalangle DBC = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}. \ \square$$



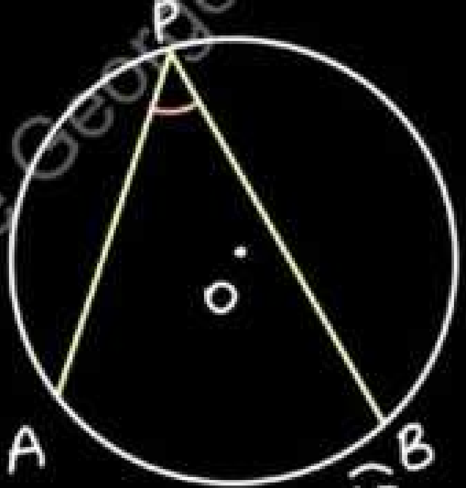
Unghiuri raportate la un cerc

Unghi la centru



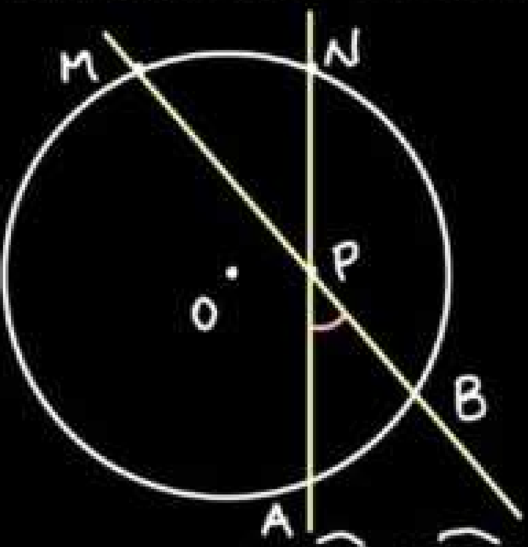
$$\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

Unghi înscris în cerc



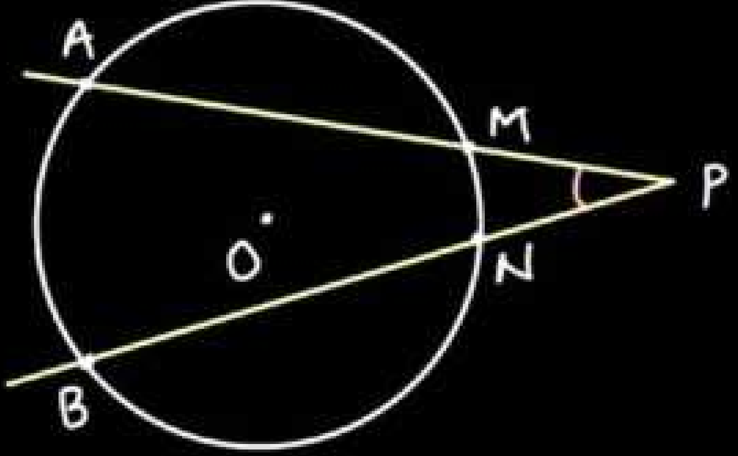
$$\sphericalangle APB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Unghi cu vârful în interiorul cercului



$$\sphericalangle APB = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MN}}{2}$$

Unghi cu vârful în exteriorul cercului

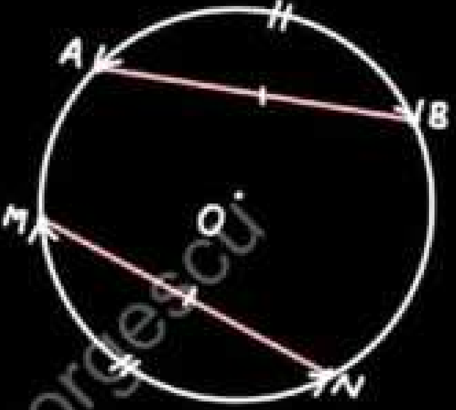


$$\sphericalangle APB = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN}}{2}$$

Teoreme clasice referitoare la cerc

I. Teoremă. În același cerc sau în cercuri congruente la coarde congruente corespund arce congruente și reciproc, la arce congruente corespund coarde congruente.

$$AB = MN \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MN}$$



Dem.

"$\Rightarrow$" $AB = MN \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MN}$

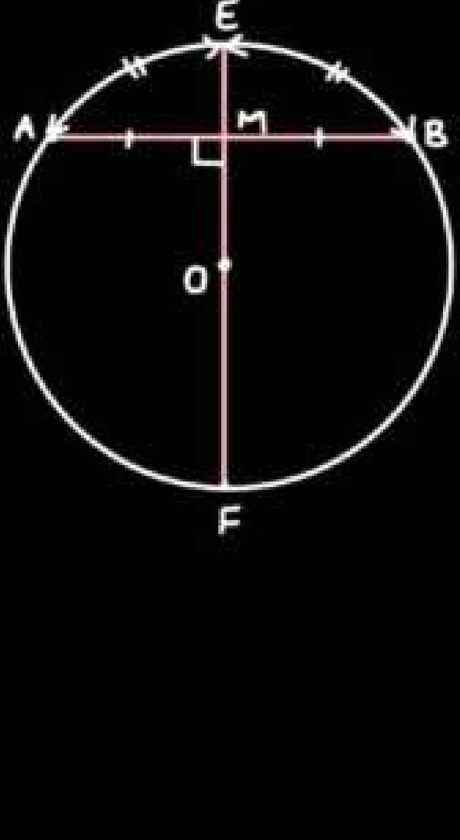
Se arată că $\Delta AOB \equiv \Delta MON$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle AOB = \sphericalangle MON$, de unde concluzia.

"$\Leftarrow$" $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MN} \Rightarrow AB = MN$.

Se arată că $\Delta AOB \equiv \Delta MON$ (L.U.L), deci $AB = MN$. □

II. Teoremă. Diametrul perpendicular pe o coardă împarte coarda și arcul corespunzător în părți congruente.

$$\left.\begin{array}{l} EF \text{ diametru} \\ EF \perp AB \\ EF \cap AB = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} AM = MB \\ \text{și} \\ \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} \end{array}$$



Dem.

$\Delta AMO \equiv \Delta BMO$ (I.C.), deci $AM = MB$ și $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM$. □

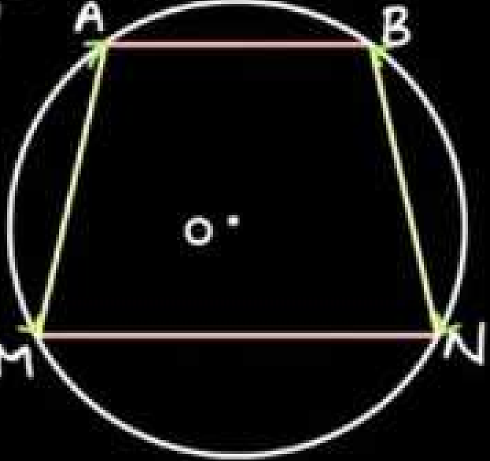
- Reciproca Teoremei II:

$$\left.\begin{array}{c} EF \text{ diametru} \\ EF\cap AB=\{M\} \\ AM=MB \\ \text{sau} \\ \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}\end{array}\right\} \Rightarrow EF\perp AB$$

Dem. În ambele situații din ipoteză ΔAFB este isoscel. Cum FM este mediană/bisectoare în ΔAFB rezultă că FM este și înălțime în acel triunghi. □

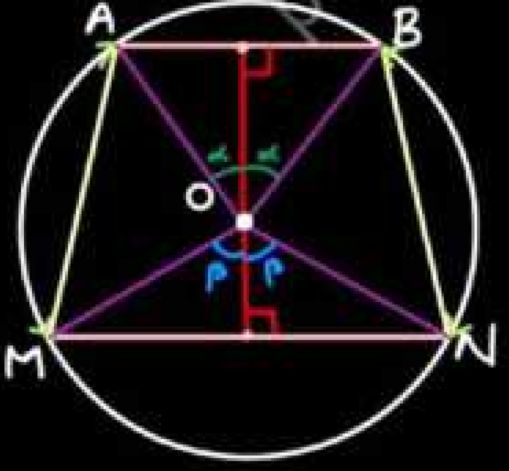
III. Teoremă.

Arcele de cerc cuprinse între coarde paralele sunt congruente.



$$AB\parallel MN \Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}.$$

Dem.



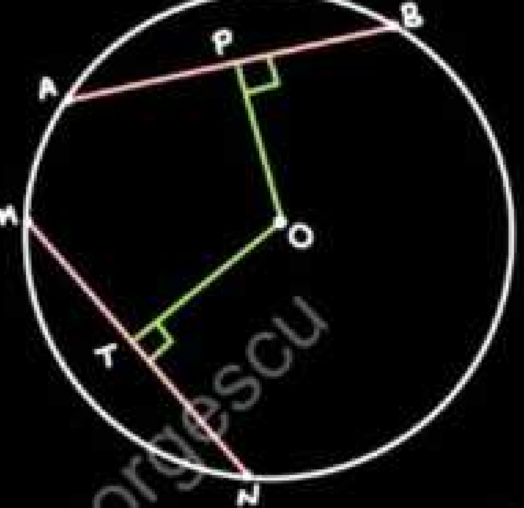
$\measuredangle BON = \measuredangle AOM = 180° - \alpha - \beta$.

Detaliere (exercițiu).

IV. Teoremă Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.

$$A, B, M, N \in \mathcal{C}(O, r)$$

$$\text{dist}(O, AB) = \text{dist}(O, MN) \Leftrightarrow AB = MN$$



Dem.

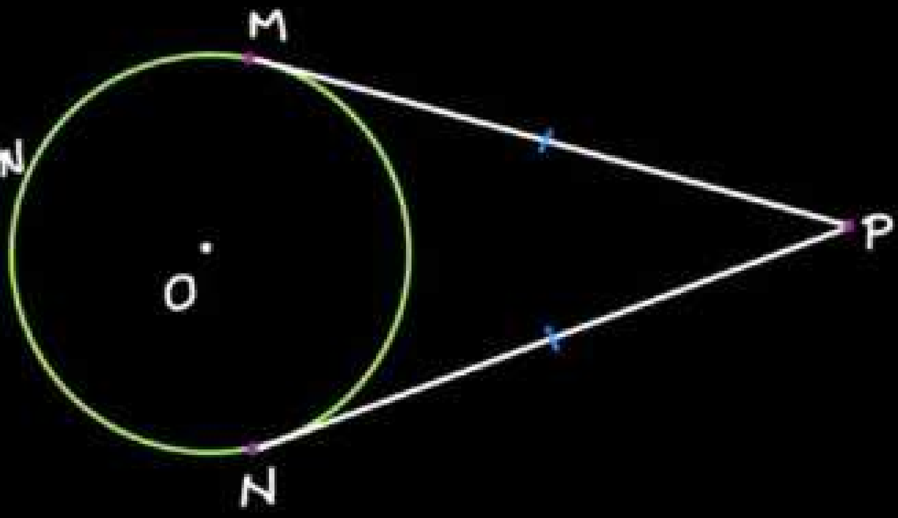
Fie $\text{dist}(O, AB) = OP$, unde $OP \perp AB$, $P \in [AB]$ și
$\text{dist}(O, MN) = OT$, unde $OT \perp MN$, $T \in [MN]$.

"$\Rightarrow$" $\Delta APO \equiv \Delta MTO$ (I.C.), de unde rezultă concluzia că $AB = MN$.

"$\Leftarrow$" OP și OT conțin diametre perpendiculare pe cele două coarde, deci $AP = PB$ și $MT = TN$.
$\Delta APO \equiv \Delta MTO$ (I.C.), de unde rezultă concluzia că $OP = OT$. □

V. Teoremă Printr-un punct exterior unui cerc putem construi două tangente la cerc. Segmentele determinate de acel punct și punctele de tangență sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{l} P \in \text{ext}\,\mathcal{C}(O,r) \\ PM \cap \mathcal{C}(O,r) = \{M\} \\ PN \cap \mathcal{C}(O,r) = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow PM \equiv PN$$



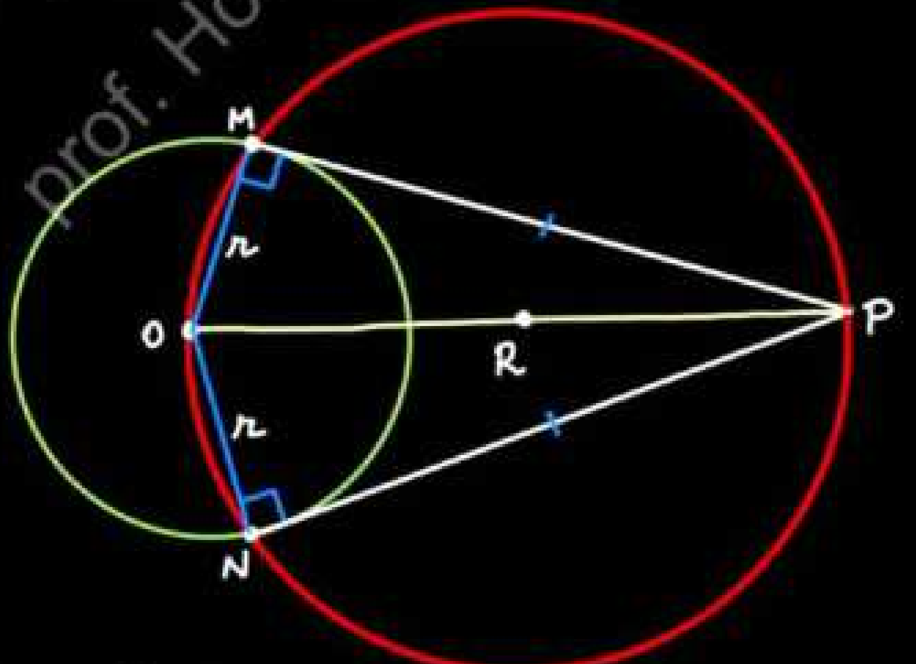
Dem.

Pentru a determina punctul de contact al tangentei din P la cerc construim un triunghi dreptunghic cu ipotenuza OP și vârful unghiului drept pe cerc (în punctul M).

Un unghi drept este înscris într-un semicerc, deci construim cercul de diametru OP și centru R.

Raza cercului $\mathcal{C}(R,OP)$ este egală cu $\frac{OP}{2}$.

Notăm cu N punctul de intersecție dintre cercul $\mathcal{C}(R,OP)$ și cercul $\mathcal{C}(O,OM)$.

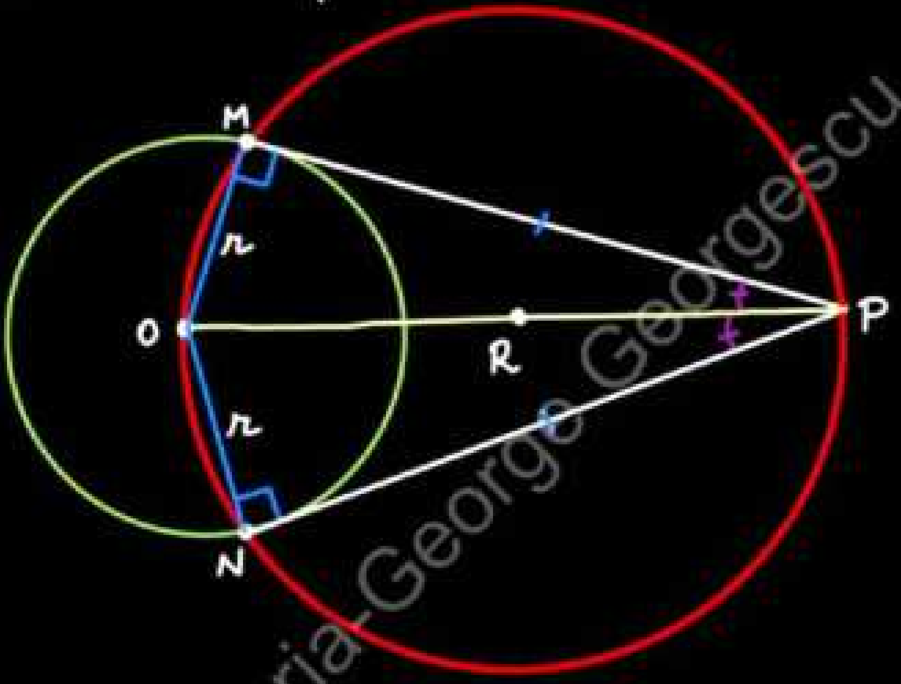


Observăm că $\sphericalangle ONP = 90°$, deci $\Delta OMP \equiv \Delta ONP$ (I.C.), ceea ce ne conduce la concluzia $MP = MN$.

De asemenea, deoarece $\Delta OMP \equiv \Delta ONP$ obținem o altă teoremă importantă.

VI. Teoremă (Consecință a Teoremei V).

Semidreapta determinată de un punct exterior unui cerc și centrul cercului este bisectoarea unghiului format din tangentele la cerc din acel punct.



$$\left.\begin{array}{l} P\in \text{ext}\,\mathcal{C}(O,r)\\ PM\cap\mathcal{C}(O,r)=\{M\}\\ PN\cap \mathcal{C}(O,r)=\{N\}\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle MPO\equiv\sphericalangle NPO.$$

Lungimea cercului
Aria cercului (discului)

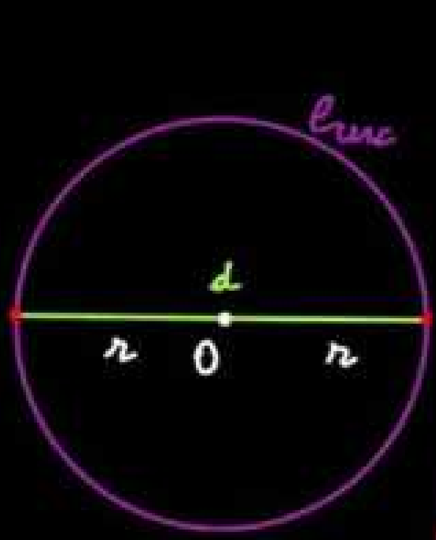
Def. Indiferent de rază, raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său este constant.

Această valoare constantă se notează cu π. („pi"—perimetru) și este egală cu 3,1415....

Numărul π este un număr irațional ($\pi \in R \setminus Q$).

Așadar, în practică folosim aproximările

$$\pi \simeq 3,14 \quad \text{sau} \quad \pi \simeq \frac{22}{7} \text{ (Arhimede)}$$



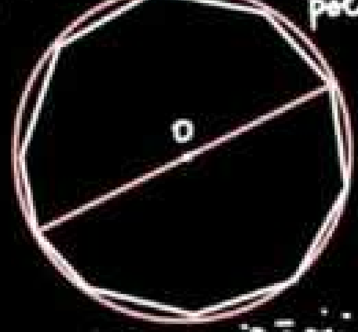
$\frac{l_{cerc}}{d} = \pi$;

l = lungimea cercului;

$\pi = 3,1415...$;

$\pi \simeq 3,14$.

„Aproximarea" cercului cu poligoane



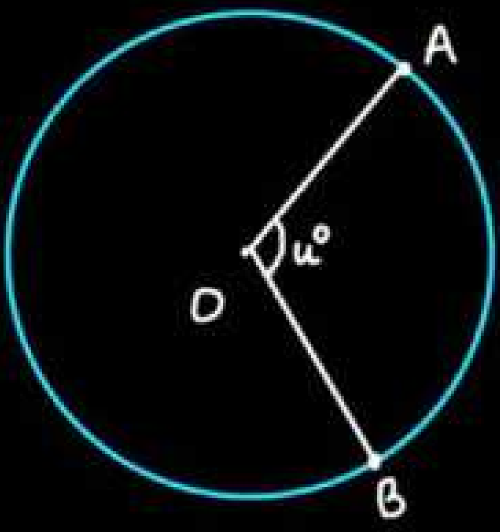
Metoda epuizării (Arhimede)

Din relația $\frac{l_{cerc}}{d} = \pi$ obținem:

$l_{cerc} = d\pi \Leftrightarrow l_{cerc} = 2\pi r$ formula pentru lungimea unui cerc atunci când știm raza.

Exemplu. Lungimea unui cerc de rază $r = 4cm$ este $l_{cerc} = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ cm.

Obs. Lungimea unui arc de cerc este dată de formula: $l_{arc} = l_{cerc} \cdot \frac{u^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi r \cdot u^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r u^\circ}{180^\circ}$, unde u° este măsura unghiului la centru care descrie acel arc.



$$l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r\cdot u^\circ}{180^\circ}.$$

Exemplu:

$$\left.\begin{matrix} r=6 \\ u=120^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi\cdot \cancel{6}\cdot 120^\circ}{\cancel{180}^\circ_{30^\circ}} = 4\pi cm$$

Def. Fie cercul $\mathcal{C}(O,r)$. Discul de centru O și rază r se notează $\mathcal{D}(O,r)$ și conține atât punctele de pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ cât și toate punctele din interiorul acelui cerc.

$$\mathcal{D}(O,r) = \mathcal{C}(O,r) \cup \text{int}\,\mathcal{C}(O,r)$$

$$\mathcal{D}(O,r) = \{P \in \mathcal{P} \mid OP \leq r\}.$$

Aria cercului (discului) de rază r este dată de formula:

$$\mathcal{A}_{cerc} = \pi r^2.$$

Justificare intuitivă:

Metoda epuizării:

$$\mathcal{A}_{cercului} \simeq \mathcal{A}_{\Delta OAB} + \mathcal{A}_{\Delta OBC} + \mathcal{A}_{\Delta OCD} + \ldots$$

$$\simeq \frac{l_1\cdot h_1}{2} + \frac{l_2\cdot h_2}{2} + \frac{l_3\cdot h_3}{2} + \ldots$$

Când lungimile laturilor poligonului „tind" către 0 avem triunghiuri „înguste" a căror înălțime tinde să aibă lungimea cât lungimea razei.

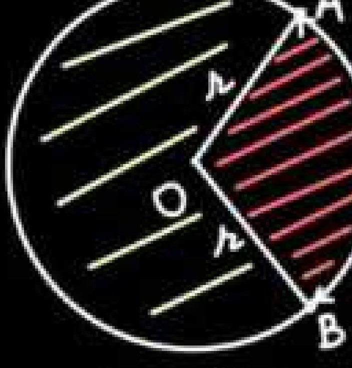
Așadar,

$$\mathcal{A}_{cercului} = \frac{\varepsilon_1\cdot r}{2} + \frac{\varepsilon_2\cdot r}{2} + \frac{\varepsilon_3\cdot r}{2} + \ldots = \frac{r}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots) = \frac{r}{2}\cdot l_{cerc} = \frac{r}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\pi r = \pi r^2.$$

Exemplu.

Aria unui cerc de rază $r = 3cm$ este egală cu $9\pi cm^2$.

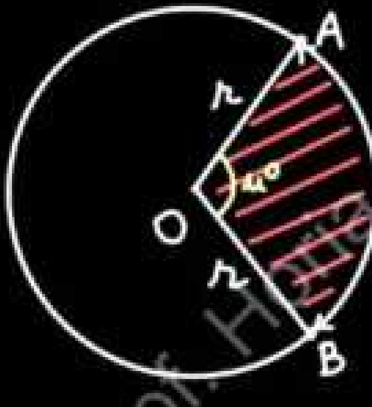
Def. Figura geometrică delimitată de două raze ale unui cerc și de arcul de cerc descris de cele două raze s.n. sector de cerc.



Sectorul AOB.

Observăm faptul că OAB poate să fie delimitat și de arcul mare.

Aria sectorului de cerc este dată de formula $A_{sect} = \frac{\pi r^2 \cdot u^\circ}{360^\circ}$, unde u este măsura unghiului la centru format de razele care delimitează sectorul de cerc.



$A_{sect\,AOB} = \frac{\pi r^2 \cdot u^\circ}{360^\circ}$

Exemplu:

$\left.\begin{matrix} r = 2cm \\ u = 120^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_{sect} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \cancel{120}^{1}}{\cancel{360^\circ}_{3}} = \frac{4}{3}\pi cm^2.$

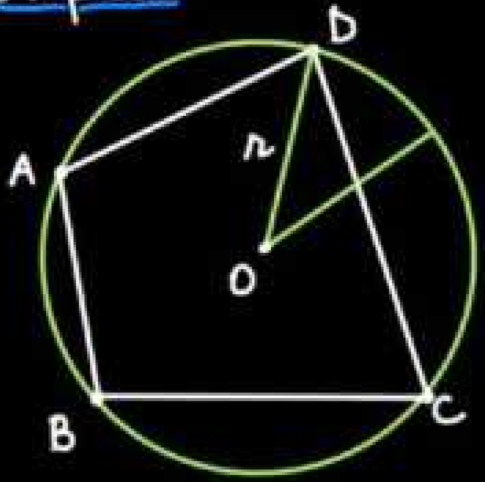
Patrulatere inscriptibile

Știm că orice triunghi poate să fie înscris într-un cerc (mai exact în cercul circumscris).

Nu orice patrulater se poate înscrie într-un cerc.

Def. Un patrulater care se poate înscrie într-un cerc (adică există un cerc care să conțină toate vârfurile patrulaterului) s.n. patrulater inscriptibil.

Exemplu:



ABCD este inscriptibil.
$(A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r))$

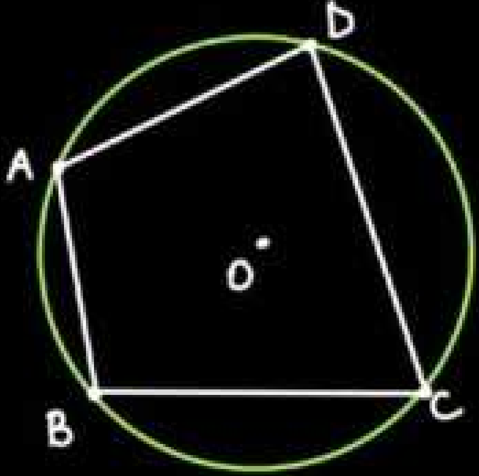
A, B, C, D s.n. puncte conciclice (se află pe același cerc).

Ca atare, un patrulater este inscriptibil dacă vârfurile sale sunt puncte conciclice.

Teoremă.

Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.

ABCD inscriptibil $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ și $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$



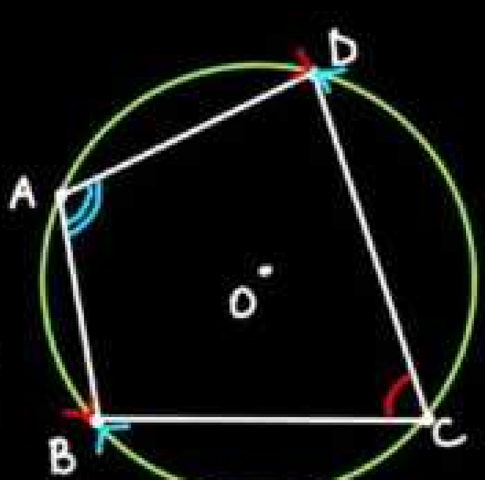
Dem.

,,$\Rightarrow$" Fie ABCD inscriptibil.

$\sphericalangle DAB = \dfrac{\widehat{BD}^{mare}}{2}$ și $\sphericalangle DCB = \dfrac{\widehat{BD}^{mic}}{2}$

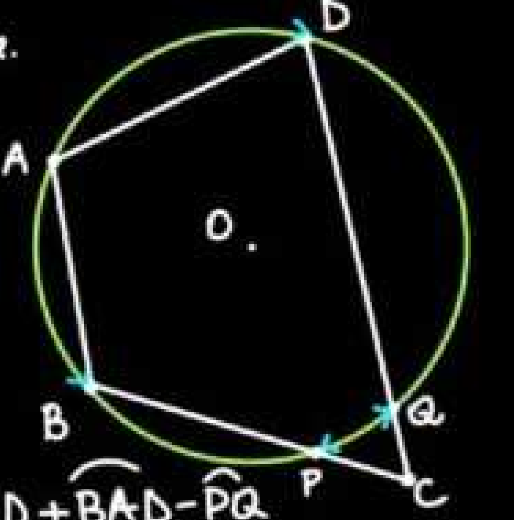
$\therefore\ \sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB = \dfrac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$

Similar $\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180^\circ$



"$\Leftarrow$" Fie $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ și $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$.

Presupunem prin reducere la absurd că A, B, C, D nu sunt conciclice.



Știm că orice trei $\overset{\text{(necoliniare)}}{\text{puncte}}$ din plan sunt conciclice. Fie acestea B, A și D, deci $C \notin \mathcal{C}(O,r)$.

$$\sphericalangle BAD = \frac{\overset{\frown}{BPQD}}{2}$$

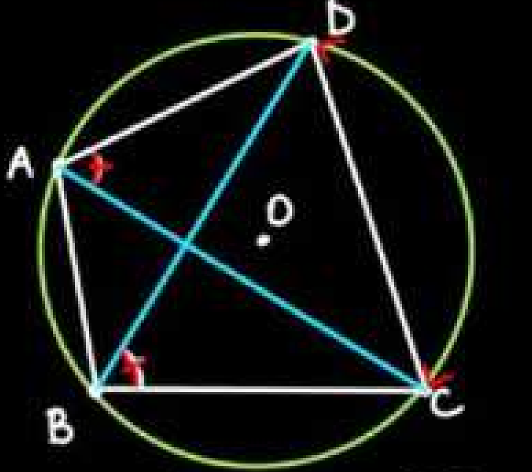
$$\sphericalangle BCD = \frac{\overset{\frown}{BAD} - \overset{\frown}{PQ}}{2}$$

Ca atare, $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \frac{\overset{\frown}{BPQD} + \overset{\frown}{BAD} - \overset{\frown}{PQ}}{2}$

$$= \frac{360^\circ - \overset{\frown}{PQ}}{2} < \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$ ceea

ce contratice faptul că $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. □

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente.



ABCD inscriptibil $\Leftrightarrow \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DAC$

Dem.

"$\Rightarrow$" Fie ABCD inscriptibil.

Reiese imediat că $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$, deoarece ambele unghiuri descriu același arc $\overset{\frown}{DC}$.

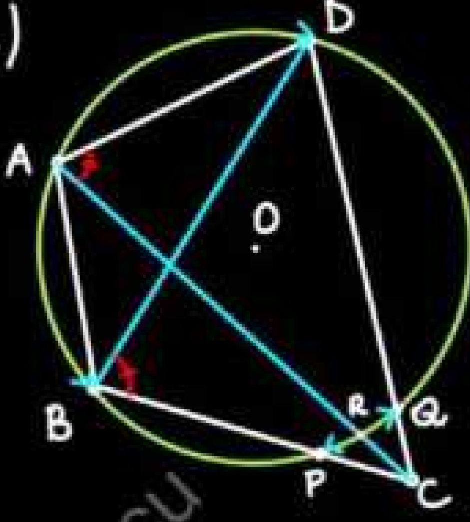
"$\Leftarrow$" Fie $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DAC$. Vreau să demonstrez că ABCD este inscriptibil.

Presupunem că ABCD nu este inscriptibil și fără a pierde generalitatea considerăm A, B și D conciclice și C un punct în exteriorul cercului determinat de punctele A, B și D.

$\sphericalangle DAC = \frac{\overset{\frown}{DR}}{2}$, unde $\{R\} = CA \cap \mathcal{C}(O,r)$

$\sphericalangle DBC = \frac{\overset{\frown}{DR} + \overset{\frown}{RP}}{2}$, de unde

rezultă contradicția cu faptul că $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$. □

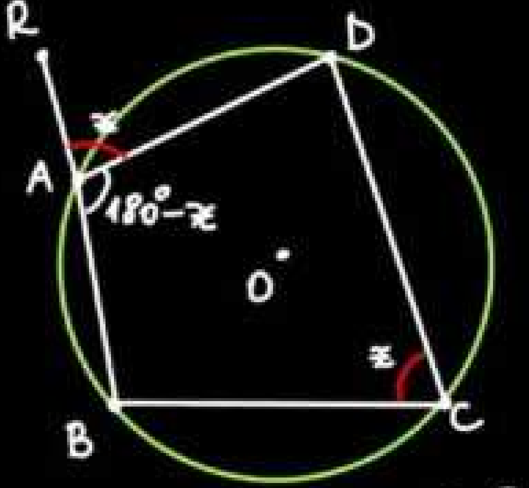


(Consecință a primei Teoreme)

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă un unghi interior este congruent cu unghiul exterior opus.

Exemplu:

ABCD inscriptibil $\Leftrightarrow \sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle DAR$.

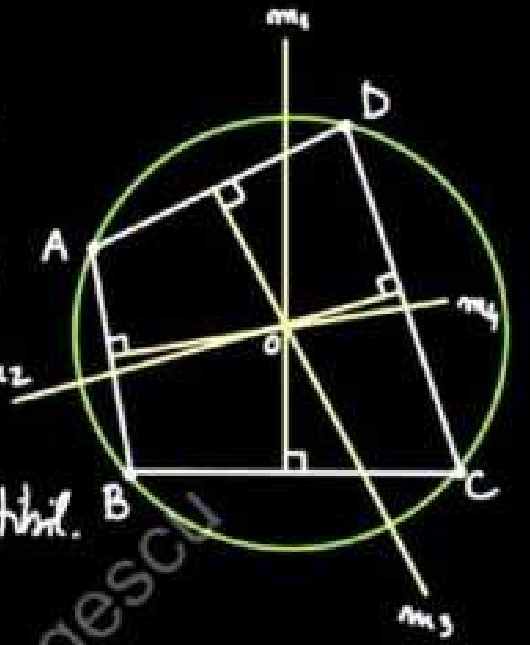


Dem.

$$\left.\begin{matrix}\sphericalangle DAR + \sphericalangle DAB = 180^\circ \\ \sphericalangle DAR = \sphericalangle DCB\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle DCB + \sphericalangle DAB = 180^\circ$$

$\Leftrightarrow$ ABCD este inscriptibil (vezi prima Teoremă din această secțiune)

Teoremă. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă mediatoarele laturilor sale sînt concurente.



m_1, m_2, m_3, m_4 mediatoarele laturilor BC, CD, AD și AB.

ABCD inscriptibil $\Leftrightarrow m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap m_4 \neq \emptyset$

Dem.

"$\Rightarrow$" Fie ABCD un patrulater inscriptibil.
$OA = OB = OC = OD = r$, deci
$O \in m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap m_4$.

"$\Leftarrow$" Fie ABCD un patrulater cu mediatoarele laturilor m_1, m_2, m_3, m_4 concurente în O.

Folosind proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment obținem că
$OA = OB = OC = OD$, deci A, B, C, D sunt conciclice.

Exemple de patrulatere inscriptibile:

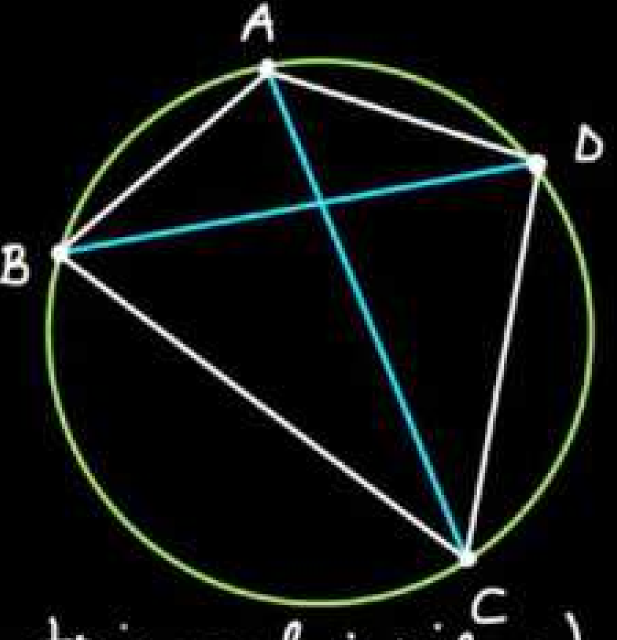
i) Dreptunghiul (deci și pătratul)
ii) Trapezul isoscel

Teorema lui Ptolemeu

Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

ABCD inscriptibil $\Leftrightarrow$

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.



Dem. (vezi „Asemănarea triunghiurilor)

Fie P un punct în semiplanul determinat de BC și punctul A a.î.

$\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle DAC$ și

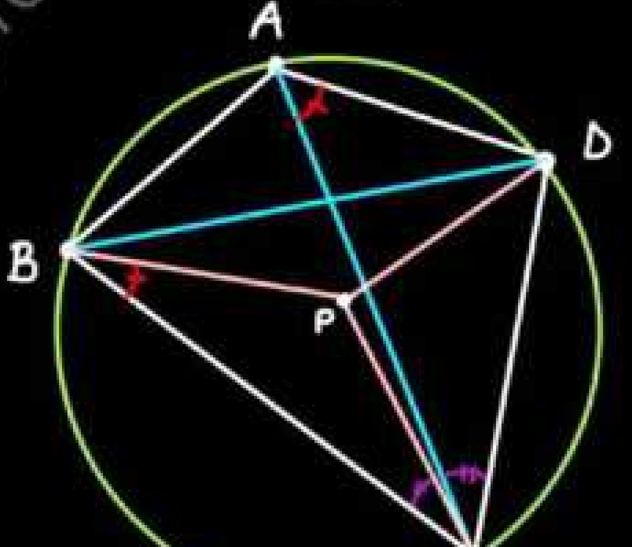
$\sphericalangle PCB \equiv \sphericalangle ACD$

Din criteriul de asemănare u.u. avem

$\Delta PBC \sim \Delta DAC$

$$\Delta PBC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{PB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \Rightarrow PB = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

(*)



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{PC}{DC}\\ \sphericalangle PCD=\sphericalangle BCA\end{array}\right\}\xRightarrow{l.u.l}\Delta PCD\sim\Delta BCA$$

$$\Delta PCD\sim\Delta BCA \Rightarrow \frac{PC}{BC}=\frac{CD}{CA}=\frac{PD}{BA}\Rightarrow$$

$$PD=\frac{AB\cdot CD}{AC}\ (**)$$

„⟹" Fie ABCD un patrulater inscriptibil.

Din una dintre Teoremele anterioare știm că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$ și cum din construcție $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle DAC$ rezultă că $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle DBC$, deci $P \in BD$.

Așadar, $BD = BP + PD$.

$$BD = PB + PD \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \frac{AD\cdot BC}{AC}+\frac{AB\cdot CD}{AC},$$ de unde obținem $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$.

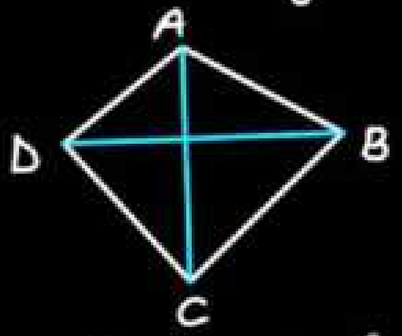
„⟸" Știm că $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$ și vrem să demonstrăm că ABCD este inscriptibil.

Relația pe care o știm se poate scrie $BD = \dfrac{AD\cdot BC}{2}+\dfrac{AB\cdot CD}{2}$ și ținând cont de (*) și (**) avem $BD = BP + PD$ deci $P \in BD$. Atunci $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle DAC$ și conform unei Teoreme anterioare, ABCD este patrulater inscriptibil. □

Inegalitatea lui Ptolemeu

În orice patrulater convex are loc inegalitatea:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



Dem.

Tehnica este aceeași ca în cazul Teoremei lui Ptolemeu, însă patrulaterul nefiind inscriptibil punctul P nu știm dacă se află pe dreapta BD.

Ca atare, din inegalitatea triunghiului,

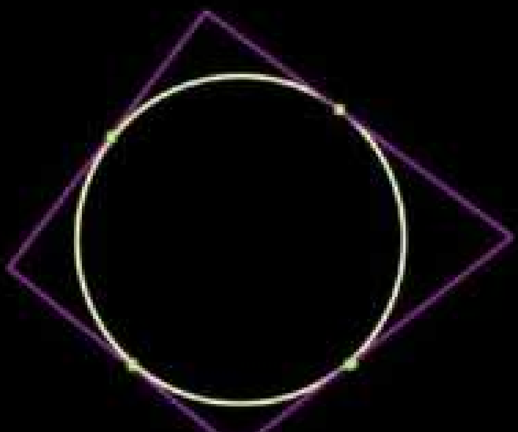
$$BD \leq BP + PD.$$

Înlocuind, concluzia reiese imediat. □

Patrulatere circumscriptibile

Def. Un patrulater care are cele patru laturi tangente unui cerc s.n. patrulater circumscris cercului.

Un patrulater este circumscriptibil dacă poate fi circumscris unui cerc.

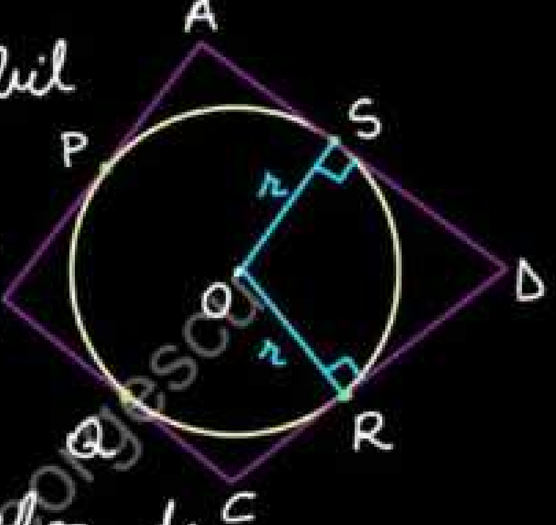


Teoremă.

Un patrulater este circumscriptibil dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.

Dem.

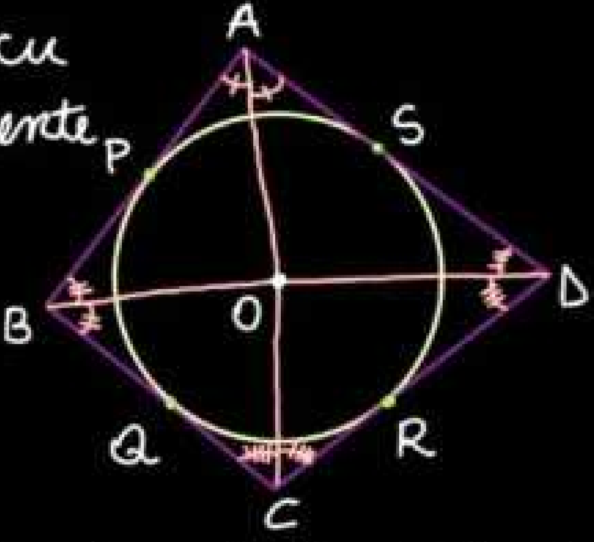
„=>" Fie ABCD circumscriptibil și P, Q, R, S punctele de tangență (figura din dreapta).



Așadar, $OP \perp AB$, $OQ \perp BC$, $OR \perp CD$, $OS \perp AD$ și $OP = OQ = OR = OS = r$.

Folosind proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi rezultă concluzia că O se află pe cele patru bisectoare.

„<=" Fie patrulaterul ABCD cu bisectoarele unghiurilor concurente în punctul O.



Folosind proprietatea punctelor de pe bisectoare rezultă că

dist(O, AB) = dist(O, BC) = dist(O, CD) = dist(O, AD) = r, adică proiecțiile punctului O pe fiecare latură a lui ABCD sunt conciclice.

Concluzia reiese imediat. □

Teoremă (Pitot) Un patrulater este circumscriptibil dacă si numai dacă suma laturilor opuse este aceeasi.

Dem. Reiese imediat deoarece tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale.

Teoremă

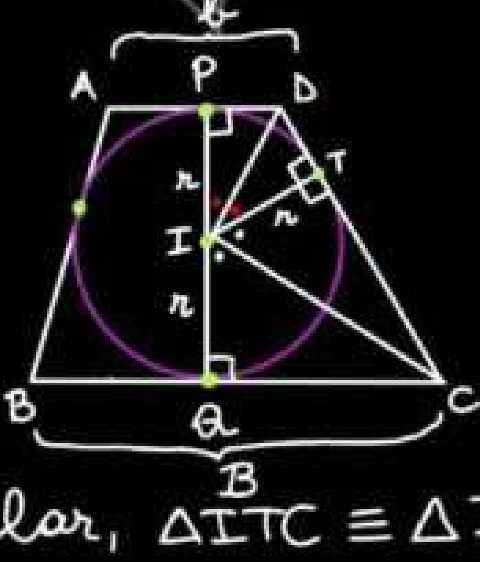
i) Dacă un trapez este circumscriptibil, atunci punctele de contact ale bazelor trapezului cu cercul înscris si centrul cercului sunt coliniare, asadar diametrul cercului înscris este egal cu înălțimea trapezului.

ii) Dacă un trapez este isoscel, atunci lungimea diametrului cercului înscris în trapez este egală cu media geometrică a lungimilor bazelor.

iii) Dacă un trapez este dreptunghic, atunci lungimea diametrului cercului înscris în trapez este egală cu media armonică a lungimilor bazelor.

Dem.

i)



PI = IT (r)

DP = DT (tangente dintr-un punct exterior)

ID = ID (evident).

Obținem că $\Delta DPI \equiv \Delta DTI$.

Similar, $\Delta ITC \equiv \Delta IQC$.

Obținem că $\measuredangle PID \equiv \measuredangle DIT$ și $\measuredangle TIC \equiv \measuredangle CIQ$.

Se poate arăta că ΔCDV este isoscel, unde $\{V\}=DI\cap BC$ cu CI mediană.

Ca atare, ΔDIC este dreptunghic cu $\sphericalangle DIC=90^\circ$.

Obtinem că $\sphericalangle PID+\sphericalangle CIQ=90^\circ$, deci $\sphericalangle PIQ=180^\circ$, de unde rezultă imediat concluzia.

Sau

Construim o paralelă prin I la baze care să intersecteze AB în punctul E.

Cum $\widehat{QIE}=\widehat{PIE}=90^\circ$ rezultă că $\sphericalangle PIQ=180^\circ$, de unde obținem concluzia.

ii) Știm că $DP=DT$ și $CT=CQ$.

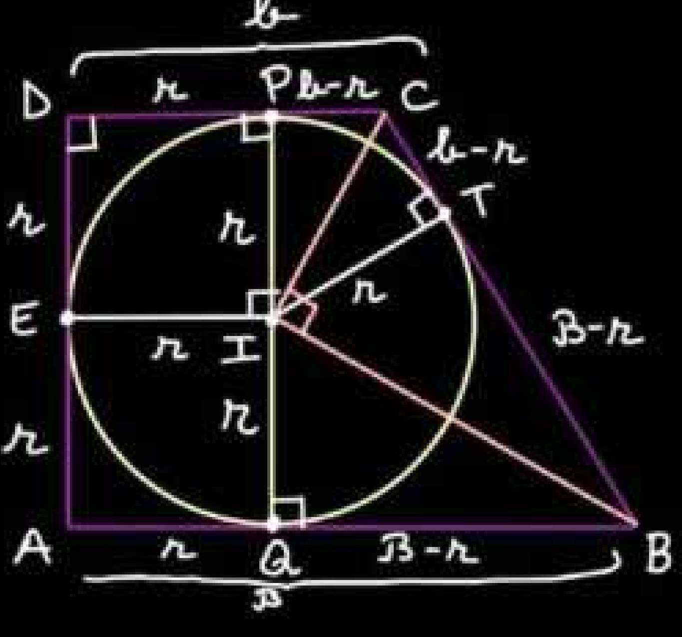
$$IT\perp DC\xRightarrow{T.h.I} IT^2=DT\cdot TC=DP\cdot CQ,$$

deci $r^2=DP\cdot CQ$.

În cazul în care trapezul este isoscel, $DP=\frac{b}{2}$ și $CQ=\frac{B}{2}$.

Așadar, $r^2=\frac{b}{2}\cdot\frac{B}{2}=\frac{B\cdot b}{4}$, de unde obținem că $r=\frac{\sqrt{B\cdot b}}{2}$.

iii) Vreau să arăt că $2r=\frac{2B\cdot b}{B+b}$, adică $r=\frac{B\cdot b}{B+b}$.



Din T. lui Pitagora avem:

$IC^2=r^2+(b-r)^2$; $IB^2=r^2+(B-r)^2$

$\sphericalangle BIC=90^\circ\xRightarrow{T.P.}$

$BC^2=r^2+(b-r)^2+r^2+(B-r)^2$

$$\therefore \Big(\underbrace{(B+b)-2r}_{\overset{\shortparallel}{BC}}\Big)^2 = r^2+(b-r)^2+r^2+(B-r)^2$$

$$(B+b)^2-4r(B+b)+4r^2 = r^2+(b-r)^2+r^2+(B-r)^2 \,\Big|-2r^2$$

$$\Rightarrow (B+b)^2-4r(B+b)+2r^2 = (b-r)^2+(B-r)^2$$

$$\Rightarrow (B+b)^2-4r(B+b)+2r^2 = b^2-2br+r^2+B^2-2Br+r^2 \,\Big|-2r^2$$

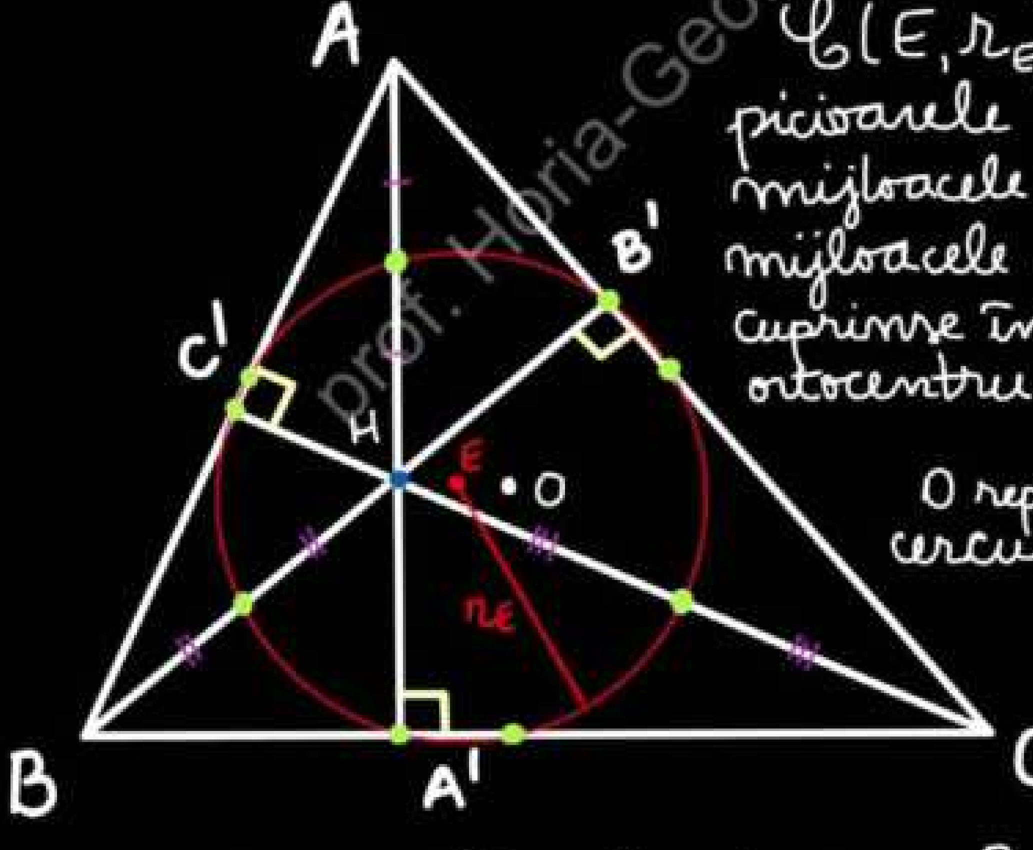
$$\Rightarrow (B+b)^2-4r(B+b) = B^2+b^2-2r(B+b)$$

$$\Rightarrow (B+b)^2-B^2-b^2 = 2r(B+b) \Rightarrow 2Bb = 2r(B+b)\,\Big|:2$$

$$\Rightarrow r = \frac{Bb}{B+b}. \ \square$$

• Cercul lui Euler (Cercul celor 9 puncte) •

$\mathcal{C}(E, r_E)$



$\mathcal{C}(E, r_E)$ trece prin picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri și ortocentru.

O reprezintă centrul cercului circumscris $\triangle ABC$;

$E = \text{mij}[HO]$ și $r_E = \frac{R}{2}$, unde R reprezintă raza cercului circumscris $\triangle ABC$.

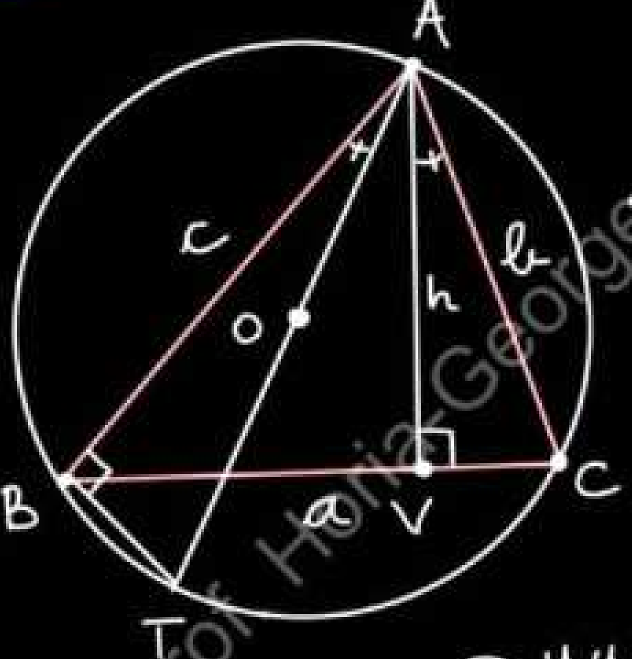
Teoremă. Fie triunghiul de laturi a, b și c. Atunci:

i) $R = \frac{abc}{4S}$, unde R reprezintă raza cercului circumscris ΔABC și $S = \mathcal{A}_{\Delta ABC}$.

ii) $r = \frac{S}{p}$, unde r reprezintă raza cercului înscris în ΔABC, $p = \frac{a+b+c}{2}$ reprezintă semiperimetrul ΔABC și $S = \mathcal{A}_{\Delta ABC}$.

Dem.

i)



Din vârful A construim diametrul AT.

$\sphericalangle ABT = 90°$

Construim $AV \perp BC$, unde $V \in BC$.

$AV \overset{not}{=} h$

$\sphericalangle BTA = \sphericalangle ACB = \overset{\frown}{AB} \overset{u.u.}{\Longrightarrow} \Delta AVC \sim \Delta ABT.$

$\Rightarrow \frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AV} \Rightarrow \frac{2R}{AC} = \frac{AB}{h} \Rightarrow 2Rh = AB \cdot AC$

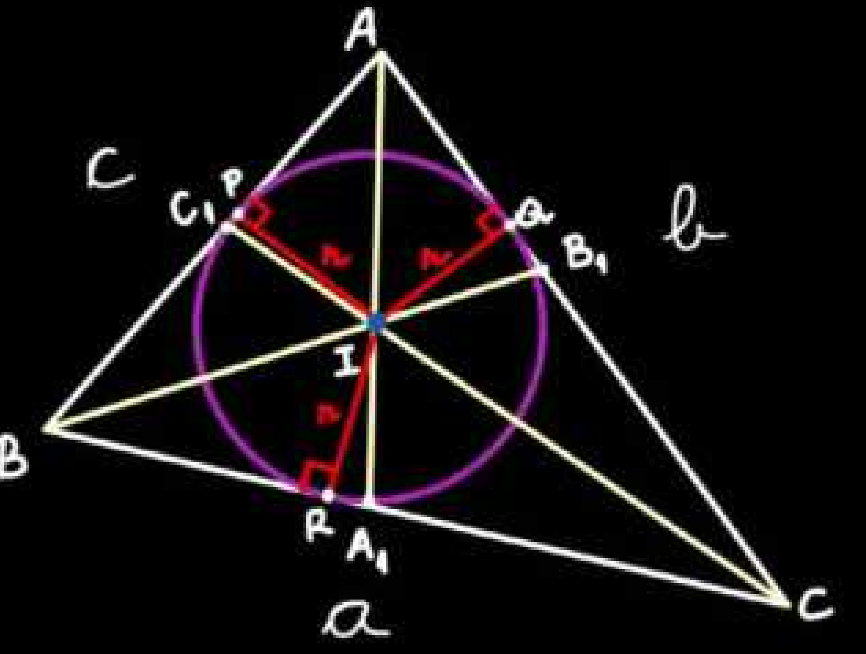
$\Rightarrow R = \frac{AB \cdot AC}{2h}.$ (*)

Cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} \overset{not}{=} S = \frac{BC \cdot h}{2}$, rezultă că $h = \frac{2S}{BC}$ (**)

Din (*) și (**) obținem că

$$R = \frac{AB \cdot AC}{\frac{4S}{BC}} = \frac{abc}{4S}.$$

ii)



$$S_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta AIB} + \mathcal{A}_{\Delta BIC} + \mathcal{A}_{\Delta AIC}$$

$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

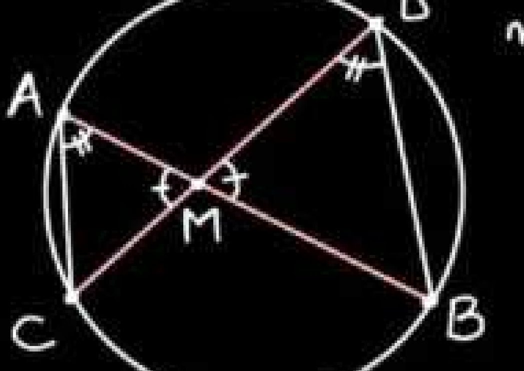
$\therefore\ S = rp.\ \square$

• Puterea unui punct față de un cerc •

<u>Teoremă</u>. Fie A, B, C, D patru puncte distincte situate pe un cerc $\mathcal{C}(O,r)$ a.î. $AB \cap CD = \{M\}$. Atunci $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

<u>Dem.</u>

• Cazul I ($M \in \text{int}\, \mathcal{C}(O,r)$)



$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle MAC) = m(\sphericalangle MDB) = m(\overset{\frown}{CB}) \\ \sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB \text{ (opuse la vârf)} \end{array}\right\} \overset{u.u.}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta AMC \sim \Delta DMC$$

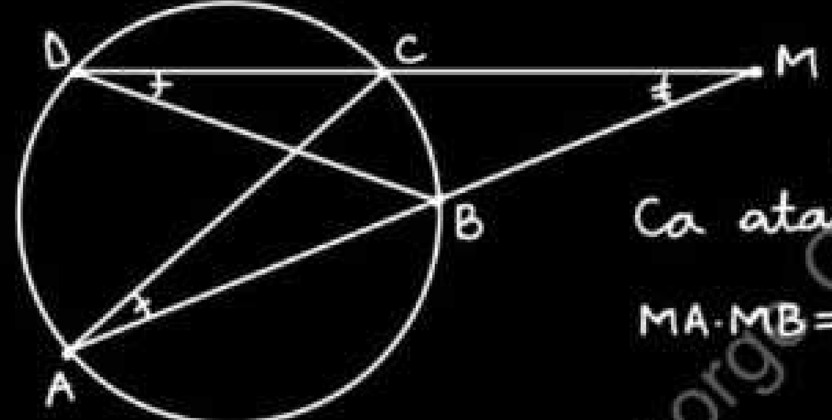
Prin urmare,

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Obs. Dacă $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,r)$, atunci pentru orice coardă (AB) care conține punctul M, produsul $MA \cdot MB$ este constaint.

Def. Valoarea constantă a acestui produs înmulțită cu (-1) se notează cu $\rho(M)$ și s.m. puterea punctului interior M față de cercul dat.

- Cazul II ($M \in \text{ext}\,\mathcal{C}(O,r)$)



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB \\ \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB\end{array}\right\} \overset{u.u.}{\Longrightarrow}$$

$\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

Ca atare, $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow$

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$. □

Valoarea constantă a produsului $MA \cdot MB$ se notează cu $\rho(M)$ și s.m. puterea punctului exterior M față de cercul $\mathcal{C}(O,r)$.

Obs.

i) Dacă $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,r)$, atunci considerând coarda AB ca fiind diametru în cerc, obținem:

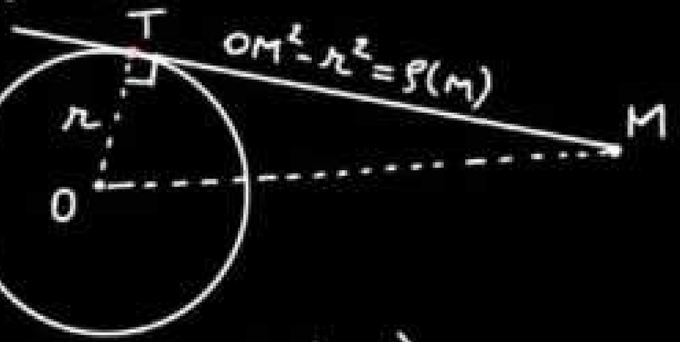
$$\rho(M) = -MA \cdot MB = -(r+OM)(r-OM) = OM^2 - r^2.$$

ii) Dacă $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O,r)$, atunci considerând $A-O-M-B$ coliniare a.î. AB să fie diametru obținem:

$$\rho(M) = MA \cdot MB = (r+OM)(OM-r) = OM^2 - r^2.$$

iii) Dacă $M \in \mathcal{C}(O,r)$, atunci $\rho(M) = 0$.

iv) Dacă MT este tangentă la cerc, unde T este punctul de tangență, atunci $MT^2 = OM^2 - r^2 = \rho(M)$.

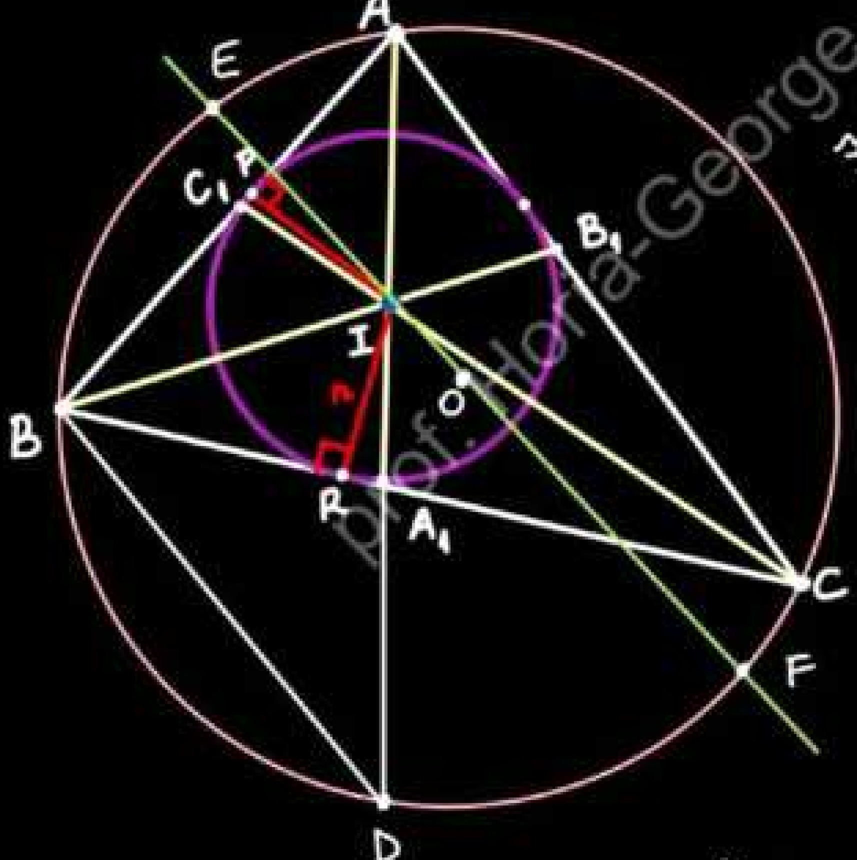


Teoremă (Relația lui Euler)

Dacă $\mathcal{C}(O,R)$ și $\mathcal{C}(I,r)$ sunt cercul circumscris, respectiv cercul înscris pentru un triunghi ABC, atunci:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r).$$

Dem.



Fie $\{D\} = AI \cap \mathcal{C}(O,R)$ și fie $\{E,F\} = \mathcal{C}(O,R) \cap OI$. În $\triangle ABD$ rezultă (aplicând T. sinusurilor) că $\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = 2R$, deci

$$BD = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Din $\triangle API$ dreptunghic rezultă că $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ (din definiția sinusului).

Evident, D este mijlocul arcului $\widehat{BC}$.

$\sphericalangle BDI \equiv \sphericalangle ACB$ (amândouă subîntind arcul $\overset{\frown}{AB}$).

$\sphericalangle IBD = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle A}{2}$ (deoarece $\sphericalangle IBD = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBD$, iar $\sphericalangle IBC = \frac{\sphericalangle B}{2}$ și $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC = \frac{\sphericalangle A}{2}$)

Ca atare,

$$\begin{aligned}\sphericalangle BID &= 180^\circ - \sphericalangle BDI - \sphericalangle IBD \\ &= 180^\circ - \sphericalangle C - \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle A}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + 2\sphericalangle C}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{\sphericalangle C}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\sphericalangle C}{2} \\ &= \frac{180^\circ - \sphericalangle C}{2} = \sphericalangle IBD, \text{ deci}\end{aligned}$$

ΔBDI este isoscel cu $DB = DI$.

Aplicând puterea punctului I față de cercul $\mathcal{C}(O,R)$, obținem:

$$\rho(I) = -IA \cdot ID = OI^2 - R^2.$$

Așadar,

$$-\frac{r}{\cancel{\sin\frac{A}{2}}} \cdot 2R \cancel{\sin\frac{A}{2}} = OI^2 - R^2 \iff$$

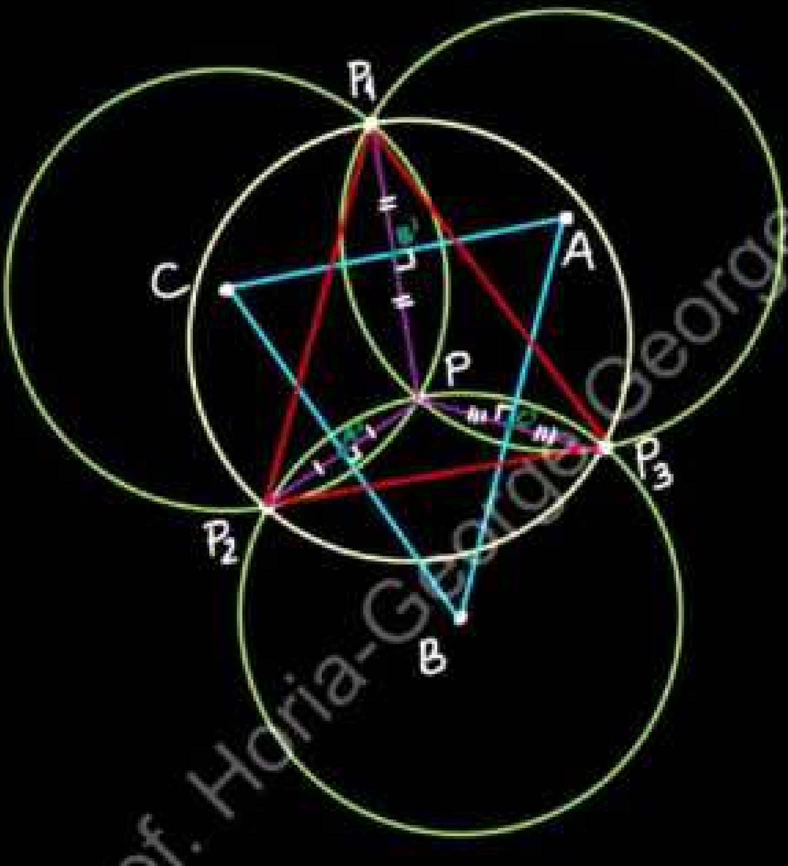
$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \square$$

Consecință

$R \geqslant 2r$ (inegalitatea lui Euler)

• Problema monedei de 5 lei
Gheorghe Țițeica •

Trei cercuri cu aceeași rază au un punct comun. Cercul care trece prin celelalte trei puncte în care cercurile se intersectează două câte două este congruent cu cercurile date.



Dem.

Al patrulea cerc este cercul circumscris $\Delta P_1P_2P_3$.

Cum $PA = PB = PC$ (raze în cercuri congruente), rezultă că cercul circumscris ΔABC este congruent cu cercurile inițiale.

Dacă aș arăta că $\Delta ABC \equiv \Delta P_1P_2P_3$, atunci cercurile lor circumscrise ar fi congruente, de unde ar rezulta concluzia.

Obs AC, BC și AB sunt mediatoarele segmentelor PP_1, PP_2, respectiv PP_3.

Așadar, $B'C'$ este l.m. atât în ΔP_1PP_3, cât și în ΔABC, de unde rezultă că $CB = P_1P_3$.

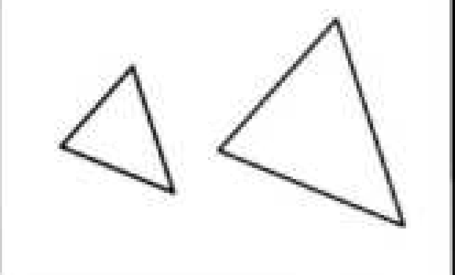
Similar se arată că $AB = P_1P_2$ și $AC = P_2P_3$.

Folosind criteriul de congruență L.L.L. rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta P_1P_2P_3$, de unde obținem concluzia.

□

Horia-George Georgescu

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR



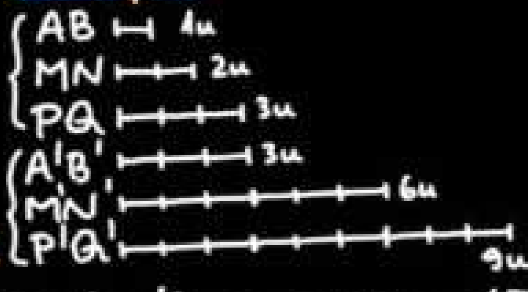
Segmente proporționale

Def. Segmentele [AB], [MN], [PQ] sunt proportionale cu segmentele [A'B'], [M'N'], [P'Q'] dacă lungimile lor sunt direct proporționale (formează un șir de rapoarte egale)

Mai exact,

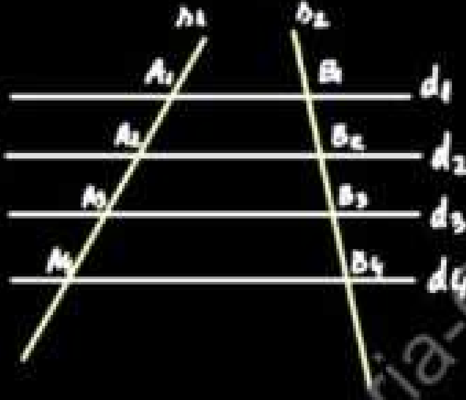
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'} = \frac{PQ}{P'Q'}$$

Exemplu:



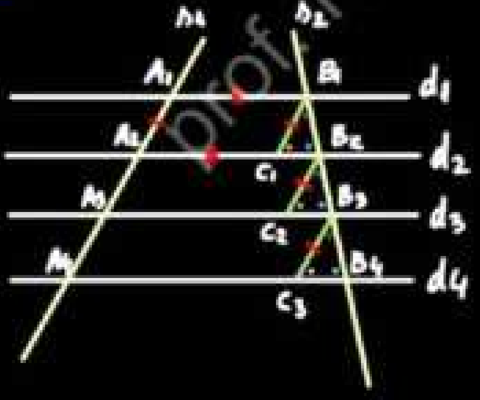
Teorema paralelelor echidistante

Dacă mai multe paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.



$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \\ A_1, A_2, A_3, A_4 \in s_1 \\ A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \end{array}\right\} B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$$

Dem.



Fie $B_1C_1 \parallel A_1A_2$, $B_2C_2 \parallel A_2A_3$ și $B_3C_3 \parallel A_3A_4$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1A_2 \parallel B_1C_1 \\ A_1B_1 \parallel A_2C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B_1C_1A_2 \text{ este paralelogram}$$

Ca atare, $B_1C_1 = A_1A_2$.

$B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3$.

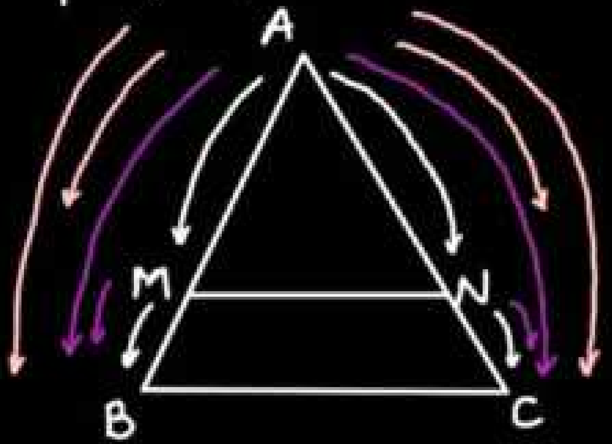
$\Delta B_1B_2C_1 \equiv \Delta B_2B_3C_2 \equiv B_3B_4C_3$ (L.U.L), de unde concluzia.

Teorema paralelelor echidistante mai apare și sub forma următoare:

Mai multe paralele echidistante (situate la aceeași distanță una de cealaltă, de exemplu liniile unui caiet dictando sau liniile de portativ) determină pe orice secantă segmente congruente.

Teorema lui Thales (T.Th)

O paralelă construită (trasată) la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente proporționale.



$MN \parallel BC \overset{T.Th}{\Longrightarrow} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

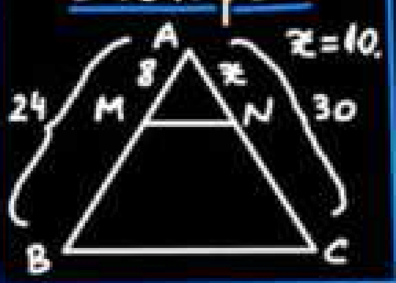
$M \in [AB]$

$N \in [AC]$

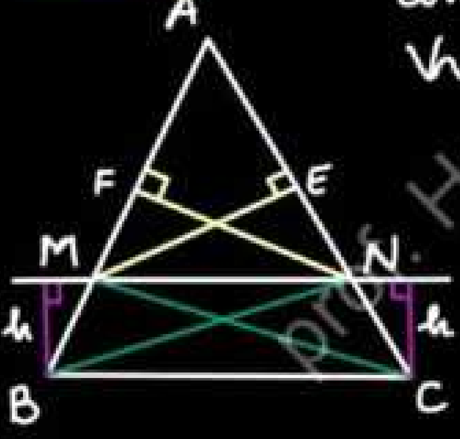
Ținând cont de proporțiile derivate, concluzia teoremei se mai poate scrie:

$(*)\ \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AC}{NC}$ sau $(*)\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ etc.

Exemplu:



Dem.



Construim $ME \perp AC$, $E \in [AC]$ și $NF \perp AB$, $F \in [AB]$.

Vrem să demonstrăm că $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$.

$$\mathcal{A}_{\Delta AMN} = \frac{AM \cdot NF}{2} = \frac{AN \cdot ME}{2}$$

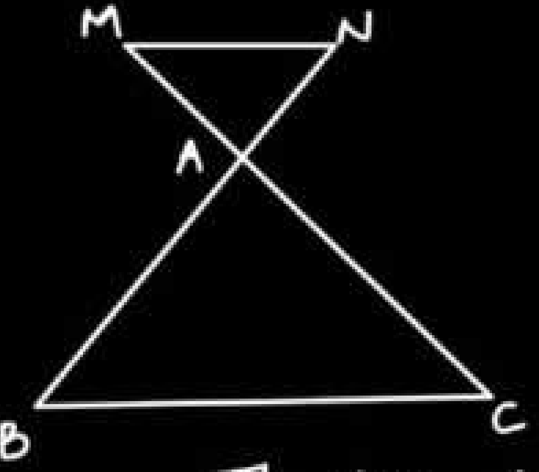
$$\mathcal{A}_{\Delta MBN} = \frac{MB \cdot NF}{2} = \frac{MN \cdot h}{2}$$

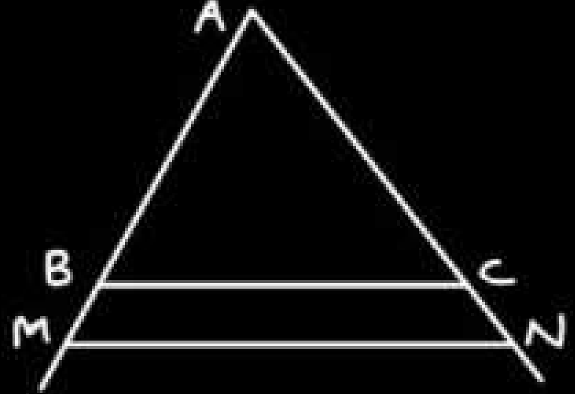
$$\mathcal{A}_{\Delta MCN} = \frac{CN \cdot ME}{2} = \frac{MN \cdot h}{2}$$

Obs. $\mathcal{A}_{\Delta MBN} = \mathcal{A}_{\Delta MCN}$, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta AMN}}{\mathcal{A}_{\Delta MBN}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta AMN}}{\mathcal{A}_{\Delta MCN}}$.

Ca atare, $\dfrac{\frac{AM \cdot NF}{2}}{\frac{MB \cdot NF}{2}} = \dfrac{\frac{AN \cdot ME}{2}}{\frac{NC \cdot ME}{2}}$, de unde obținem

$$\frac{\cancel{2} AM \cdot \cancel{NF}}{\cancel{2} MB \cdot \cancel{NF}} = \frac{\cancel{2} AN \cdot \cancel{ME}}{\cancel{2} NC \cdot \cancel{ME}} \Longleftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}. \quad \square$$

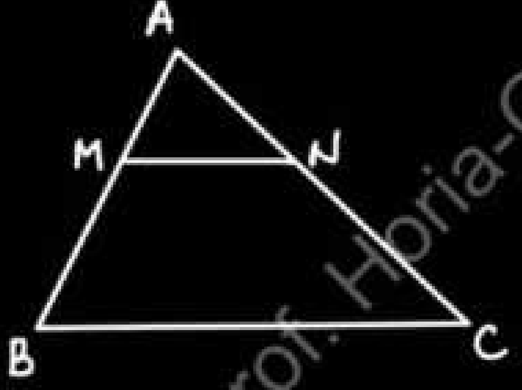




MN ∥ BC $\overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ MN ∥ BC $\overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

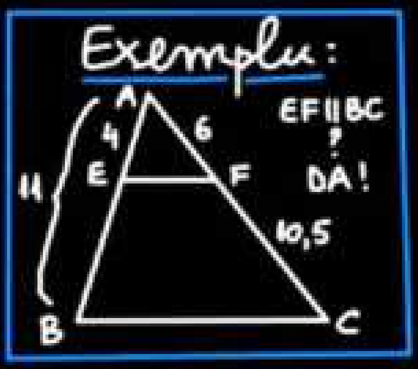
Reciproca Teoremei lui Thales (R.T.Th)

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului.



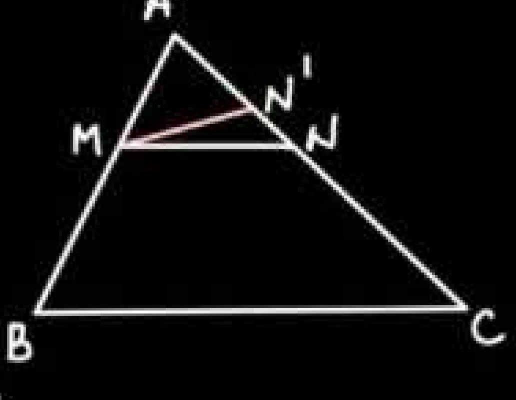
$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow}$ MN ∥ BC.

M ∈ [AB];
N ∈ [AC];



Dem.

Presupunem prin reducere la absurd că MN ∦ BC și fie MN' ∥ BC, N' ∈ [AC], M ≠ N'.



Din Teorema lui Thales avem că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN'}{N'C}$.

Cum $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ rezultă $\frac{AN}{NC} = \frac{AN'}{N'C}$

Prin urmare,

$$\frac{AN}{NC}+\overset{NC)}{1}=\frac{AN'}{N'C}+\overset{N'C)}{1} \Leftrightarrow \frac{AN+NC}{NC}=\frac{AN'+N'C}{N'C}$$

$\Leftrightarrow \frac{AC}{NC}=\frac{AC}{N'C} \Leftrightarrow NC=N'C$, deci $N=N'$ și MN' coincide cu MN. □

Morala: Teorema lui Thales ne poate ajuta să aflăm lungimile unor segmente (laturi), iar R.T.Th ne poate ajuta să verificăm (demonstrăm) dacă două drepte sunt paralele.

• Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date •

Exemplu:

Considerăm punctele A, B, C, D coliniare în această ordine.

Împărțiți segmentul AD, poziționând punctele B și C știind că:

$$\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{7}=K \text{, adică}$$

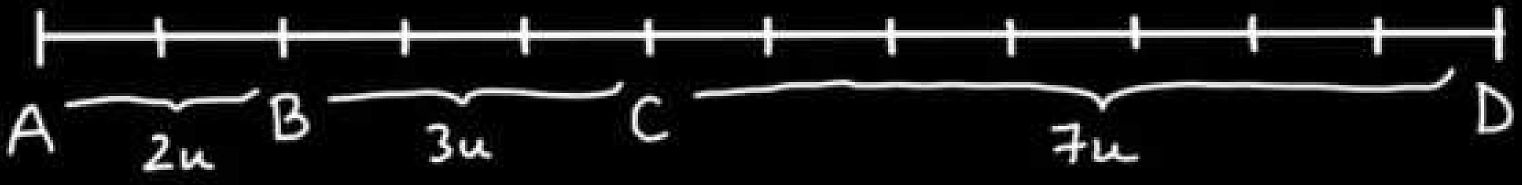
$3AB=2BC$ și $7BC=3CD$ sau, altfel scris, $AB=2K; BC=3K; CD=7K$

Procedăm astfel:

Împărțim segmentul $[AD]$ în

$2+3+7=12$ părți egale.

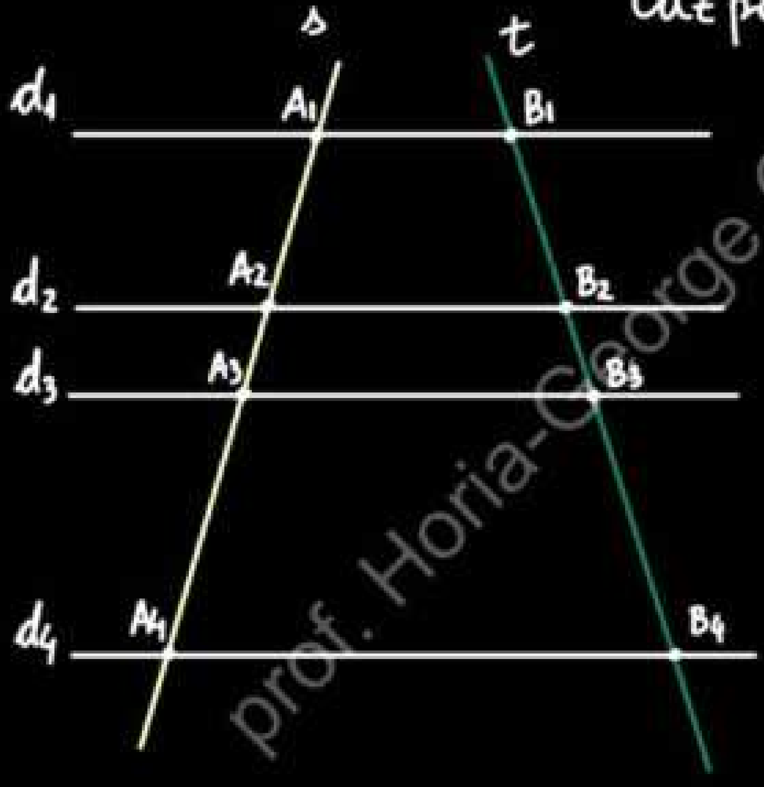
Ținem cont că $AB=2u$, $BC=3u$ și $CD=7u$.



Teorema paralelelor neechidistante

Mai multe paralele determină pe două drepte secante segmente proporționale.

Caz particular: 4 paralele.

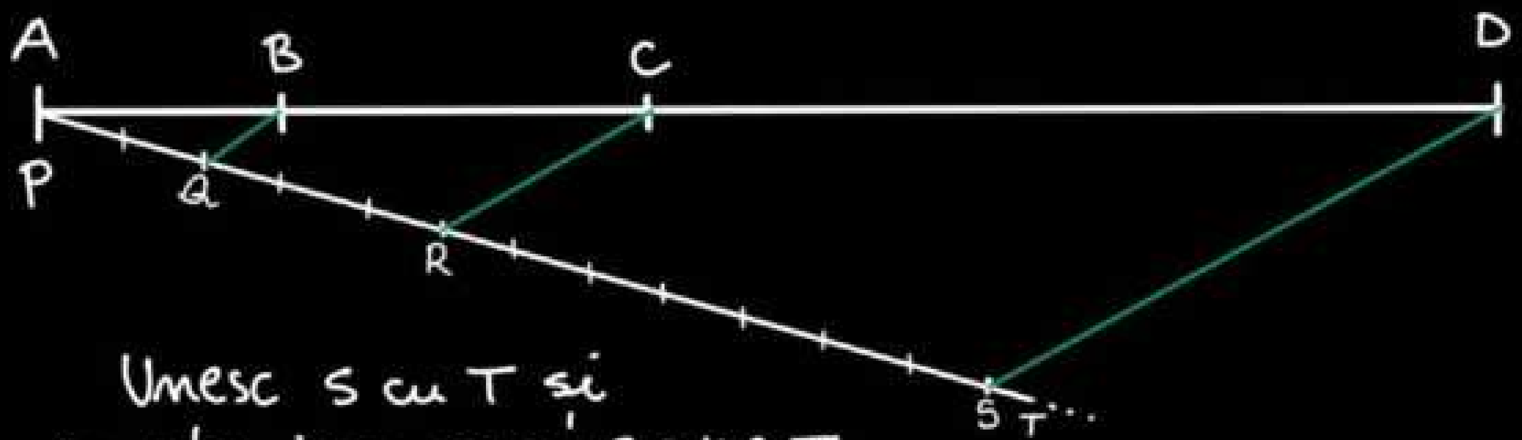


$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \\ s \cap d_1 = \{A_1\} \\ s \cap d_2 = \{A_2\} \\ \vdots \\ t \cap d_4 = \{B_3\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}$$

Obs. Dacă vrem să împărțim un segment în părți proporționale cu numerele 2, 3 și 7 putem să ne bazăm pe Teorema paralelelor neechidistante astfel:

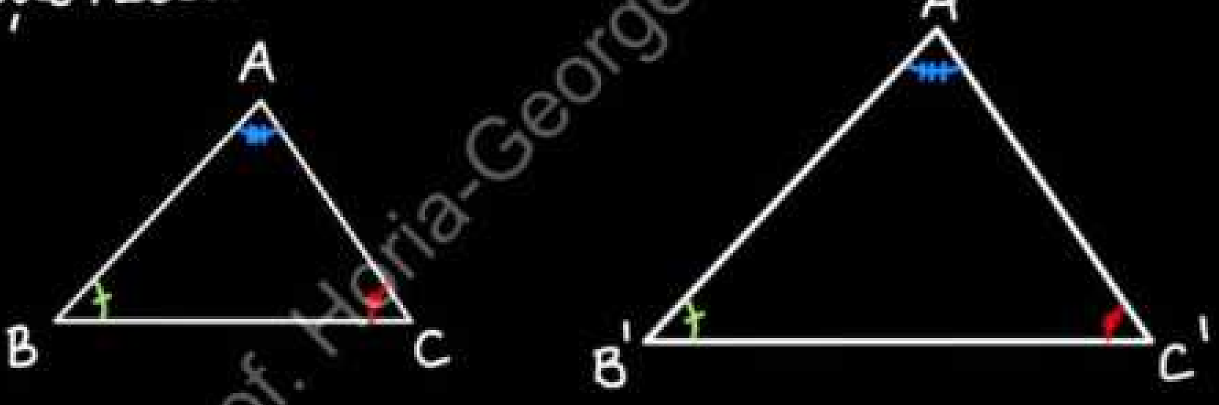
Consider semidreapta $[PT$ unde $P=A$ și o împart în segmente proporționale cu 2, 3 și 7.



Unesc S cu T și
construiesc QB‖RC‖ST.

Asemănarea triunghiurilor
Teorema fundamentală a asemănării

Def. Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile respectiv proporționale.

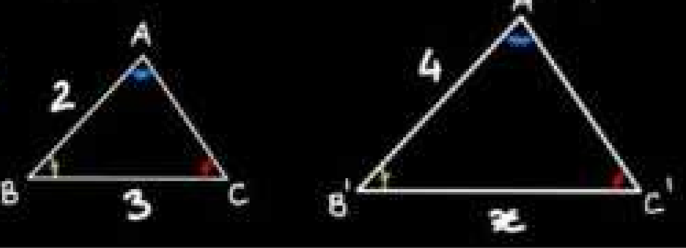


$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = K \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

(K s.m. coeficient de asemănare)

Citim: „ΔABC este asemenea cu ΔA'B'C'" sau „ΔABC și ΔA'B'C' sunt asemenea".

Exemplu:



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$B'C' = ?$

$B'C' = 6$ (detaliați)

Obs:

Ordinea literelor este importantă.

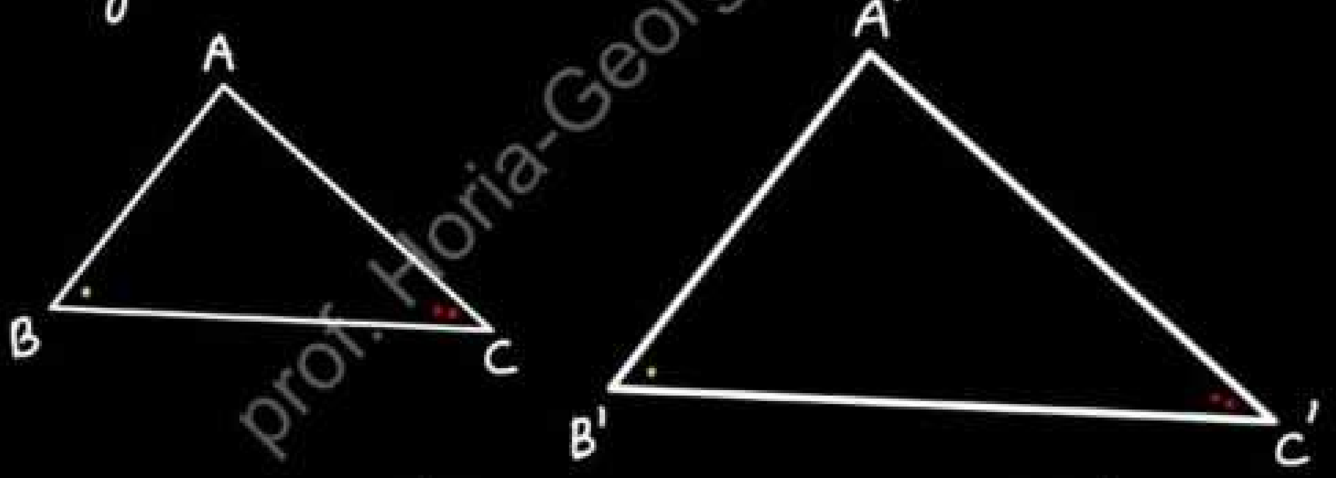
Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nu este recomandat să scriem $\triangle ABC \sim \triangle B'A'C'$.

În general, prin scrierea $\triangle \overset{\frown}{A\overset{\frown}{B}C} \sim \triangle \overset{\frown}{M\overset{\frown}{N}P}$ înțelegem că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $\underset{(*)}{\frac{AB}{MN}} = \underset{(*)}{\frac{BC}{NP}} = \underset{(*)}{\frac{AC}{MP}}$.

Criterii de asemănare a triunghiurilor

ⓘ Cazul u.u. (unghi-unghi)

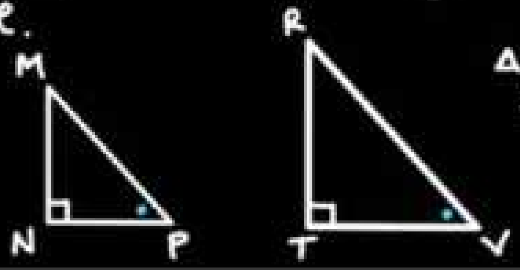
Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de unghiuri respectiv congruente.



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'\end{array}\right\} \overset{u.u.}{\Longrightarrow} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Consecință a cazului u.u.

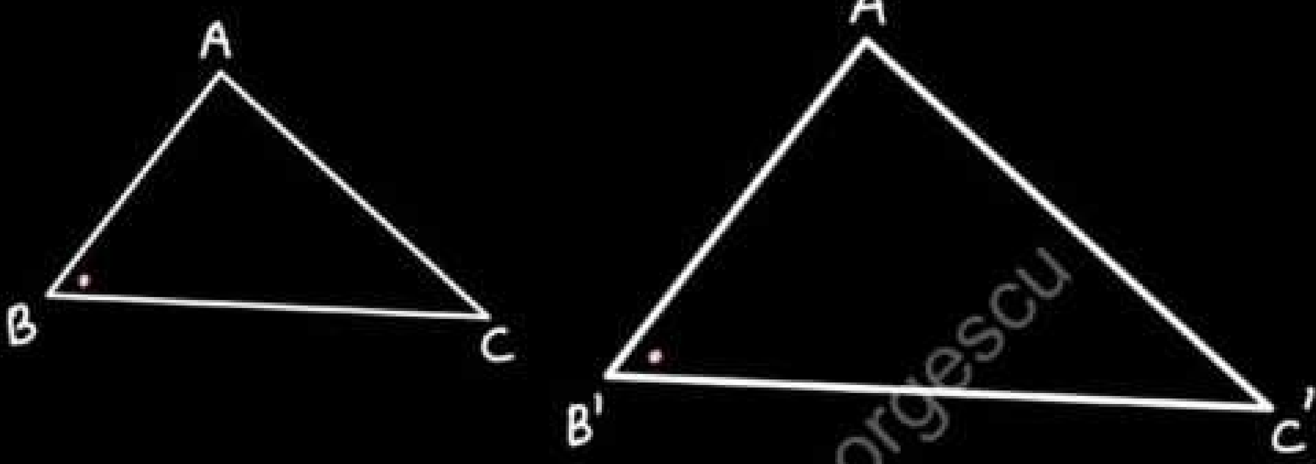
Două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă au o pereche de unghiuri ascuțite respectiv congruente.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle MNP, \triangle RTV \text{ dreptunghice} \\ \sphericalangle P = \sphericalangle V\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle RTV$$

ii) Cazul l.u.l. (latură-unghi-latură)

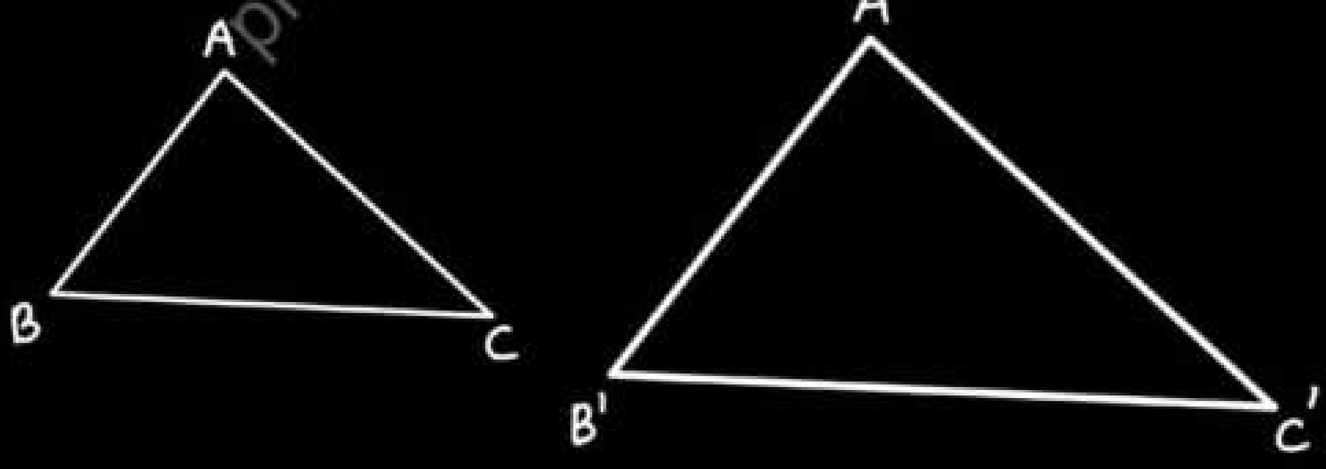
Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două perechi de laturi respectiv proporționale (două câte două) și unghiurile formate de cele două laturi respectiv congruente.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\\ \sphericalangle B=\sphericalangle B'\end{array}\right\}\overset{l.u.l.}{\Rightarrow}\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$

iii) Cazul l.l.l. (latură-latură-latură)

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale.



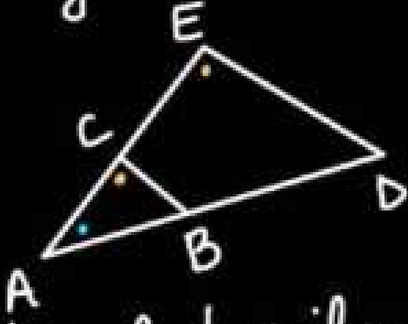
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\overset{l.l.l.}{\Longrightarrow}\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$

Demonstrațiile criteriilor de asemănare a triunghiurilor

Se pot studia după parcurgerea Teoremei fundamentale a asemănării (T.F.As).

(i) Cazul u.u.

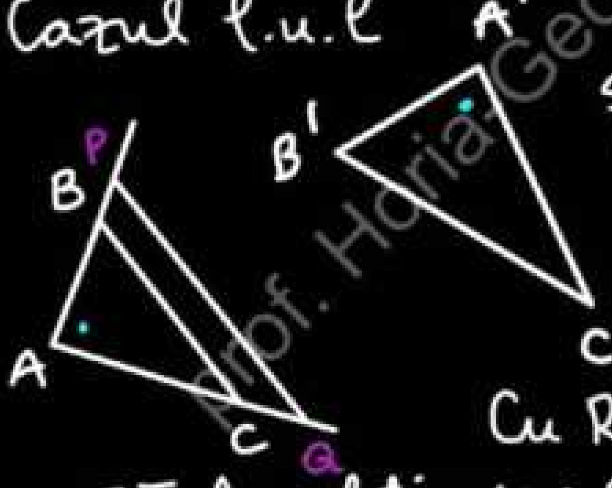
Suprapunem triunghiul „mic" peste triunghiul „mare".



Obs. $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DEA$, deci $CB \parallel ED$.

Din T.F.As rezultă proporționalitatea laturilor, iar congruența perechilor de unghiuri iese imediat.

(ii) Cazul l.u.l



Știu că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$.

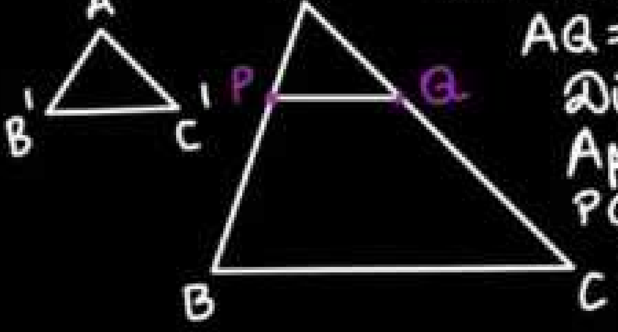
Prelungesc laturile AB și AC a.î. $AP = A'B'$ și $AQ = A'C'$.

Obs. $\Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'$.

Cu R.T.Th se arată că $BC \parallel PQ$ și cu T.F.As obținem că $\Delta ABC \sim \Delta APQ$.

Congruențele unghiurilor ies imediat.

(iii) Criteriul l.l.l.



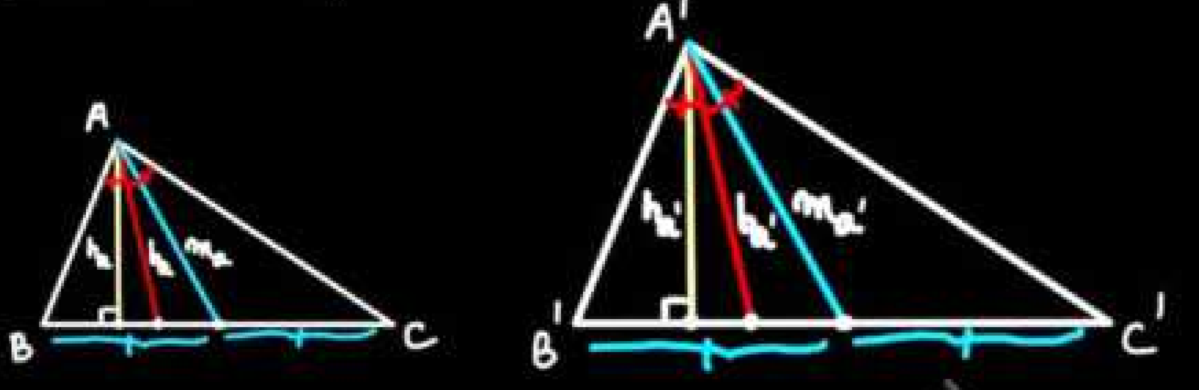
Fie $P \in [AB]$ și $Q \in [AC]$ a.î. $AP = A'B'$ și $AQ = A'C'$.

Din R.T.Th rezultă că $PQ \parallel BC$.

Aplicând T.F.As. obținem că $PQ = B'C'$, deci $\Delta A'B'C' \equiv \Delta APQ$ (l.l.l

Congruența unghiurilor reiese imediat.

Prop. Dacă două triunghiuri sunt asemenea atunci raportul liniilor importante (înălțimi, bisectoare, mediane) omoloage este egal cu valoarea raportului (coeficientului) de asemănare (K).



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{h_a}{h_a'}=\frac{b_a}{b_a'}=\frac{m_a}{m_a'}=\ldots=K.$$

Consecință. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

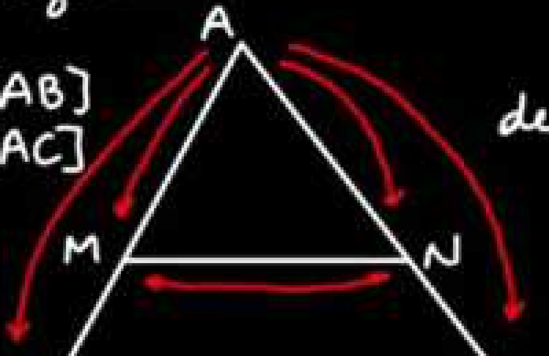
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \\ \left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=K\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{\mathcal{A}_{\Delta A'B'C'}}=K^2.$$

Dem. Se folosește formula ariei unui triunghi oarecare și Propoziția anterioară (exercițiu)

Teorema fundamentală a asemănării (T.F.A)

O paralelă dusă (construită) la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu cel dat.

$M \in [AB]$
$N \in [AC]$



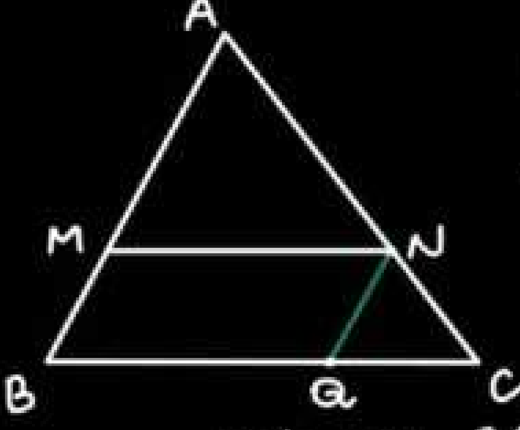
$$MN \parallel BC \overset{T.F.A.}{\Longrightarrow} \Delta AMN \sim \Delta ABC,$$

deci $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

Dem. (Nu este tocmai o dem. deoarece u.u. necesită T.F.A)

Met I. Putem folosi criteriul de asemănare u.u. (cum? exercițiu.)

Met II. (Evitarea criteriului u.u.)



$$MN \parallel BC \overset{T.Th}{\Longrightarrow} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \ (*)$$

Fie $NQ \parallel AB$, unde $Q \in [BC]$.

$$\left.\begin{matrix} NQ \parallel MB \\ MN \parallel BQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow MNQB \text{ este paralelogram,}$$

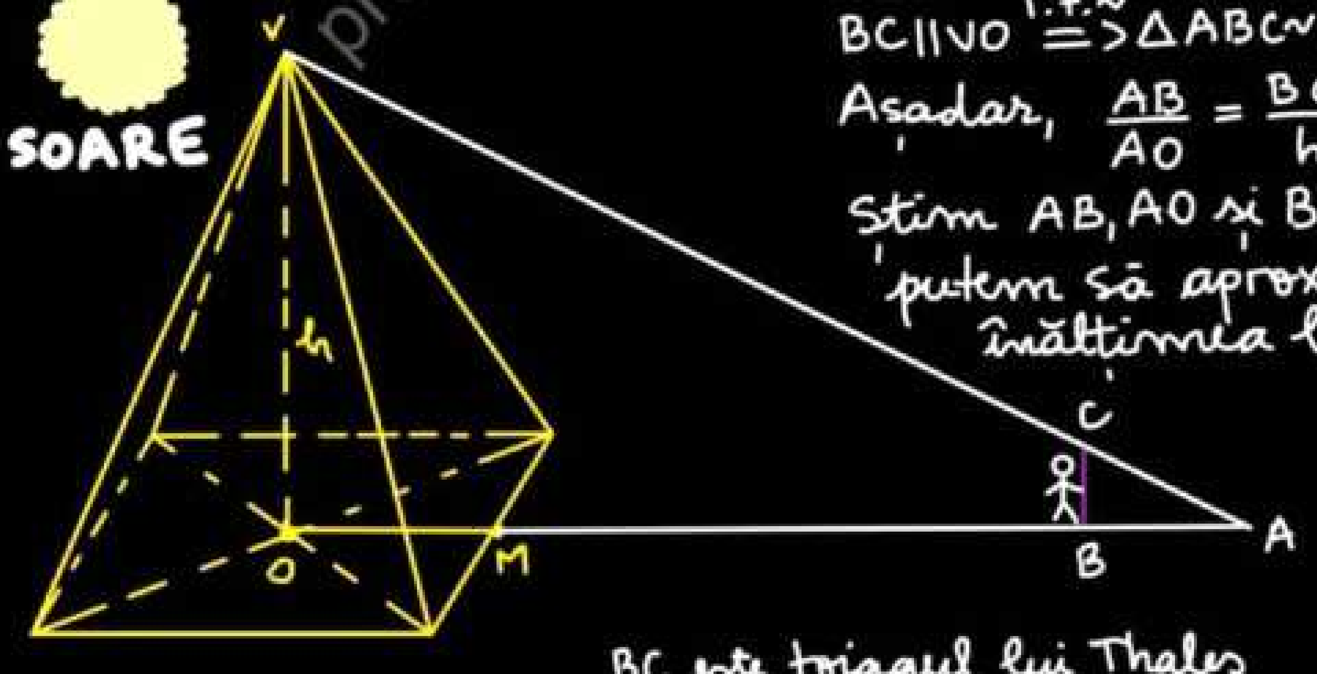
deci $BQ = MN$. $(*)$

$$NQ \parallel MB \overset{T.Th}{\Longrightarrow} \frac{AN}{AC} = \frac{BQ}{BC} \overset{(*)}{=} \frac{MN}{BC} \ (**)$$

Din $(*)$ și $(**)$ obținem $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ și ținând cont de faptul că $\measuredangle AMN \equiv \measuredangle ABC$ și că $\measuredangle ANM \equiv \measuredangle ACB$, rezultă concluzia. □

Aproximarea anumitor lungimi (distanțe)

Legendă: Cum a măsurat Thales înălțimea Piramidei lui Keops folosind un toiag.



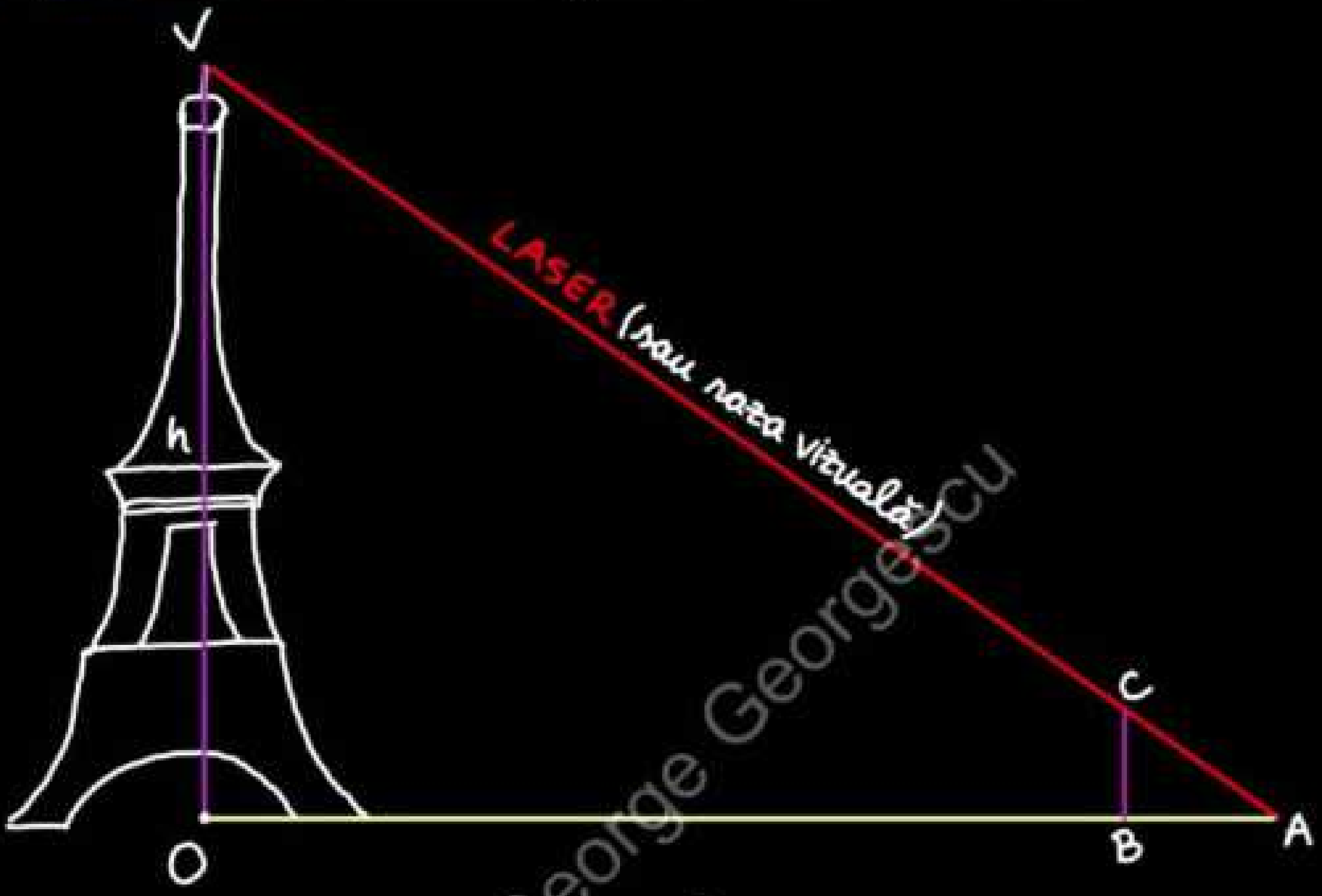
$$BC \parallel VO \overset{T.F.\sim}{\Longrightarrow} \Delta ABC \sim \Delta AOV$$

Așadar, $\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{h}$.

Știm AB, AO și BC, deci putem să aproximăm înălțimea h.

BC este toiagul lui Thales

Aproximarea înălțimii unui turn



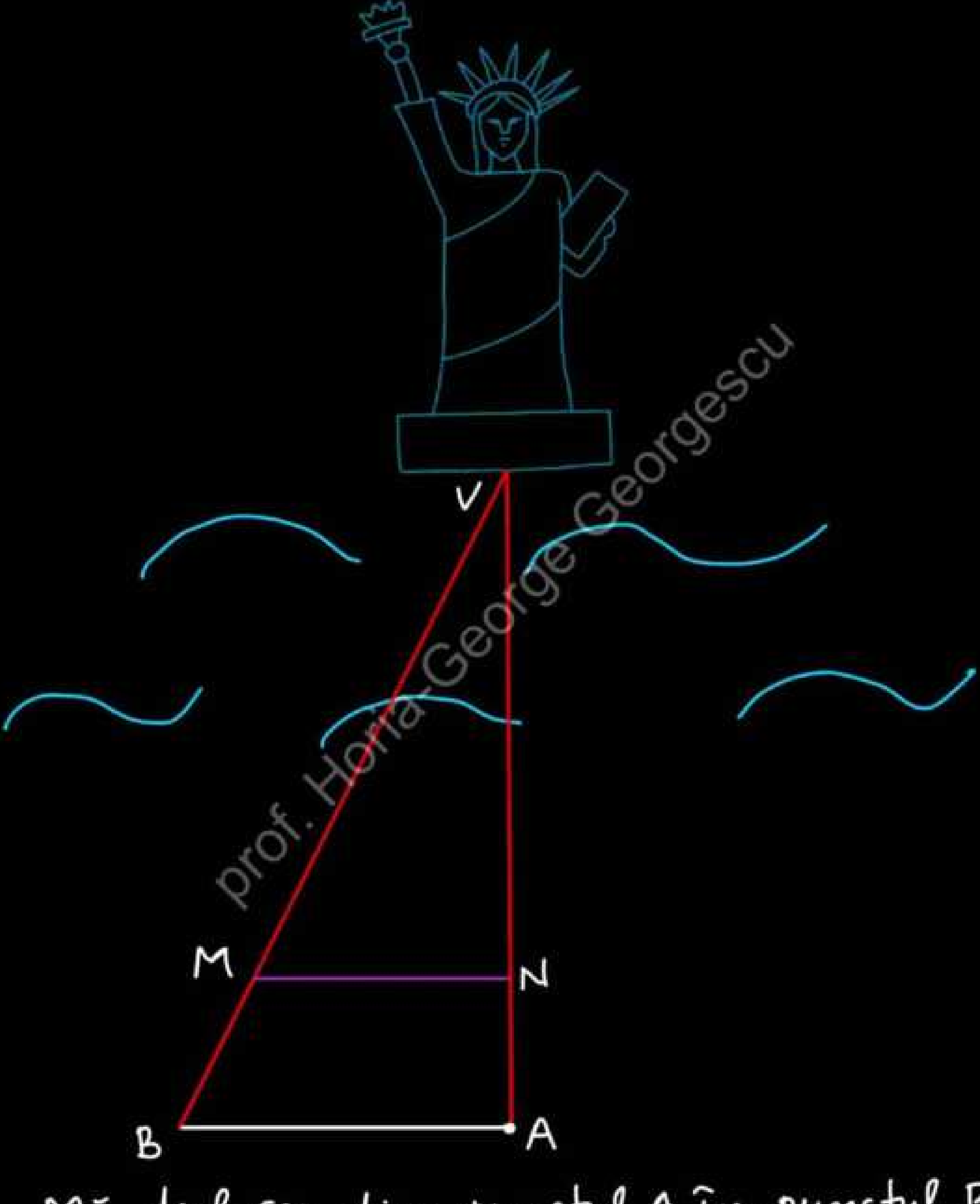
Plasăm obiectul de lungime BC.

$BC \parallel VO \overset{T.F.\sim}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta AOV$, deci

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{h}.$$

Știm AB, AO și BC, deci putem să-l aflăm pe h.

Aproximarea distanței până la un punct fix



Mă deplasez din punctul A în punctul B și apoi din punctul M aflat pe directia BV în punctul N aflat pe direcția AV a.î.

$MN \parallel AB$.

Din Teorema fundamentală a asemănări

obținem că $\Delta VMN \sim \Delta VBA$

$$\frac{VN}{VA} = \frac{MN}{AB}$$

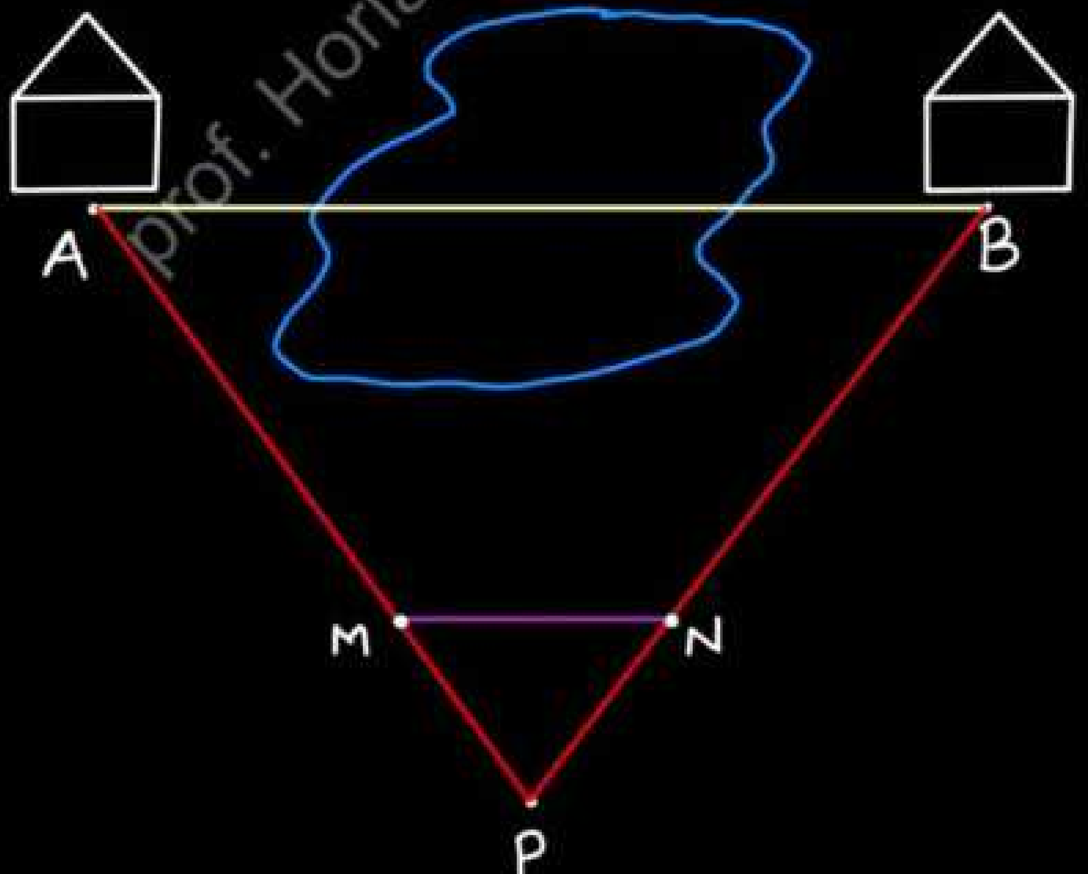
Obs. $VA = VN + NA$, deci $VN = VA - NA$.

Așadar,

$$\frac{VN}{VN+NA} = \frac{MN}{AB}.$$

Știu AN, MN și AB, deci pot să-l aflu pe VN și apoi distanța VA.

Aproximarea distanței dintre două puncte



Fixez direcțiile PA și PB. Măsor lungimea segmentului MN construit a.î. să fie paralel cu AB ($M \in PA, N \in PB$).

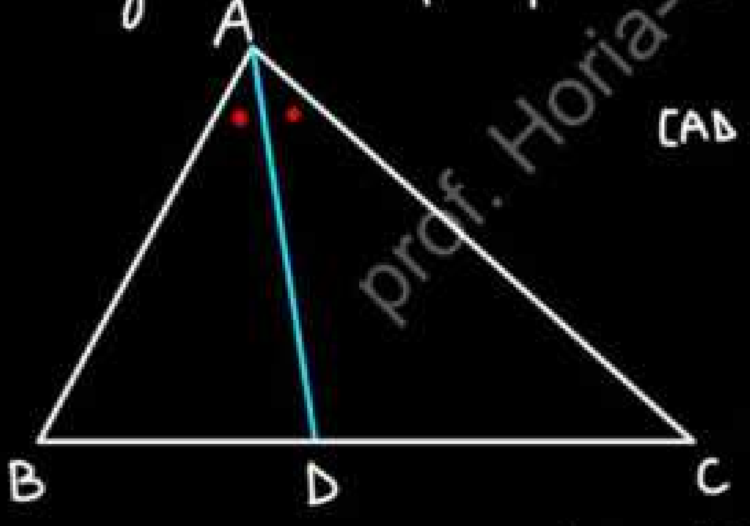
$$MN \parallel AB \overset{T.F.\sim}{\Longrightarrow} \Delta PMN \sim \Delta PAB, \text{ deci}$$

$$\frac{PN}{PB} = \frac{MN}{AB}$$

Știu PN, PB și MN, deci pot să aflu distanța AB.

Teorema bisectoarei

Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile unghiului.



$[AD$ bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{CA}$

Obs. Înlocuind în proporția de mai sus punctul D cu A', valoarea raportului nu se modifică.

Proporție derivată utilă: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{DC}$.

Dem.

Met I. (Teorema sinusurilor)

Aplicăm Teorema sinusurilor în ΔADB și ΔADC și obținem:

$$\frac{BD}{\sin\sphericalangle BAD} = \frac{AB}{\sin\sphericalangle ADB} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\sin\sphericalangle ADB}{\sin\sphericalangle BAD}$$

$$\frac{DC}{\sin\sphericalangle DAC} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle ADC} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{\sin\sphericalangle ADC}{\sin\sphericalangle DAC}$$

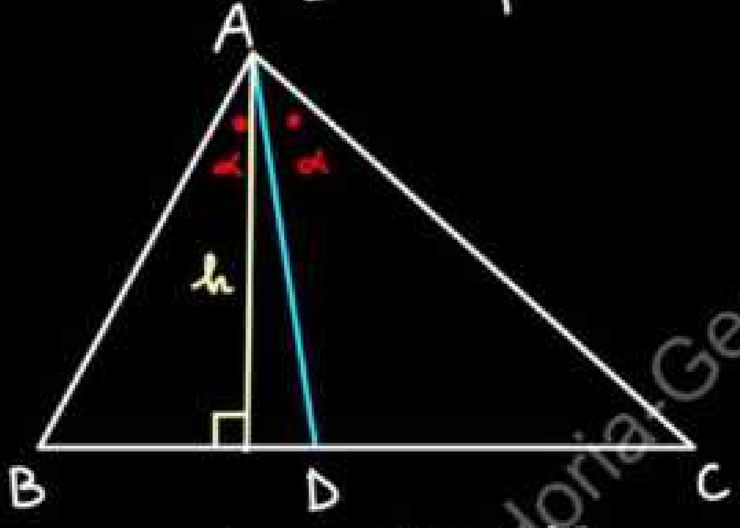
Deoarece $\sin(180^\circ - x) = \sin x$, obținem că

$$\sin\sphericalangle ADB = \sin\sphericalangle ADC.$$

Cum $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$ rezultă imediat că

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}. \quad \square$$

Met II. (Rapoarte de arii)

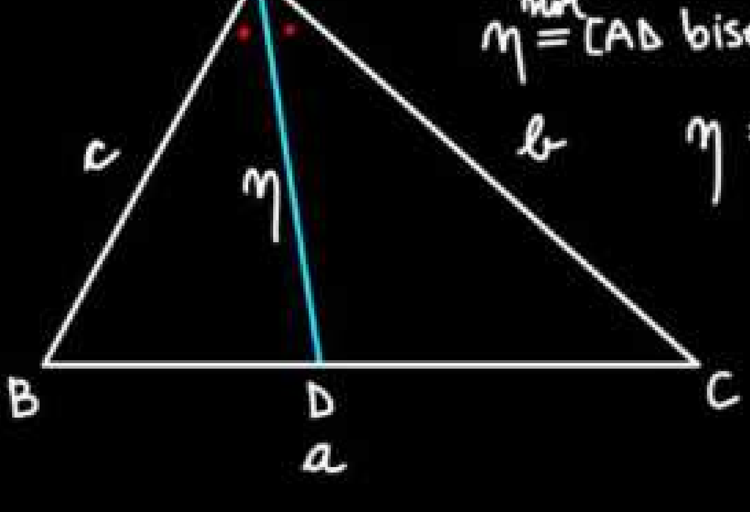


$$\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABD}}{\mathcal{A}_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABD}}{\mathcal{A}_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot \sin\alpha} = \frac{AB}{AC}$$

Ca atare, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Teoremă (Lungimea bisectoarei)

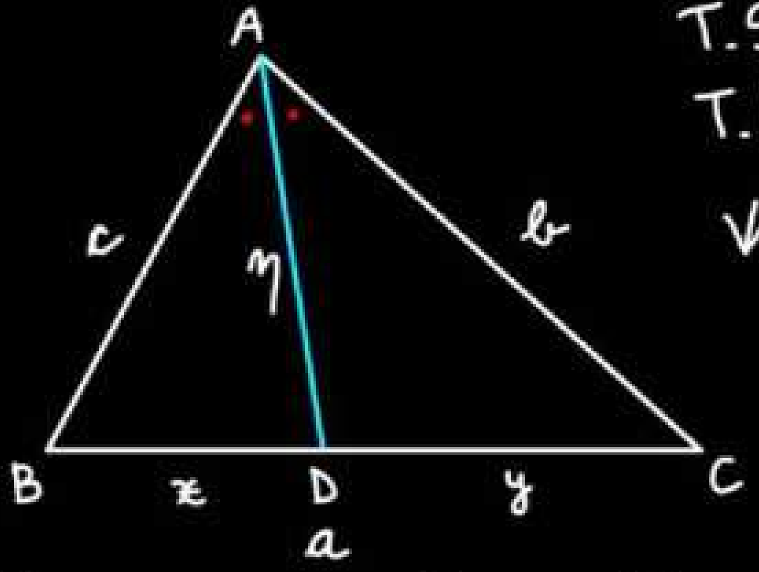


$\eta \overset{not}{=} [AD$ bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow$

$$\eta = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}, \text{ unde}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dem. Reiese din Teorema bisectoarei și din Teorema lui Stewart astfel:



T. Stewart: $a(\eta^2+xy)=b^2x+c^2y$

T. bisectoarei: $\frac{c}{x}=\frac{b}{y} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{c}{b}$

Vreau să ajung la

$$\eta=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}.$$

Deoarece $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ și știind că $y=a-x$ și $x=a-y$ obținem:

$$x=\frac{yc}{b}=\frac{(a-x)c}{b}=\frac{ac-cx}{b} \Rightarrow xb+cx=ac$$

$$\Rightarrow x(b+c)=ac \Rightarrow x=\frac{ac}{b+c}.$$

Similar, $y=\frac{ab}{b+c}$

Înlocuind în relatia lui Stewart, avem:

$$a\left(\eta^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)=\frac{acb^2}{b+c}+\frac{abc^2}{b+c} \;\Big|\cdot\frac{(b+c)^2}{a}$$

$$\Rightarrow \eta^2(b+c)^2+a^2bc=cb^2(b+c)+bc^2(b+c)$$

$$\Rightarrow \eta^2(b+c)^2=bc(\underbrace{b^2+bc+bc+c^2}_{(b+c)^2})-a^2bc$$

$$\Rightarrow \eta^2(b+c)^2=bc\left[(b+c)^2-a^2\right]$$

$$\Rightarrow \eta^2(b+c)^2=bc(b+c-a)(b+c+a)$$

Știind că $a+b+c=2p$ și $b+c-a=2p-2a=2(p-a)$

obținem: $\eta^2(b+c)^2=bc\cdot 2(p-a)\cdot 2p$

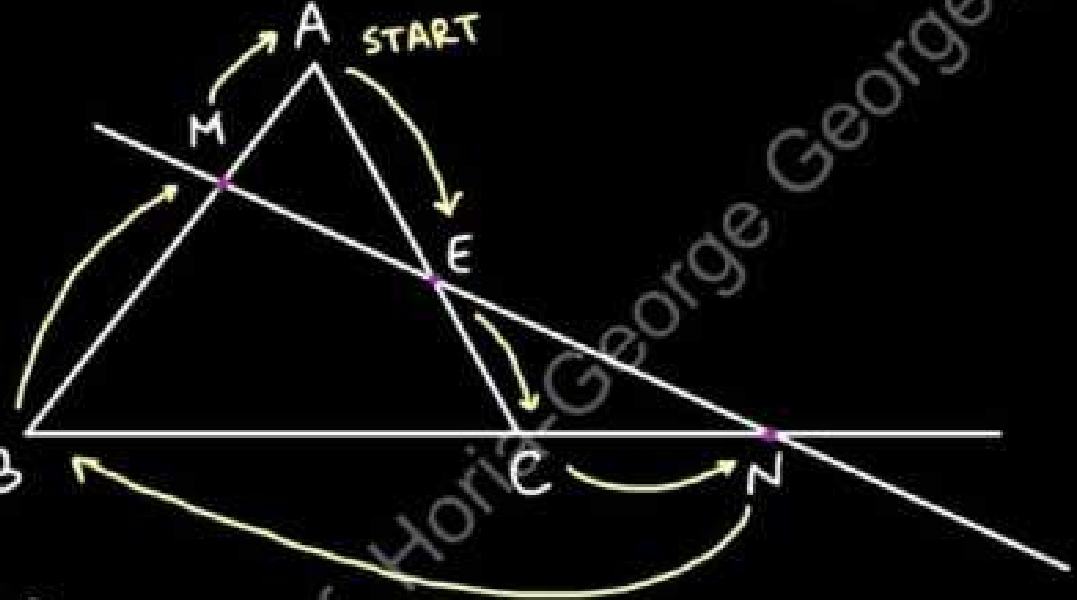
$$\Rightarrow \eta^2(b+c)^2=4bcp(p-a) \Rightarrow \eta^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \quad \square.$$

Probleme de coliniaritate

Teorema lui Menelaus (T.M.)

Dacă punctele M, E, N se află pe dreptele AB, AC și BC ale ΔABC, atunci M, E și N sunt coliniare dacă și numai dacă are loc relația:

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}=1.$$



Dem.

"=>" Fie M, E, N coliniare. Vreau să arăt că

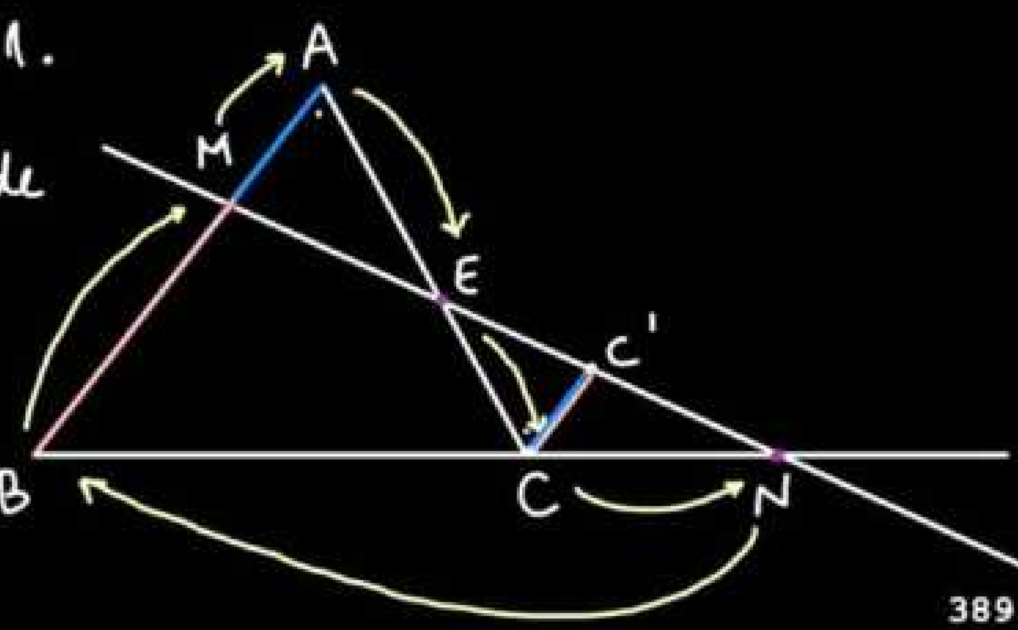
$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}=1.$$

Fie $CC' \parallel AB$, unde $C' \in [EN]$.

$CC' \parallel AM \overset{T.F.A}{\Rightarrow}$

$\Delta ECC' \sim \Delta EAM$, deci

$$\boxed{\frac{EC}{EA}}=\frac{CC'}{AM}=\cancel{\frac{EC'}{EM}}.$$



$CC' \parallel BM \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \triangle CC'N \sim \triangle BMN$, deci

$$\frac{CC'}{BM}=\frac{\cancel{C'N}}{\cancel{MN}}=\boxed{\frac{CN}{BN}}.$$

Ne rezumăm la egalitățile:

$$\frac{EC}{EA}=\frac{CC'}{AM} \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AM}{CC'}$$

și

$$\frac{CC'}{BM}=\frac{CN}{BN}$$

$$\frac{AM}{\cancel{CC'}}\cdot\frac{\cancel{CC'}}{BM}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB} \Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB} \Big| \cdot\frac{BM}{MA}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}=1. \ \square$$

Reciproca Teoremei lui Menelaus (R.T.M.)

"$\Leftarrow$" Știu că $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BM}{MA}=1$. (*) Vreau să arăt că M, E, N sunt coliniare.

Presupunem prin reducere la absurd că M, E, N nu sunt coliniare.

Fie $NE \cap AB = \{M'\}$.

Acest punct de intersecție (M') există deoarece dacă nu ar exista, atunci $NE \parallel AB$ și din T. lui Thales în $\triangle ABC$ ar rezulta că

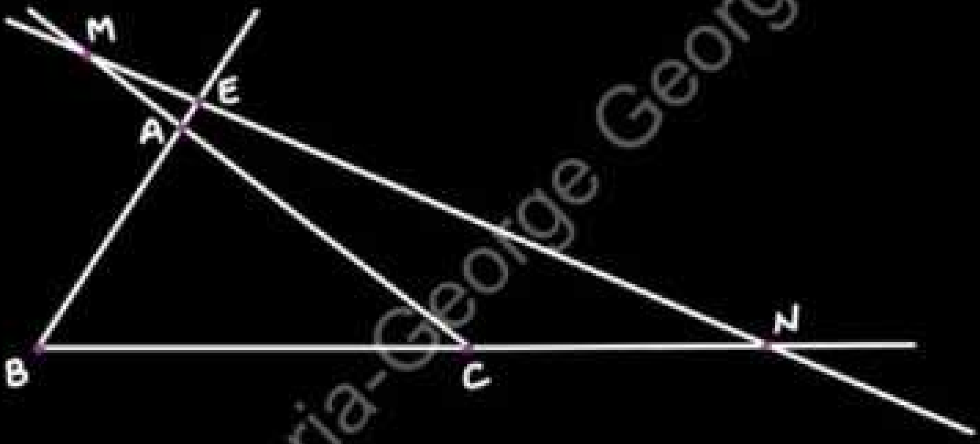
$$\frac{NB}{NC}=\frac{EA}{EC},$$ deci din (*) ar

rezulta că $\frac{BM}{MA}=1$, imposibil ca M să fie mijlocul laturii AB.

Cum M', E, N sunt coliniare, putem aplica Teorema lui Menelaus și obținem că $\frac{BM'}{M'A}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CN}{NB}=1$, deci $\frac{BM'}{M'A}=\frac{BM}{MA}$, ceea ce ne conduce la faptul că $M=M'$. □

Obs

Teorema lui Menelaus rămâne valabilă și dacă transversala M-E-N intersectează prelungirile laturilor ΔABC:



Metode prin care putem demonstra coliniaritatea a trei puncte

i) Folosind identitatea AB+BC = AC

ii) Utilizând reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf

iii) Folosind unghiul ascutit

iv) Observarea faptului că ele se află pe o linie importantă (mediatoare, bisectoare, înălțime, linie mijlocie etc.)

v) Folosind Axioma paralelelor (Euclid)

vi) Folosind Reciproca Teoremei lui Menelaus

vii) Folosind unicitatea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă

viii) Folosind proprietățile paralelogramului

ix) Folosind axioma (de incidență): „Dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă.

x) Folosind transformări geometrice.

xi) Metoda vectorială

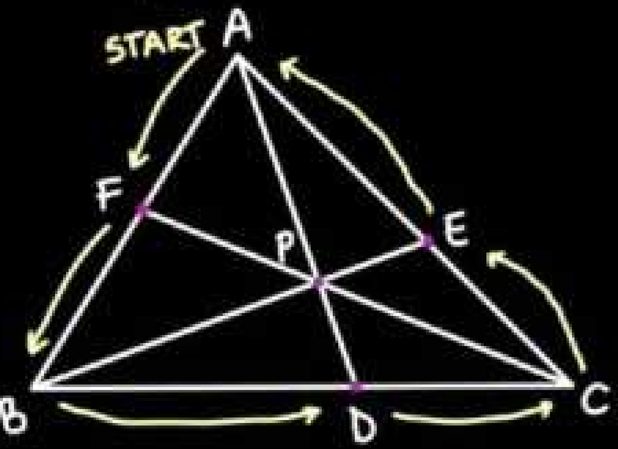
xii) Metoda numerelor complexe

xiii) Metoda analitică

Probleme de concurență

Teorema lui Ceva (Giovanni Ceva și Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud)

Fie triunghiul ABC și D, E, F trei puncte aflate pe laturile [BC], [CA] și respectiv [AB]. Dreptele AD, BE și CF sunt concurente dacă și numai dacă



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

AD, BE și CF s.n. ceviane.

Obs. O dreaptă care unește un vârf al unui triunghi cu un punct de pe latura opusă s.n. ceviană.

Dem.

"=>" Știu că $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$. Vreau să demonstrez că $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

Aplicăm T. lui Menelaus în ΔABD cu secanta CF și obținem:

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{CD}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1 \overset{\text{inversăm}}{\underset{\text{rapoartele}}{\Longrightarrow}}$$

$$\frac{PD}{AP}\cdot\frac{CB}{CD}\cdot\frac{FA}{BF}=1 \Big| \frac{FB}{FA}\cdot\frac{CD}{CB} \Rightarrow$$

$$\frac{PD}{PA}=\frac{FB}{FA}\cdot\frac{CD}{CB} \quad (*)$$

Aplicăm T. lui Menelaus în ΔADC cu secanta BE și obținem:

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \overset{\text{inversăm}}{\underset{\text{rapoartele}}{\Longrightarrow}}$$

$$\frac{PD}{AP}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}=1 \quad (**)$$

Din (*) și (**) obținem: $\frac{FB}{FA}\cdot\frac{CD}{\cancel{CB}}\cdot\frac{\cancel{BC}}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}=1$, deci (inversând rapoartele) rezultă $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, ceea ce trebuia demonstrat.

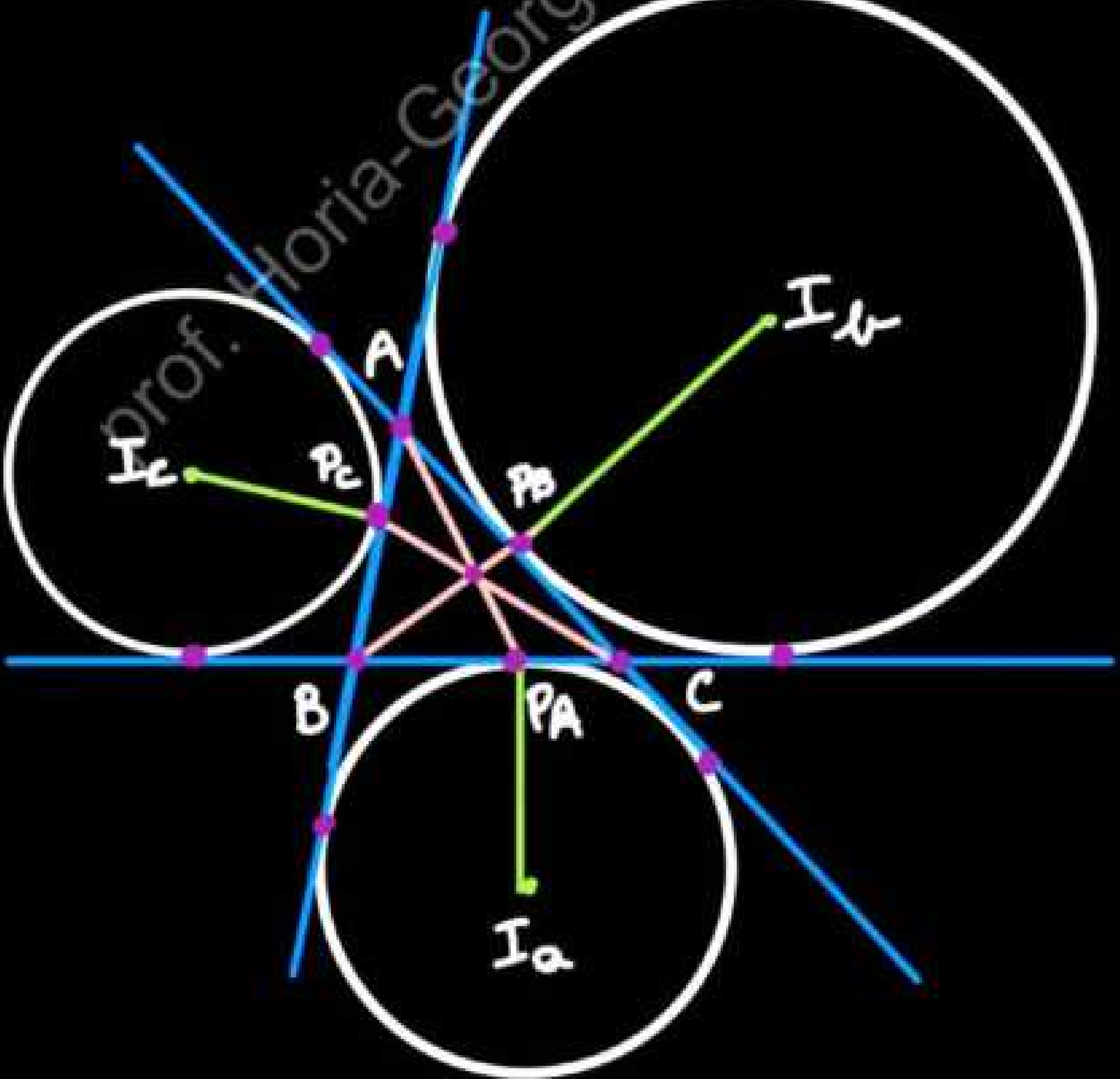
"⟸" Reciproca Teoremei lui Ceva (R.T. Ceva)

Știm că $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. Vrem să demonstrăm că AD, BE și CF sunt concurente în punctul P.

Presupunem prin reducere la absurd că AD nu trece prin punctul P, $\{P\}=CF\cap BE$ și fie $\{P'\}=AP\cap BC$. Aplicând T. lui Ceva pentru punctele E, F, P' rezultă că $P=P'$. □

Punctul lui Nagel

Considerăm $\triangle ABC$ și P_a, P_b și P_c punctele de contact dintre cercurile A-exînscris, B-exînscris și C-exînscris cu laturile BC, CA, respectiv AB.



Teorema lui Nagel.

Dreptele AP_A, BP_B și CP_c sunt concurente.

Dem. Fie a, b, c lungimile laturilor ΔABC și $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Notăm $BP_a = x$, $P_aC = y$.

Atunci $x+y=a$ și $x+c=y+b$, deci $x=p-c$ și $y=p-b$, de unde rezultă că $\frac{P_aB}{P_aC} = \frac{p-c}{p-b}$. Analog $\frac{P_bC}{P_bA} = \frac{p-a}{p-c}$ și $\frac{P_cA}{P_cB} = \frac{p-b}{p-a}$.

Obținem

$$\frac{P_aB}{P_aC} \cdot \frac{P_bC}{P_bA} \cdot \frac{P_cA}{P_cB} = 1 \xRightarrow{\text{R.T. Ceva}}$$

AP_a, BP_b, CP_c sunt concurente.

□

Metode prin care putem demonstra concurența a trei drepte

i) Folosind definitia (arătăm că există un punct comun dreptelor)

ii) Arătăm că punctul de intersectie a două drepte aparține și celei de a treia drepte

iii) Folosim teoreme referitoare la liniile importante în triunghi

iv) Reciproca Teoremei lui Ceva

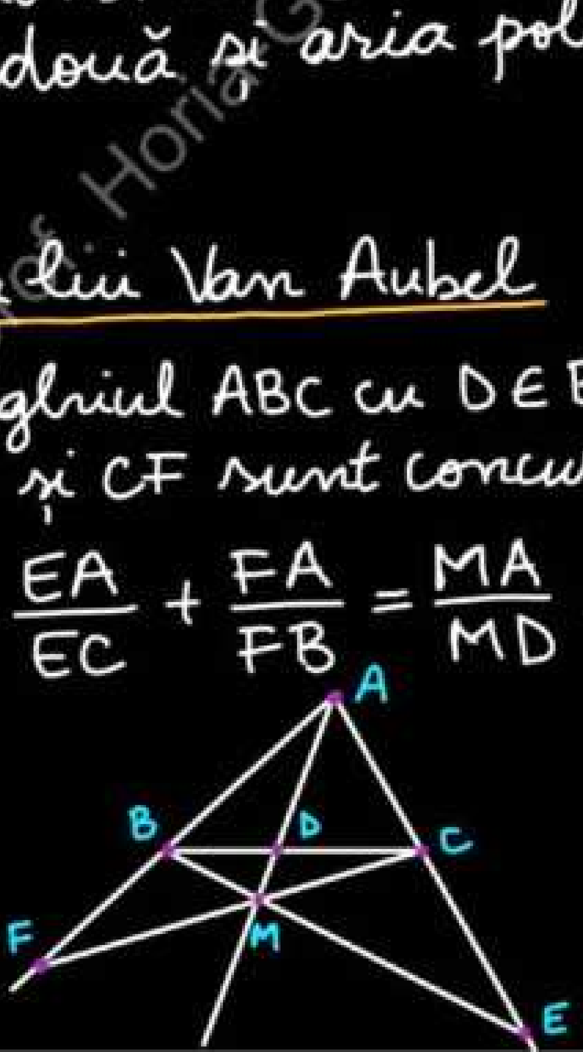
v) Metoda analitică

vi) Demonstrăm că ele se intersectează două câte două și aria poligonului obținut este 0.

Teorema lui Van Aubel

Fie triunghiul ABC cu $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$. Dacă AD, BE și CF sunt concurente în M, atunci

$$\frac{EA}{EC}+\frac{FA}{FB}=\frac{MA}{MD}.$$



Dem.

Aplicăm T. lui Menelaus în ΔABD cu secanta FC și obținem:

$$\frac{FB}{AF}\cdot\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DC}{CB}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DC}{CB}=\frac{AF}{FB} \quad (*)$$

Aplicăm T. lui Menelaus în ΔADC cu secanta BE și obținem:

$$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AM}{MD}\cdot\frac{BD}{BC}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{AE}{CE} \quad (**)$$

Din $(*)$ și $(**)$ rezultă (adunând cele două relații):

$$\frac{AM}{MD}\left(\frac{DC}{BC}+\frac{BD}{BC}\right)=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{CE} \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{\cancel{BC}}{\cancel{BC}}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{CE} \Rightarrow$$

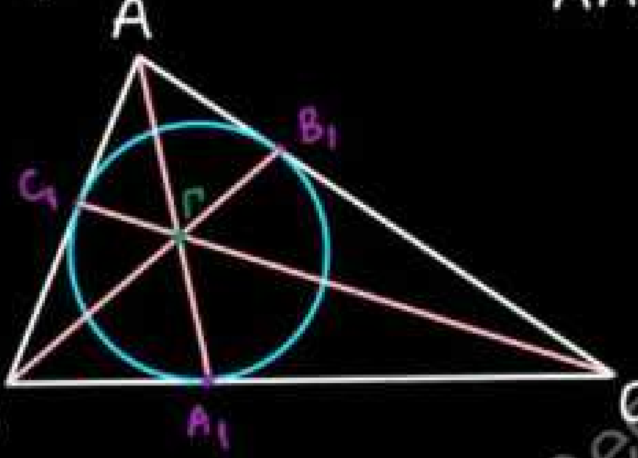
$$\frac{EA}{EC}+\frac{FA}{FB}=\frac{MA}{MD}. \quad \square$$

Teoremă (Punctul lui Gergonne)

Fie ΔABC oarecare și A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, AC și AB.

Atunci AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente într-un punct Γ care s.n. punctul lui Gergonne.

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{\Gamma\}$$



Dem.

Știm că segmentele determinate de un punct exterior unui cerc și punctul de tangență au lungimi egale.

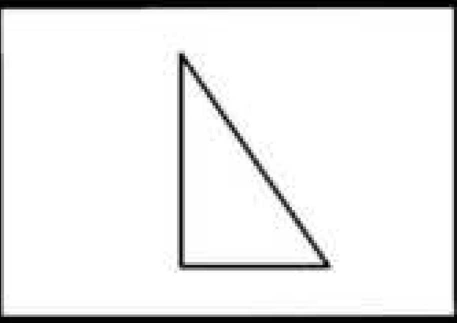
Așadar,

$$AB_1 = AC_1,\quad BC_1 = BA_1 \text{ și } CB_1 = CA_1.$$

Aplicând Reciproca Teoremei lui Ceva rezultă concluzia.

Horia-George Georgescu

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

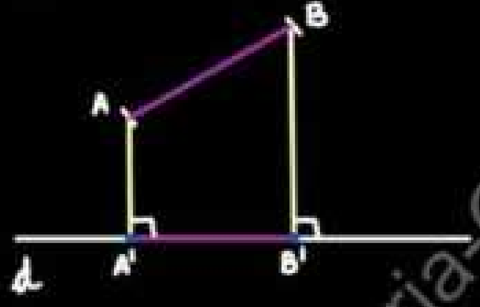


Proiecții ortogonale

Def. Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă reprezintă piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe dreaptă.

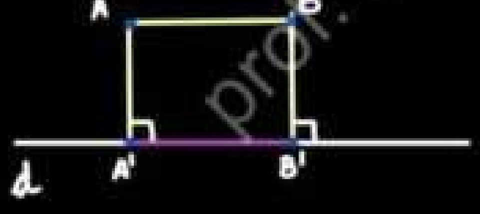
Notăm: $pr_d A = A'$.

Def. Proiecția (ortogonală) a unui segment pe o dreaptă este segmentul (sau punctul) determinat de proiecțiile extremităților (capetelor) segmentului inițial pe dreaptă.

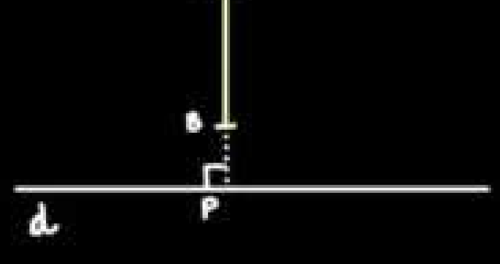


$$\left.\begin{array}{l}A'=pr_d A\\ B'=pr_d B\end{array}\right\} \Rightarrow pr_d[AB]=[A'B']$$

Obs. Dacă $AB \not\perp d$, atunci $A'B' \leq AB$.



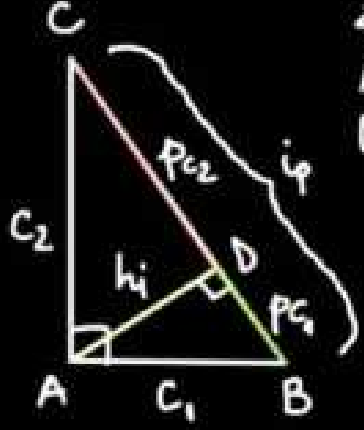
Dacă $AB \parallel d$, atunci lungimea proiecției segmentului pe dreapta d este egală cu lungimea segmentului.



$$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } AB \perp d\\ pr_d A = pr_d B = P\end{array}\right\} \Rightarrow pr_d[AB] = P.$$

Teoremă (Teorema înălțimii I) (T.h.)

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle BAC=90^\circ \\ AD\perp BC \\ D\in BC\end{array}\right\} \overset{T.h.}{\Rightarrow} AD=\sqrt{BD\cdot DC}$$

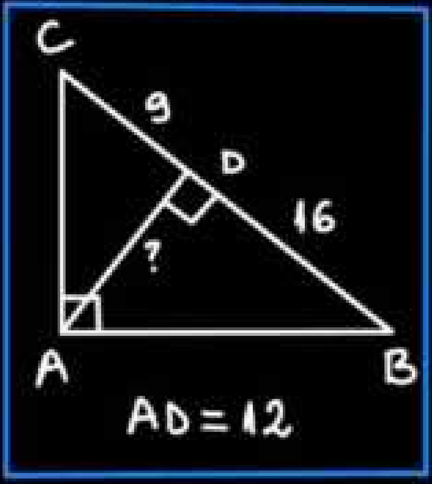
$$\left(h_i=\sqrt{pc_1\cdot pc_2}\right)$$

Echivalent cu

$$AD^2=BD\cdot DC$$

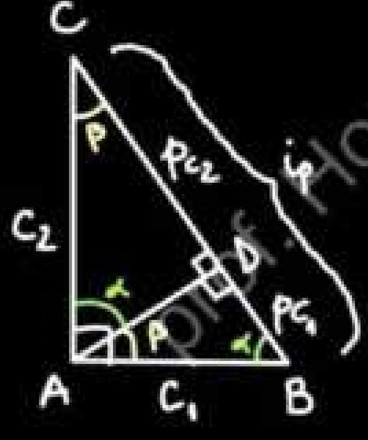
$$\left(h_i^2=pc_1\cdot pc_2\right)$$

Exemplu:



AD = 12

Dem.

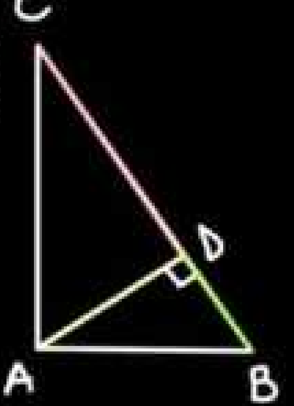


Hint:
$\Delta ADB \sim \Delta CDA$
Detaliere (Exercițiu)

Reciproca Teoremei înălțimii (I) (R.T.h)

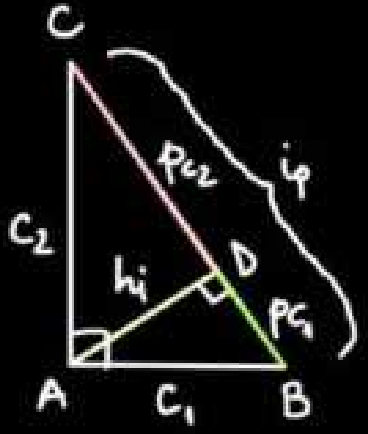
Dacă $AD\perp BC$ și $AD^2=BD\cdot DC$,
atunci $\sphericalangle BAC=90^\circ$.

Dem. (exercițiu, hint: asemănare (l.u.l))



Teoremă (Teorema catetei) (T.C.)

În orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este medie geometrică dintre lungimea proiecției (ortogonale) sale pe ipotenuză și lungimea ipotenuzei.



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle BAC=90^\circ\\ AD\perp BC\\ D\in BC\end{array}\right\}\xRightarrow{T.C.}\begin{array}{l}c_1=\sqrt{pc_1\cdot ip}\\ c_2=\sqrt{pc_2\cdot ip}\end{array}$$

Altfel scris,

$c_1^2 = pc_1 \cdot ip$

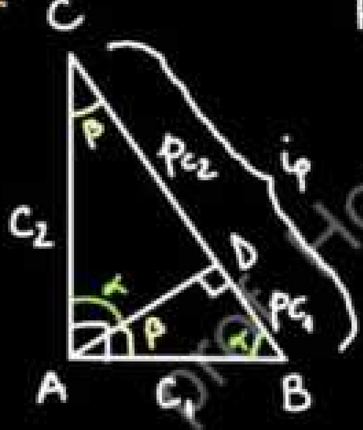
$c_2^2 = pc_2 \cdot ip$,

adică

$AB^2 = BD \cdot BC$

$AC^2 = DC \cdot BC$

Dem.



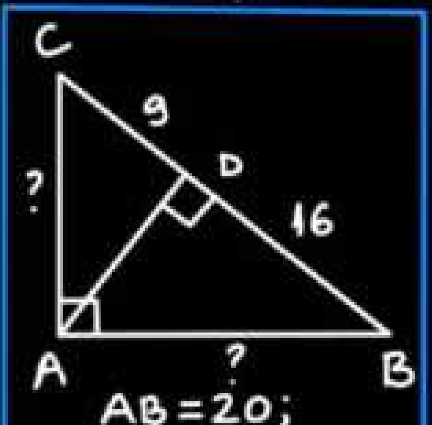
Hint:

$\Delta ADB \sim \Delta CAB$

$\Delta CDA \sim \Delta CAB$

Detaliere (Exercițiu)

Exemplu:



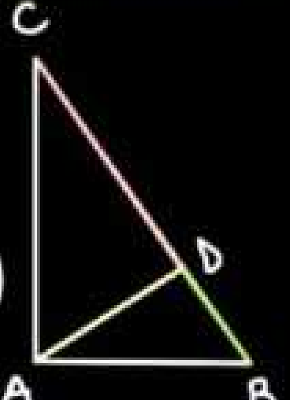
$AB = 20;$

$AC = 15.$

Reciproca (1) Teorema catetei (R_1.T.C)

Dacă $AD \perp BC$ și $AB^2 = BD \cdot BC$, atunci $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

Dem. (exercițiu, hint: asemănare)



Reciproca (2) Teorema catetei (R_2.T.C.)

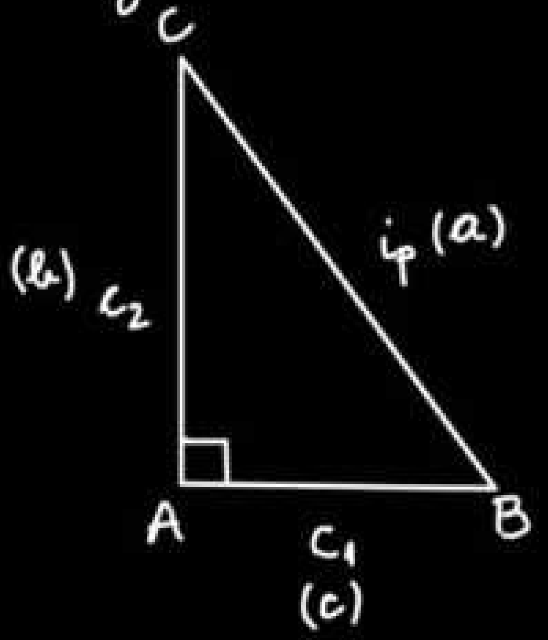
Dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $AB^2 = BD \cdot BC$, atunci $AD \perp BC$.

Dem. (exercițiu)

TEOREMA LUI PITAGORA (T.P.)

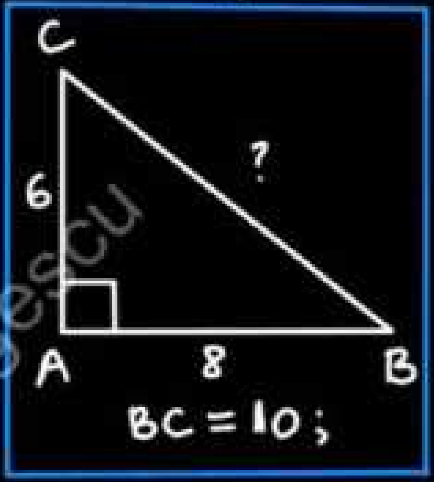
În orice triunghi dreptunghic suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

$$\measuredangle BAC = 90^\circ \xRightarrow{T.P.} AB^2+AC^2=BC^2$$



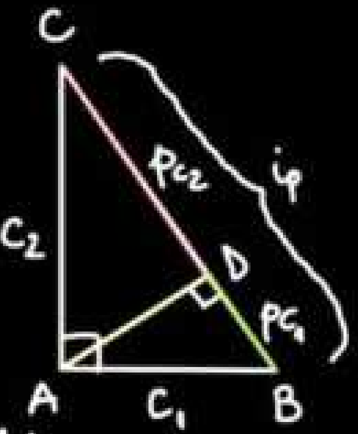
$$\left(\begin{array}{l} c_1^2+c_2^2=ip^2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{array}\right)$$

Exemplu:



BC = 10;

Dem.



Construim $AD \perp BC, D \in BC$.

Din Teorema catetei obținem:

$c_1^2 = pc_1 \cdot ip$

și

$c_2^2 = pc_2 \cdot ip$.

Adunând cele două relații, avem:

$$c_1^2+c_2^2 = pc_1 \cdot ip + pc_2 \cdot ip \Leftrightarrow c_1^2+c_2^2 = ip(pc_1+pc_2)$$

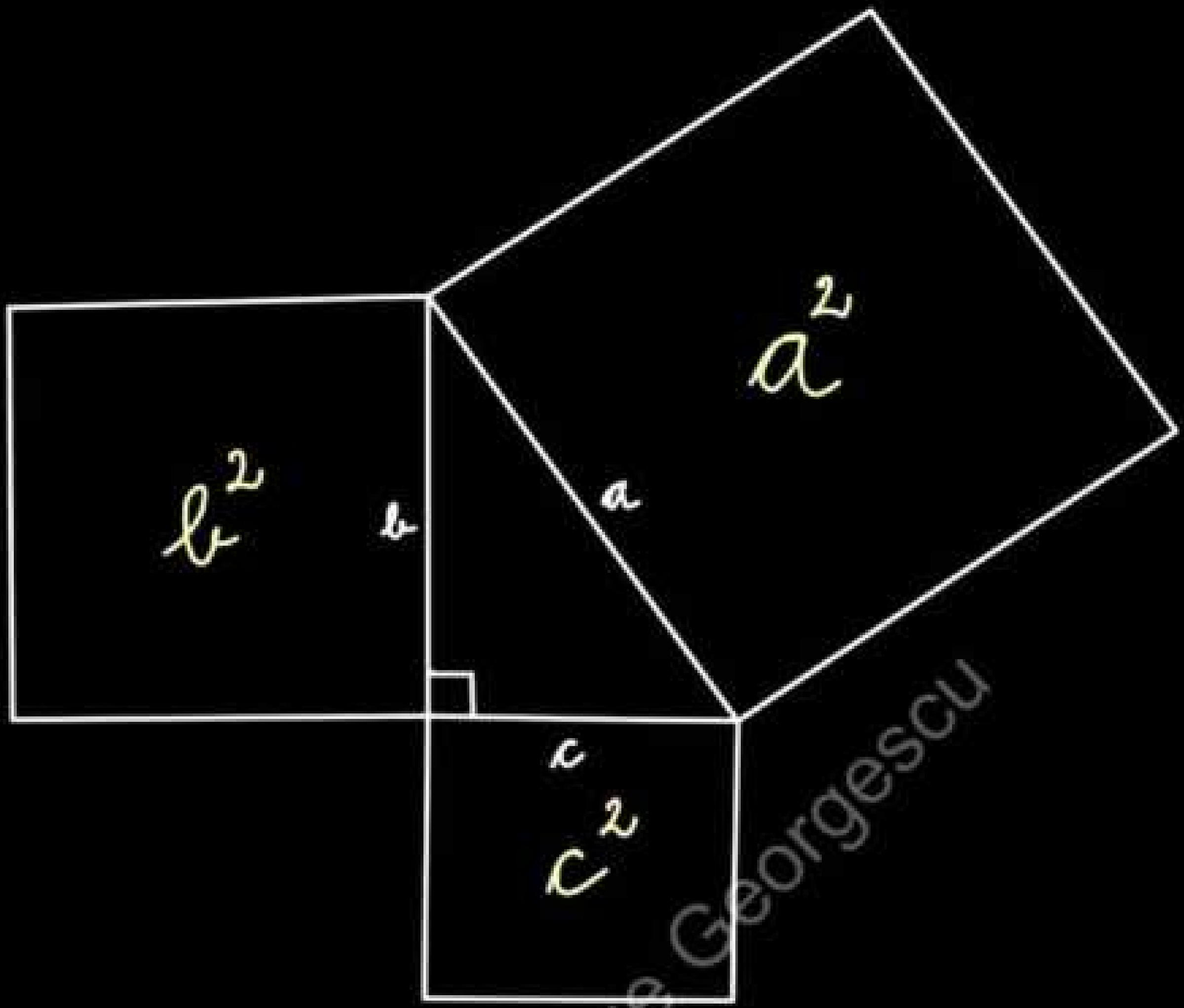
$$\Leftrightarrow c_1^2+c_2^2 = ip \cdot ip \Leftrightarrow c_1^2+c_2^2 = ip^2 . \square$$

Def. Un triplet de forma (x, y, z) unde $x, y, z \in \mathbb{N}$ s.n. tripled pitagoreic dacă $x^2+y^2=z^2$.

Exemple: $(3,4,5)$; $(6,8,10)$; $(15,20,25)$.

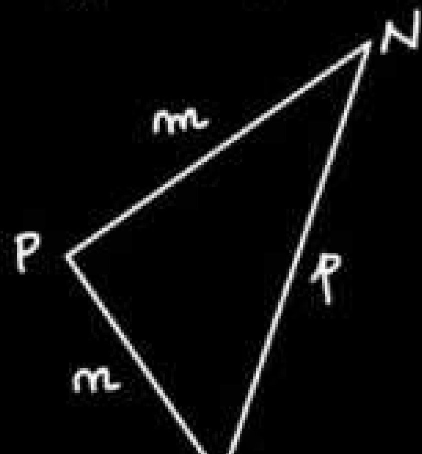
Prop. Există o infinitate de triplete (numere) pitagoreice.

Justificare. $(3k,4k,5k)$ este un triplet pitagoreic pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.



Reciproca teoremei lui Pitagora (R.T.P.)

Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

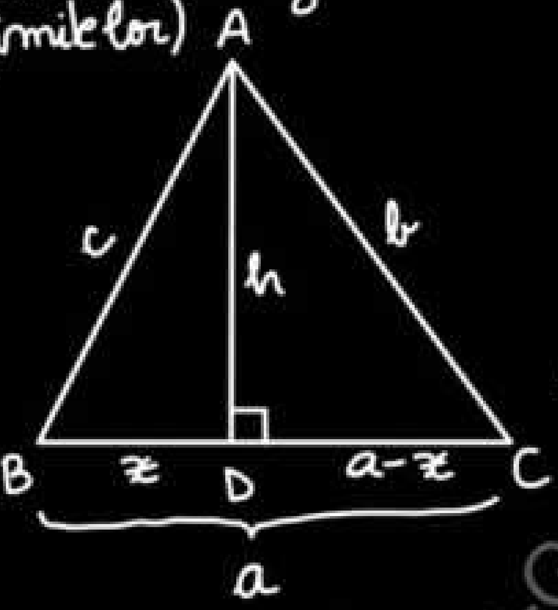


$$m^2+n^2=p^2 \overset{R.T.P.}{\Longrightarrow} \sphericalangle MPN=90^\circ.$$

Morala:

Teorema lui Pitagora ne poate ajuta să aflăm lungimile unor segmente, iar R.T.P. este un bun instrument matematic pentru a verifica (demonstra) dacă două drepte sunt perpendiculare.

• Aflarea proiecțiilor a două laturi ale unui triunghi oarecare pe a treia latură atunci când știm laturile triunghiului. •
(lungimilor)



Cunoaștem laturile triunghiului;

Procedăm astfel:

$BD \overset{not}{=} x \Rightarrow DC = a - x$

Aplicând T.P. în ΔADB și ΔADC obținem:

$$h^2 = b^2 - (a-x)^2$$

și

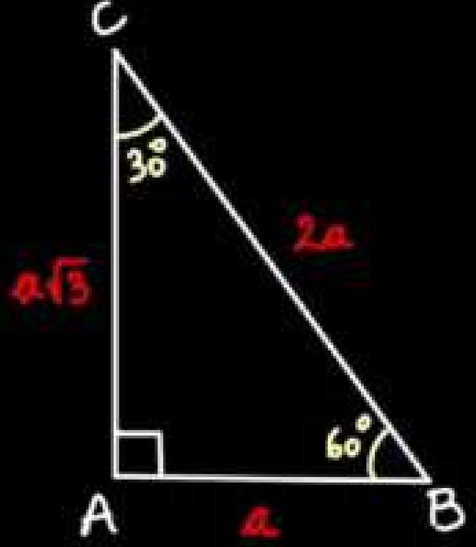
$$h^2 = c^2 - x^2$$

Din egalitatea $b^2 - (a-x)^2 = c^2 - x^2$ aflăm x.

Obs. Puteam aplica și Teorema lui Pitagora generalizată (Teorema cosinusului) (vezi „Elemente de trigonometrie").

Teorema „triunghiului 30°-60°-90°"

Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 30° și cateta care se opune acelui unghi are lungimea a, atunci ipotenuza triunghiului are lungimea 2a și cealaltă catetă are lungimea $a\sqrt{3}$.



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle BAC=90^\circ\\ \sphericalangle C=30^\circ\\ AB=a\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}BC=2a\\ AC=a\sqrt{3}.\end{array}$$

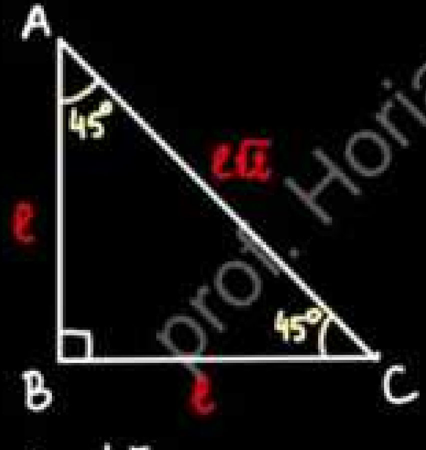
Exemplu:

$$\left.\begin{array}{l}AB=3\\ \sphericalangle C=30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}BC=6;\\ AC=3\sqrt{3}.\end{array}$$ (de ce?)

Dem. Se folosește $T\sphericalangle 30^\circ$ și T.P. (exercițiu).

- Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel care are lungimea catetelor l.

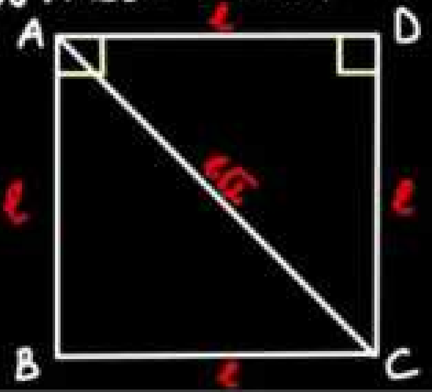
Dacă un triunghi dreptunghic are catetele de lungime l, atunci ipotenuza are lungimea $l\sqrt{2}$.



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABC=90^\circ\\ AB=BC=l\end{array}\right\} \Rightarrow AC=l\sqrt{2}.$$

Consecință:

Diagonala unui pătrat de latură l are lungimea $l\sqrt{2}$.



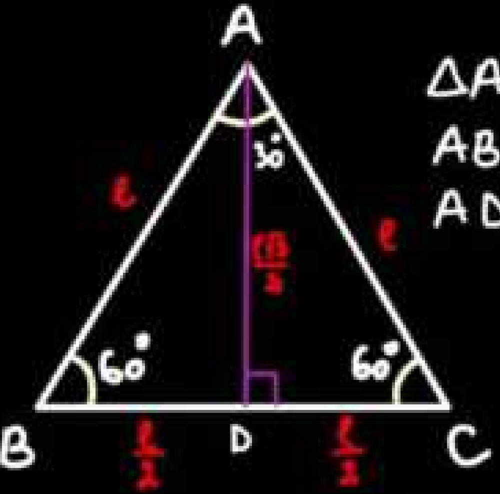
$$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ pătrat}\\ AB=l\end{array}\right\} \Rightarrow AC \overset{not}{=} diag = l\sqrt{2}.$$

Exemple:

i) $l=3 \Rightarrow d=3\sqrt{2}$;
ii) $d=8 \Rightarrow l=4\sqrt{2}$. (de ce?)

Dem. Se aplică T.P. (exercițiu)

Prop. Înălțimea unui triunghi echilateral de latură ℓ are lungimea $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \text{ echilateral}\\ AB=\ell\\ AD\perp BC,\ D\in[BC]\end{array}\right\} \Rightarrow AD=h_{echi}=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple:

i) $\ell=4 \Rightarrow h=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; (de ce?)

ii) $h=6 \Rightarrow \ell=4\sqrt{3}$.

Dem. Se aplică T.P. sau se folosește Teorema „30-60-90°" (exercițiu).

Elemente de trigonometrie

Considerăm un triunghi dreptunghic și un unghi ascuțit(α).

Definim următoarele rapoarte („funcții trigonometrice") constante indiferent de lungimile laturilor acelui triunghi, atunci când unghiul α are măsură fixată:

Def. Sinusul (sin) unui unghi ascuțit (α) reprezintă raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.

$$\sin(\alpha)=\frac{\text{cat. op.} \sphericalangle}{\text{ip.}}$$

Def. Cosinusul (cos) unui unghi ascuțit (α) reprezintă raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei

$$\cos(\alpha) = \frac{cat.\,al.\,\hat{\alpha}}{ip}$$

Def. Tangenta (tg (sau în engleză tan)) unui unghi ascuțit(α) reprezintă raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate unghiului.

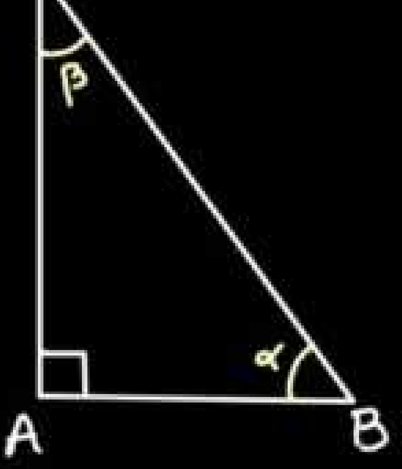
$$tg(\alpha) = \frac{cat.\,op.\,\hat{\alpha}}{cat.\,al.\,\hat{\alpha}}$$

Def. Cotangenta (ctg (sau în engleză cot)) unui unghi ascuțit(α) reprezintă raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse unghiului.

$$ctg(\alpha) = \frac{cat.\,al.\,\hat{\alpha}}{cat.\,op.\,\hat{\alpha}}.$$

De ce rapoartele de mai sus sunt constante pentru un unghi ascuțit de măsură α fixată?

Exemple:



$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC};\ \sin\beta = \frac{AB}{BC};$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC};\ \cos\beta = \frac{AC}{BC};$$

$$tg\,\alpha = \frac{AC}{AB};\ tg\,\beta = \frac{AB}{AC};$$

$$ctg\,\alpha = \frac{AB}{AC};\ ctg\,\beta = \frac{AC}{AB};$$

Formule trigonometrice

$$\left.\begin{array}{ll}
i) & \sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) \\
ii) & \cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) \\
iii) & tg(\alpha) = ctg(90^\circ - \alpha) \\
iv) & ctg(\alpha) = tg(90^\circ - \alpha) \\
v) & tg(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \\
vi) & ctg(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha};
\end{array}\right\} \text{Reies din definiții.}$$

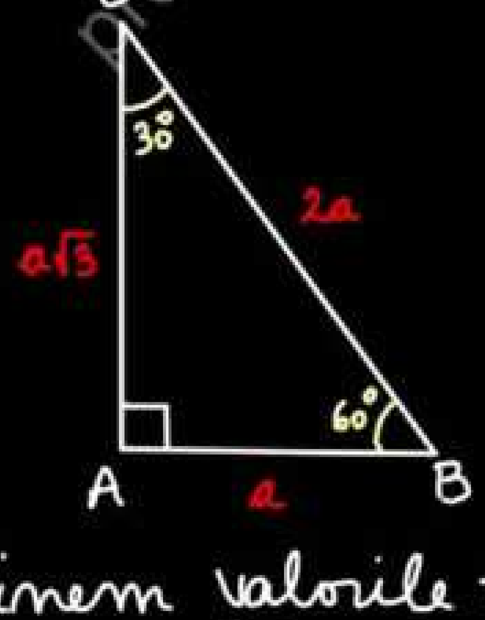
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, pentru orice unghi α

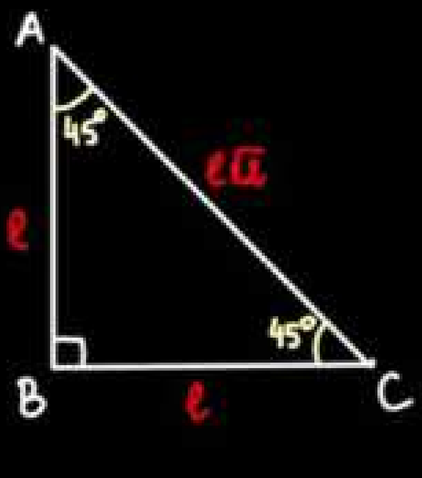
Formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dem. Se utilizează definiția și T.P. (exercițiu).

Analizând configurațiile studiate,





obținem valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45° și 60° (exercițiu).

Aceste valori pot fi organizate în următorul tabel:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

MNEMOTEHNICĂ

Modalitate de a reține:

Pentru sin: toate valorile sunt fracții, au la numito 2 și la numărător radica din numerele 1,2,3 (pe rând

Pentru cos: scriem valorile de la sin în ordine inversă

Pentru tg: ne bazăm pe relația $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Pentru ctg: scriem valorile de la tg în ordine inversă

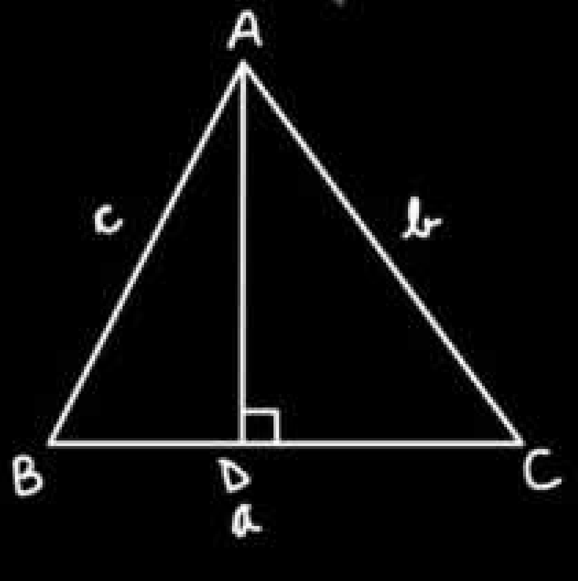
Pentru alte măsuri de unghiuri folosim tabele de valori sau calculatorul.

Teorema cosinusului

(Teorema lui Pitagora generalizată (T.P.G.))

Dacă ΔABC este oarecare, $AD \perp BC$ și $D \in [BC]$.

Atunci:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Din relația $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ presupunem $\sphericalangle C<90^\circ$, ținem cont de faptul că $\cos C=\frac{CD}{b}$ și obținem relația echivalentă:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CD$$

Pentru $\sphericalangle C>90^\circ$ avem relația:

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD.$$

Dem:

Demonstrăm relația $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ (celelalte se demonstrează similar).

Met I. Presupunem $\sphericalangle C<90^\circ$.

$DC\overset{not}{=}x$; $BD\overset{not}{=}a-x$;

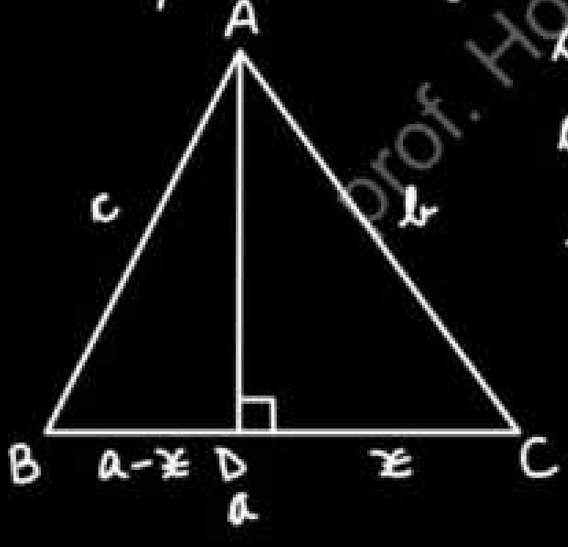
Aplicăm T.P. în $\triangle ADB$ și $\triangle ADC$ și obținem egalitatea:

$$c^2-(a-x)^2=b^2-x^2 \Leftrightarrow$$

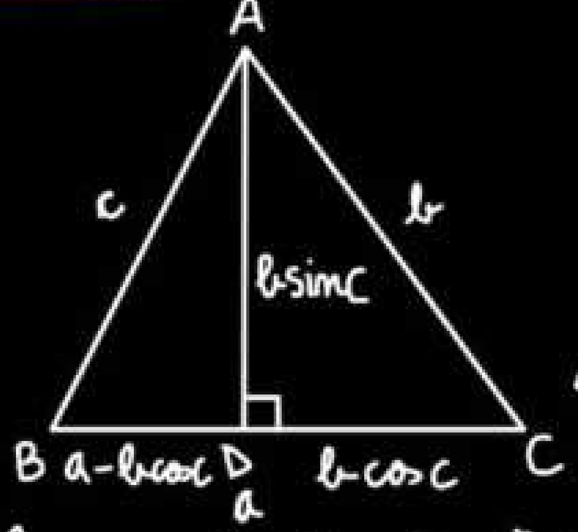
$$c^2-a^2+2ax-x^2=b^2-x^2 \mid +x^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2=a^2+b^2-2ax \text{ cu } x=b\cos C;$$

$\square$.



Met II.



Aplicând T.P. în ΔADB și ținând cont de faptul că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obținem:

$$c^2=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2$$

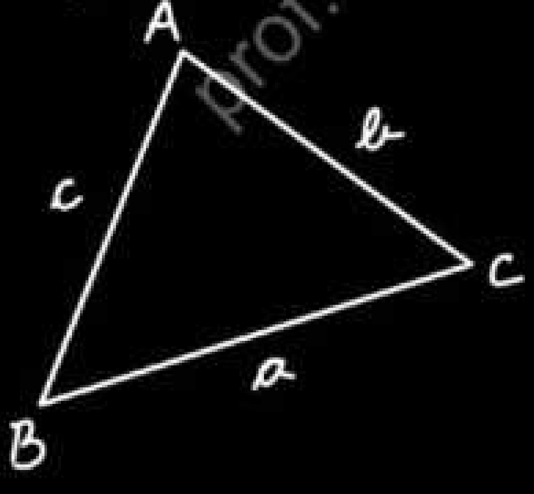
$$c^2=b^2\sin^2 C+a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C$$

$$c^2=a^2+b^2(\underbrace{\sin^2 C+\cos^2 C}_{=1})-2ab\cos C$$

În concluzie, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. □

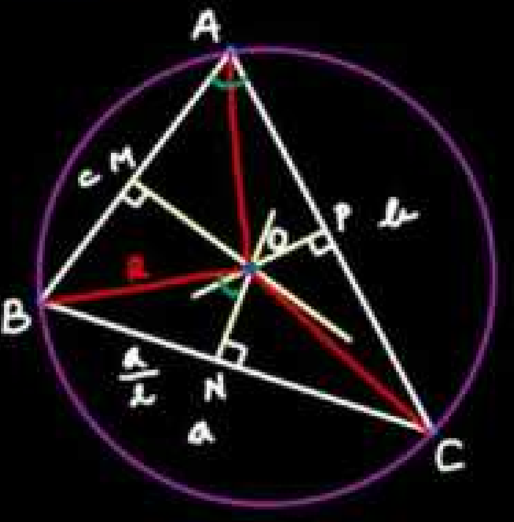
Teorema sinusurilor

În orice triunghi, sinusurile unghiurilor interioare sunt direct proporționale cu laturile opuse și valoarea coeficientului de proporționalitate este egală cu dublul razei cercului circumscris triunghiului respectiv.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Dem.



$\sphericalangle BAC = \frac{\sphericalangle BOC}{2}$;
(unghi înscris în cerc)

ΔOBC isoscel => ON este mediană și bisectoare, deci $\sphericalangle BON = \frac{\sphericalangle BOC}{2} = \sphericalangle BAC$;

$\sin \sphericalangle BON = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$.

Similar se demonstrează și celelalte relații. □

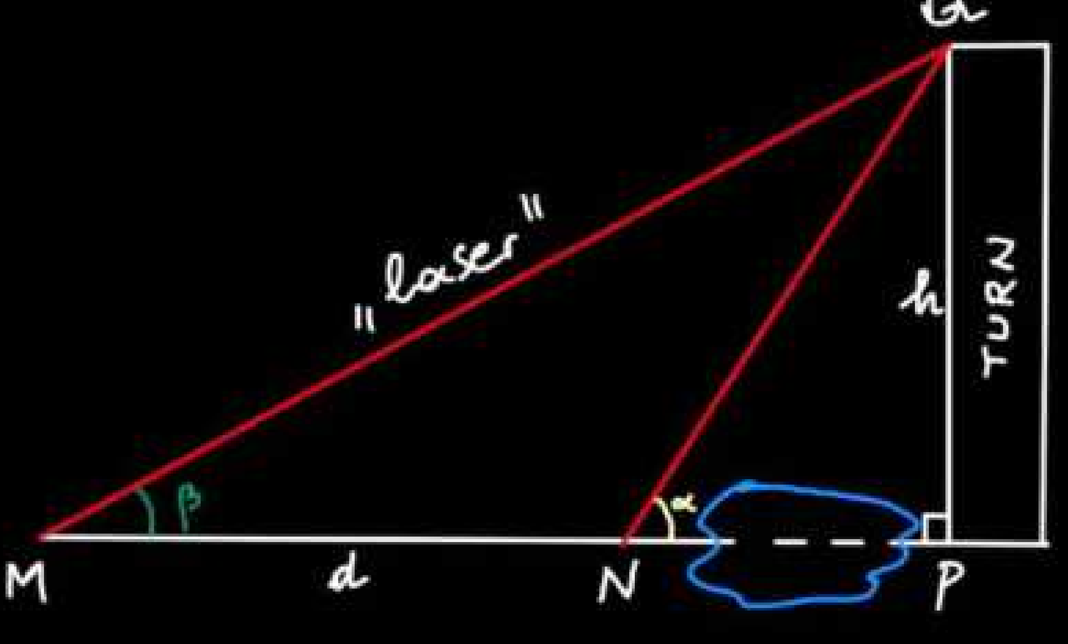
Obs.

Rezolvarea triunghiului dreptunghic presupune aflarea tuturor elementelor sale (lungimile laturilor și măsurile unghiurilor)

Pentru acest lucru este suficient să cunoaștem două laturi sau o latură și un unghi (ideal o valoare cât mai precisă a unei funcții trigonometrice a acelui unghi)

Aproximarea anumitor lungimi (distanțe)

i) Înălțimea unui obiect inaccesibil



Măsor:
$\alpha, \beta,$ și $MN = d$

Pasul I:

$\text{ctg}\,\alpha = \frac{NP}{h}$

$\text{ctg}\,\beta = \frac{MP}{h}$

Obținem:

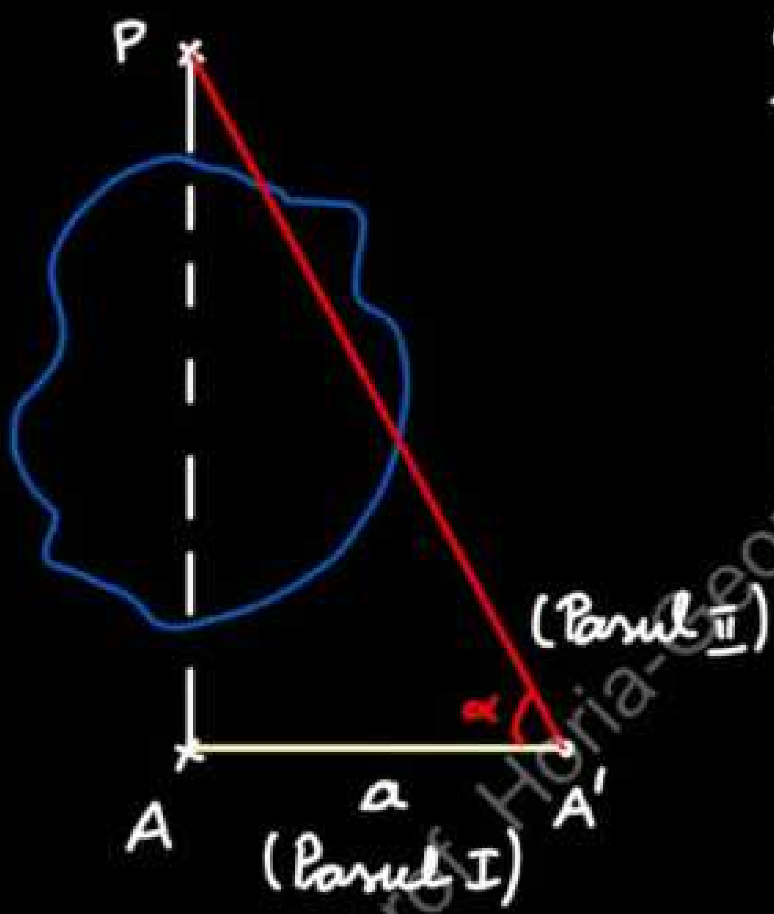
$h = \frac{NP}{\text{ctg}\,\alpha}$;

$h = \frac{MP}{\text{ctg}\,\beta}$;

Pasul II:

Din $\frac{NP}{ctg\alpha} = \frac{d+NP}{ctg\beta}$ aflu NP și revin în $h = \frac{NP}{ctg\alpha}$ aflând înălțimea h.

ii) Distanța până la un punct inaccesibil („Metoda paralaxei").



Vrem să determinăm distanța de la A la P, fiind în punctul A.

Pasul I.

Mă deplasez pe direcție perpendiculară pe PA a unități de măsură și ajung în punctul A'.

Pasul II

Măsor $\sphericalangle AA'P \overset{not}{=} \alpha$ și aflu tangenta acestui unghi din tabel sau folosind calculatorul.

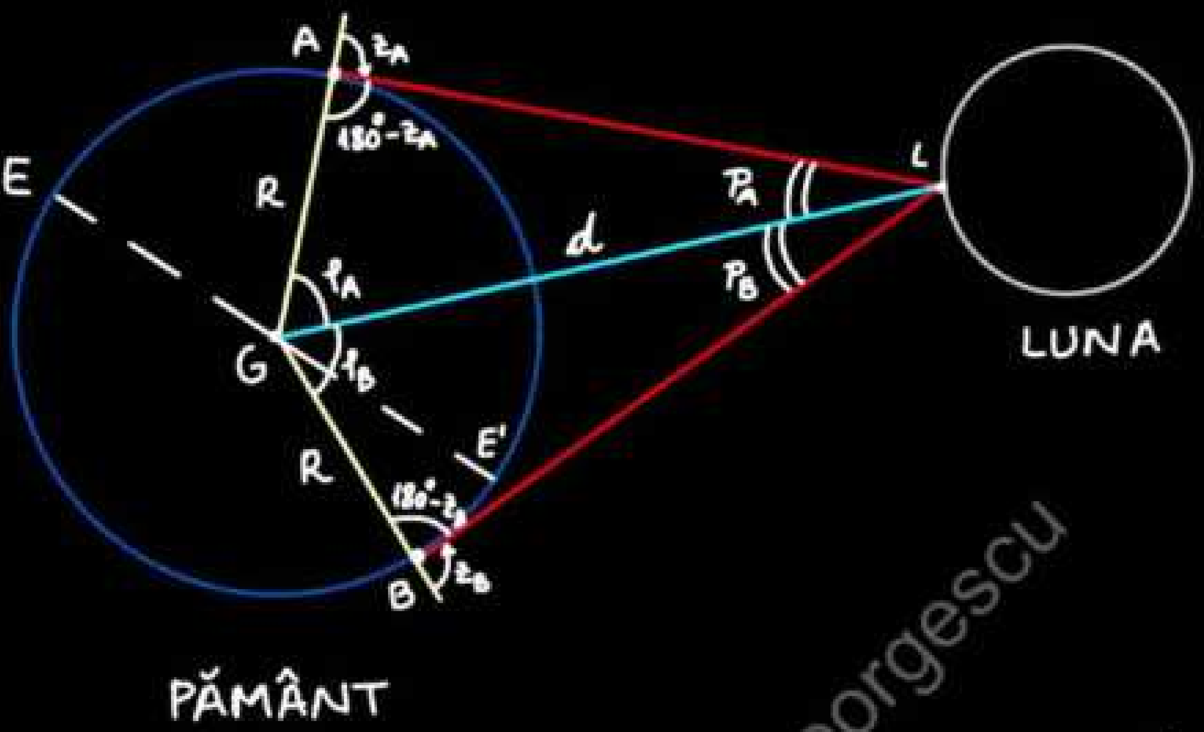
Pasul III

Aflu AP din relația

$$tg\alpha = \frac{AP}{AA'} \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{AP}{a}$$

$$\Leftrightarrow AP = a\,tg\alpha.$$

Distanța de la Pământ la Lună



EE' ecuatorul ; Vrem să determinăm $GL \overset{not.}{=} d$.

<u>Obs.</u> Dacă α este un unghi cu măsura foarte mică (apropiată de 0) atunci $\sin\alpha \simeq \alpha$.

LAGB este patrulater convex $\Rightarrow 360^\circ = \varphi_A + \varphi_B + p_A + p_B + 180^\circ - z_A + 180^\circ - z_B$

$\Rightarrow p_A + p_B = z_A + z_B - (\varphi_A + \varphi_B)$. (*)

Din Teorema sinusurilor aplicată în ΔAGL și ΔBGL obținem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{\sin(\pi - z_A)} = \dfrac{R}{\sin p_A} \\[2ex] \dfrac{d}{\sin(\pi - z_B)} = \dfrac{R}{\sin p_B} \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\sin(\pi - z_A) = \sin z_A \\ \sin(\pi - z_B) = \sin z_B}]{\substack{\sin p_A \simeq p_A \\ \sin p_B \simeq p_B}} \left\{\begin{array}{l} p_A = \dfrac{R}{d}\sin z_A \\[2ex] p_B = \dfrac{R}{d}\sin z_B \end{array}\right.$$

$$p_A + p_B = \frac{R}{d}(\sin z_A + \sin z_B) \overset{(*)}{\Longrightarrow} z_A + z_B - (\varphi_A + \varphi_B) = \frac{R}{d}(\sin z_A + \sin z_B)$$

În concluzie,

$$\frac{d}{R} = \frac{\sin z_A + \sin z_B}{z_A + z_B - (\varphi_A + \varphi_B)}.$$

raza Pământului

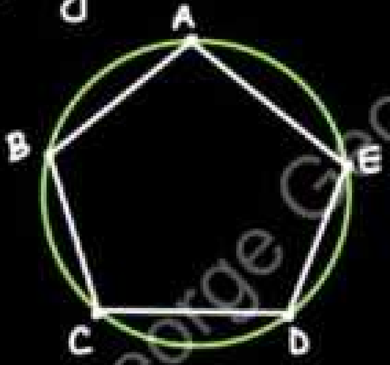
Calculul elementelor poligoanelor regulate

Def. Un poligon s.n. regulat dacă are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente.

Exemple: triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat etc.

Def. Un poligon s.n. inscriptibil dacă se poate înscrie într-un cerc care să conțină toate vârfurile poligonului (cerc circumscris).

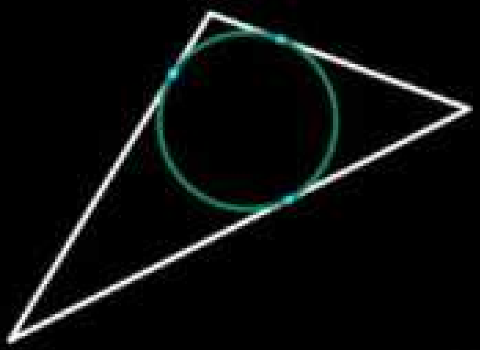
Exemplu:



ABCDE s.n. pentagon
(are cinci laturi)

Def. Un poligon s.n. circumscriptibil dacă există un cerc a.î. laturile poligonului să îi fie tangente (cerc înscris).

Exemplu:



Prop. Orice poligon regulat este atât inscriptibil, centrul cercului circumscris (O) aflându-se la intersectia mediatoarelor laturilor sale, cât și circumscriptibil, centrul cercului înscris (I) aflându-se la intersectia bisectoarelor unghiurilor interioare. În plus, O coincide cu I și s.n. centrul poligonului regulat.

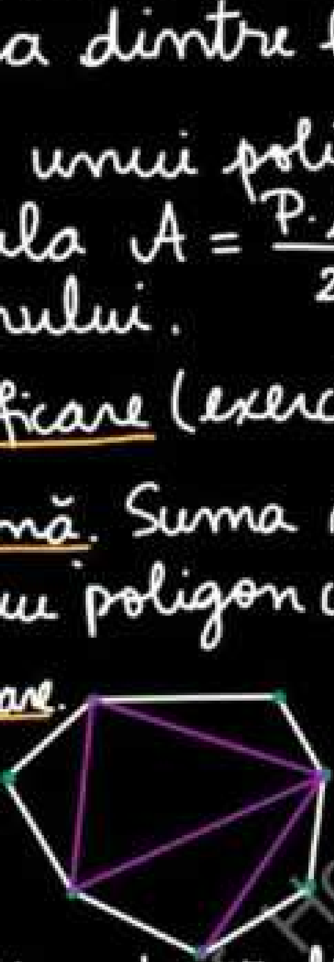
Def. Apotema (not. a_p) unui poligon regulat reprezintă distanța de la centrul poligonului la una dintre laturi.

Aria unui poligon regulat este dată de formula $A = \frac{P \cdot a_p}{2}$, unde P reprezintă perimetrul poligonului.

Justificare (exercițiu).

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este $(n-2)\cdot 180^\circ$

Justificare.



În cazul unui poligon (convex) cu 7 laturi (heptagon) putem să-l împărțim în 5 triunghiuri „disjuncte". În general, un poligon convex cu n laturi poate să fie împărțit în n-2 astfel de triunghiuri.

În particular, suma măsurilor unghiurilor unui heptagon convex este egală cu $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.

Teoremă.

Un poligon (convex sau concav) cu n vârfuri are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale.

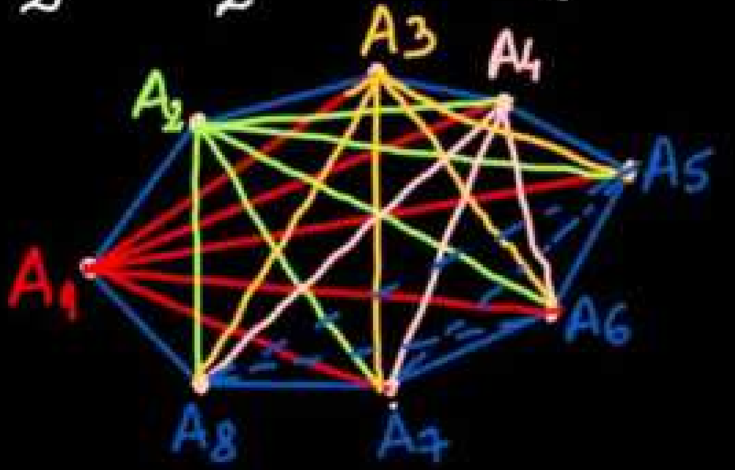
Dem.

Met I În primă fază probăm formula în cazul unui poligon cu 4 vârfuri.

Obținem $\frac{4(4-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ diagonale.

Tratăm cazul $n = 8$. Ar trebui să avem

$\frac{8(8-3)}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 5}{\cancel{2}} = 20$ diagonale.



Vârful A_1 poate să fie unit cu alte 5 vârfuri.

Vârful A_2 poate să fie unit cu alte 5 vârfuri.

Vârful A_3 poate să fie unit cu alte 4 vârfuri.

Vârful A_4 poate să fie unit cu alte 3 vârfuri.

Vârful A_5 poate să fie unit cu alte 2 vârfuri.

Vârful A_6 poate să fie unit cu un singur vârf.

În total avem $1+2+3+4+5+5=20$ diagonale

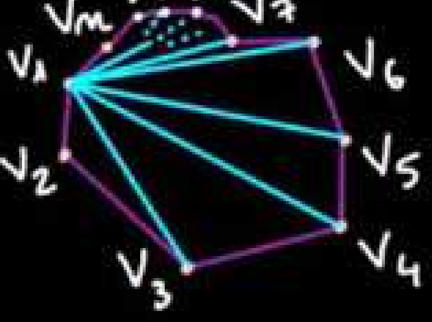
Fie acum un poligon cu n vârfuri notate cu $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Vârful V_1 poate fi unit cu $n-3$ vârfuri, deci din V_1 pleacă $n-3$ diagonale.

Vârful V_2 poate să fie acum unit cu $n-3$ vârfuri.

⋮

Vârful V_{n-2} poate să fie unit cu un singur vârf (V_n)



În total, avem

$$1+2+3+\ldots+n-3+\overset{2)}{(n-3)}=$$

$$=\frac{(n-3)(n-2)}{2}+\frac{2(n-3)}{2}=\frac{(n-3)(n-2+2)}{2}$$

$$=\frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonale.}$$

Met II (Combinatorică)

Numărul diagonalelor poligonului este egal cu numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii $\{A_1, A_2, \ldots, A_8\}$, adică C_8^2 din care scădem 8 (acele „false" diagonale care apar când avem submulțimi care conțin două vârfuri alăturate)

Ca atare, $C_8^2-8=\frac{8!}{2!\cdot 6!}-8=\frac{7\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}}-8=28-8=20$

Numărul diagonalelor unui poligon cu n laturi este egal cu

$$C_n^2-n=\frac{n!}{2(n-2)!}-\overset{2)}{n}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{2n}{2}$$

$$=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Studiem următoarele poligoane regulate:

i) triunghiul echilateral (poligonul regulat cu 3 laturi)

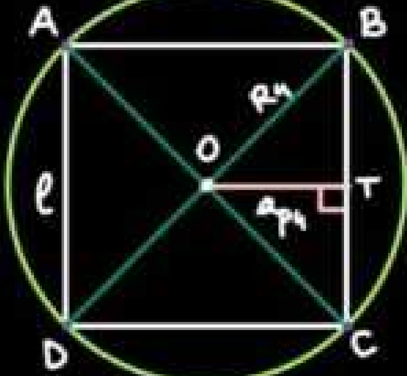
ii) pătratul (poligonul regulat cu 4 laturi)

iii) hexagonul regulat (poligonul regulat cu 6 laturi)

$R_n \overset{not}{=}$ raza cercului circumscris poligonului regulat cu n laturi

$ap_n \overset{not}{=}$ apotema poligonului regulat cu n laturi.

Elemente în pătrat:



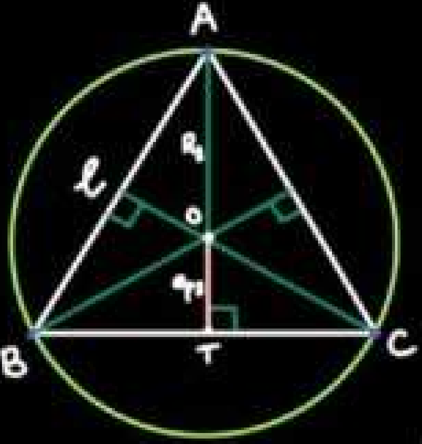
Fie pătratul ABCD de latură ℓ.
Știm că $diag = \ell\sqrt{2}$ de unde obținem imediat:

$$OB = R_4 = R_{pătrat} = \frac{diag}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \text{ și}$$

$$OT = a_{p_4} = a_{p\ pătrat} = \frac{\ell}{2}.$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \ell^2.$$

Elemente în triunghiul echilateral (de latură ℓ)



Știm că O coincide cu G (centrul de greutate al $\triangle ABC$) și că înălțimea $AT = h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

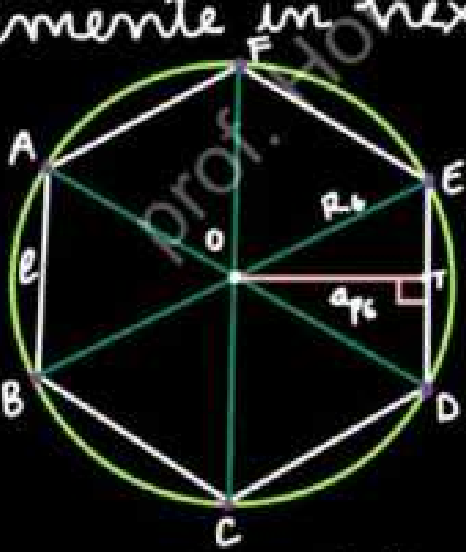
Din Teorema centrului de greutate rezultă că:

$$OT = a_{p_3} = \frac{1}{3}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \text{ și}$$

$$OA = R_3 = 2a_{p_3} = \cancel{2}\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{\cancel{6}_3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}.$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Elemente în hexagonul regulat (de latură ℓ):



Observând că apar 6 triunghiuri echilaterale, rezultă că:

$$OE = R_6 = \ell \text{ și}$$

$$OT = a_{p_6} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

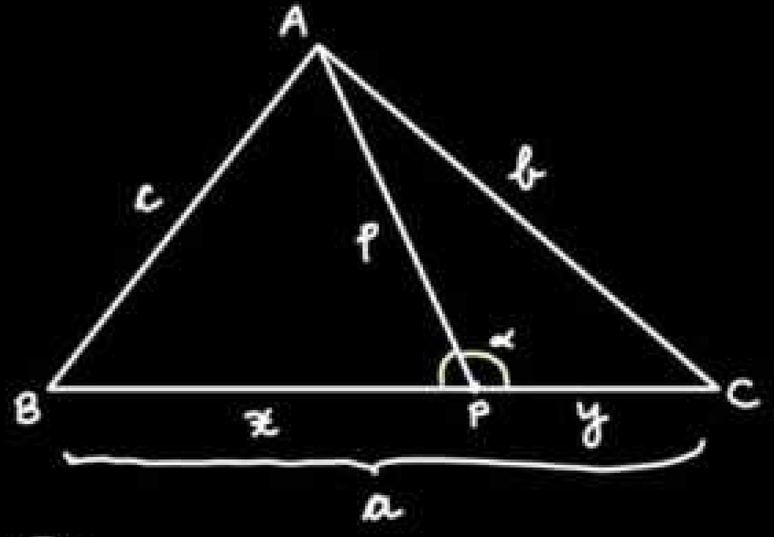
$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = \overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_2} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

Elemente în poligoane regulate

poligon / element	PĂTRAT	TRIUNGHI ECHILATERAL	HEXAGON REGULAT
R	$\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$	ℓ
a_p	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
$\mathcal{A}$	ℓ^2	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Teorema lui Stewart

Fie ΔABC oarecare cu notațiile de mai jos și $P \in [BC]$



Atunci:

$$a(p^2+xy)=b^2x+c^2y$$

Dem.

- Obs. $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

Din Teorema cosinusului obținem:

$$\begin{cases} b^2=p^2+y^2-2py\cos\alpha \mid \cdot x \\ c^2=p^2+x^2-2px\cos(180^\circ-\alpha)=p^2+x^2+2px\cos\alpha \mid \cdot y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2x=p^2x+y^2x-2pxy\cos\alpha \\ c^2y=p^2y+xy^2+2pxy\cos\alpha \end{cases}$$

$$\overline{\quad\oplus\quad}$$

$$b^2x+c^2y=p^2x+p^2y+xy(x+y)$$

$$\Rightarrow b^2x+c^2y=p^2(x+y)+xy(x+y)$$

$$\overset{x+y=a}{\Rightarrow} b^2x+c^2y=a(p^2+xy). \quad \square$$

Teorema medianei (Teorema lui Apollonius)

Considerăm ΔABC oarecare cu $BC=a$, $AC=b$ și $AB=c$. Atunci mediana din A (corespunzătoare laturii a) are lungimea:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}.$$

Similar,

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2}$$

și

$$m_c = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}.$$

Dem.

Teorema este un caz particular al Teoremei lui Stewart (corolar) când $P = \text{mij}\,[BC]$, deci $x = y = \frac{a}{2}$ și $p = m_a$.

Obținem:

$$a(m_a^2 + x^2) = b^2 x + c^2 x$$

$$\Rightarrow \quad a\left(m_a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a(b^2+c^2)}{2} \quad \Big| \cdot \frac{4}{a}$$

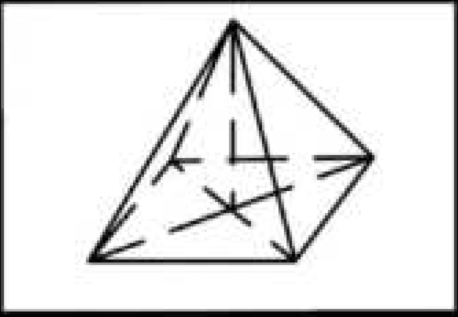
$$\Rightarrow \quad 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2+c^2) \Rightarrow m_a^2 = \sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}. \ \square$$

Obs.

Folosind Teorema lui Apollonius putem demonstra Teorema medianei din vârful unghiului drept (exercițiu).

Horia-George Georgescu

ELEMENTE DE GEOMETRIE IN SPAȚIU



Punct. Dreaptă. Plan.

Def." Punctul poate fi asemănat cu urma lăsată de vârful unui creion bine ascuțit atunci când atinge foaia de hârtie.

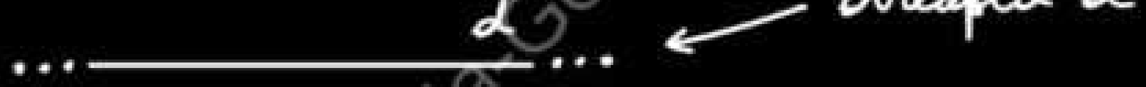
Punctul nu are nicio dimensiune.

Punctele se notează în general cu litere majuscule: A, B, P, M etc.

Exemplu: • A ⟵ punctul A

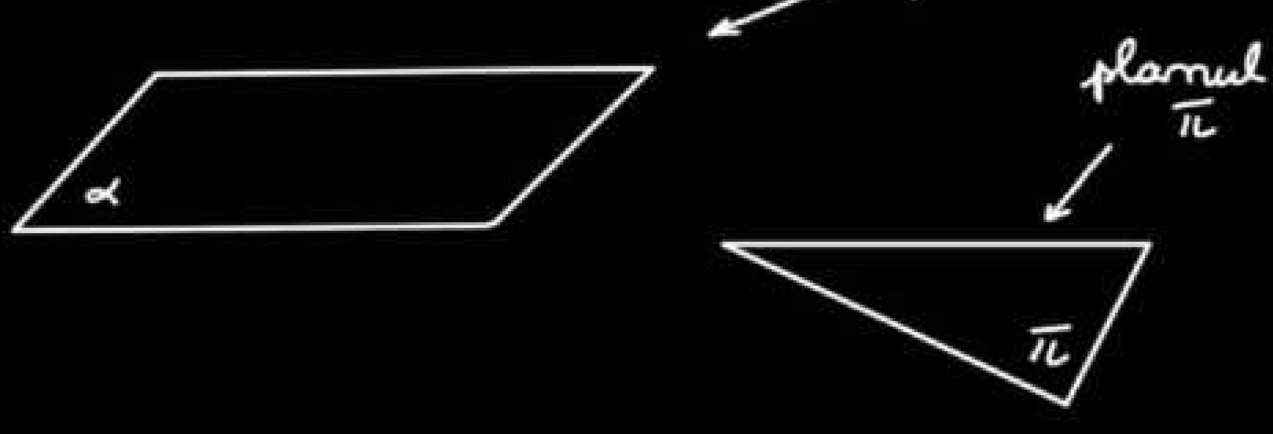
„Def." Dreapta poate fi asemănată cu un fir de ață foarte subțire („fără grosime"), infinit și bine întins la ambele capete.

Dreptele se notează cu litere mici ale alfabetului latin: a, b, d etc.



„Def." Planul poate fi asemănat cu o coală de hârtie, fără grosime și nemărginită în toate direcțiile.

Planele se notează cu litere ale alfabetului grecesc: α, β, γ, π etc.



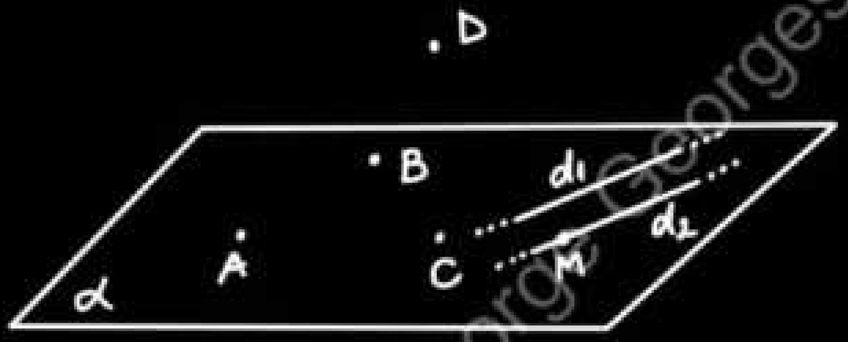
Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu.

① Axioma dreptei

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

$d \overset{not}{=} AB$

Considerăm următoarea configurație:
planul α ; $A, B, C \in \alpha$; $D \notin \alpha$; $d_1 \in \alpha$; $M \in d_2$;



② Prin trei puncte necoliniare (A, B, C) trece un plan și numai unul.

$\alpha \overset{not}{=} (ABC)$

③ Dacă $A \in \alpha$ și $B \in \alpha$ atunci $AB \subset \alpha$.

④ Există patru puncte care nu sunt situate în același plan. Acestea se numesc puncte necoplanare.

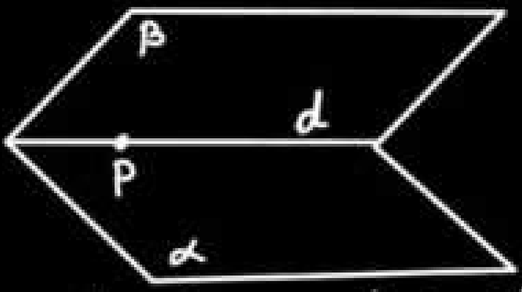
Exemplu: A, B, C și D.

⑤ Axioma lui Euclid

Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o unică paralelă la dreapta dată.

Exemplu: $M \notin d_1$ $\exists!\, d_2$ a.î. $d_1 \parallel d_2$.
$M \in d_2$

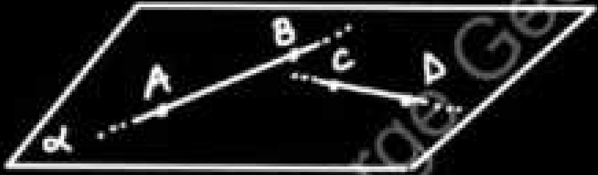
⑥ Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci au o dreaptă comună care trece prin acel punct.



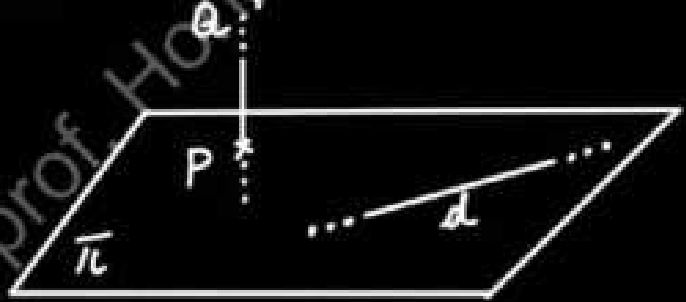
$P \in d$
$\alpha \cap \beta = d$

⑦ Două drepte sunt coplanare dacă se află în același plan.

$AB \subset \alpha$
$CD \subset \alpha$



⑧ Două drepte sunt necoplanare dacă nu există un plan care să le conțină.



$d \subset \pi$
$P \in \pi$
$P \notin d$
$Q \notin \pi$

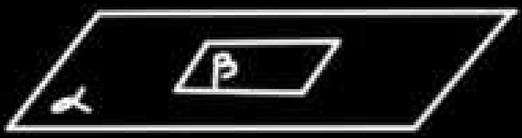
PQ și d sunt necoplanare

⑨ În spațiu, printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la acea dreaptă, iar cele două drepte sunt coplanare.

Pozițiile relative a două plane

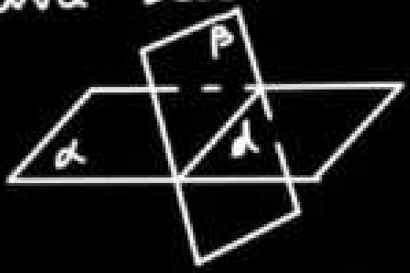
i) Plane identice

$\alpha = \beta$



ii) Plane secante (concurente)

$\alpha \cap \beta = d$



iii) Plane paralele

$\alpha \cap \beta = \emptyset$

$\alpha \parallel \beta$

Determinarea planului

Un plan este unic determinat de:

I. Trei puncte necoliniare

$\pi \overset{not}{=} (MNP)$

II. O dreaptă și un punct exterior dreptei

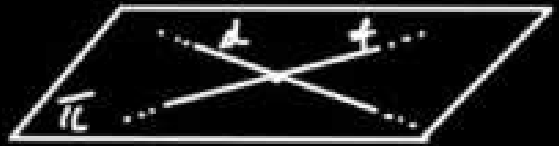
$P \notin d$

Ⅲ Două drepte paralele

$d_1 \parallel d_2$

Ⅳ Două drepte concurente

$d \cap f \neq \emptyset$



Def." Aria unei suprafețe este o măsură care ne " arată cât de întinsă este acea suprafață.

Def. Aria laterală a unui corp geometric se notează cu Al și reprezintă suma ariilor fețelor laterale sau aria suprafeței laterale ale/a corpului geometric respectiv.

Def. Aria bazei unui corp geometric se notează cu Ab și reprezintă aria figurii geometrice care este baza corpului geometric respectiv.

Def. Aria totală a unui corp geometric se notează cu At și reprezintă suma dintre aria laterală și aria bazei/bazelor corpului geometric respectiv.

Def." Volumul unui corp geometric este o mărime " care ne arată cât loc ocupă el în spațiu.

Corpuri geometrice

① Prisma dreaptă

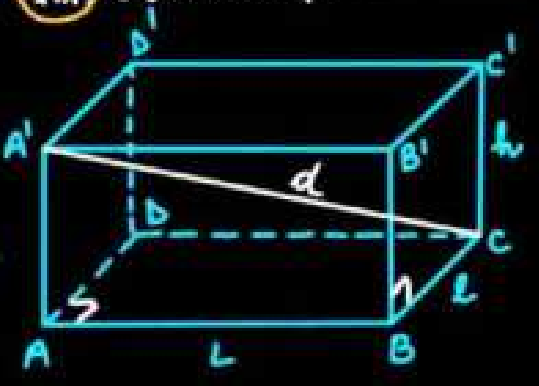
(1.1) Prisma patrulateră (paralelipipedul dreptunghic)

$A_l = P_b \cdot h$

$A_t = A_l + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

$d^2 = L^2 + l^2 + h^2$



ABCDA'B'C'D' – paralelipiped dreptunghic

(toate fețele sunt dreptunghiuri)

$A'C \overset{not}{\equiv} d$ (diagonala prismei)

(1.2) Prisma patrulateră regulată

$A_l = P_b \cdot h$

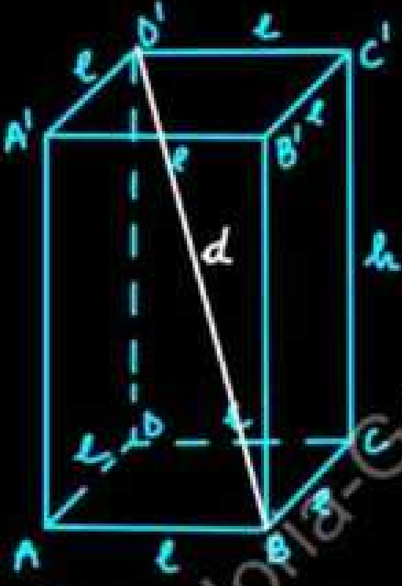
$A_t = A_l + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

$d^2 = 2l^2 + h^2$

$A_b = l^2$

$P_b = 4l$



- ABCDA'B'C'D' – prismă patrulateră regulată
- ABCD, A'B'C'D' (baze) sunt pătrate
- muchii laterale: AA', BB', CC', DD'
- fețe laterale: ABB'A', BCC'B', DCC'D', ADD'A'. (dreptunghiuri congruente)
- d ← diagonala paralelipipedului

(1.3) Prisma triunghiulară regulată

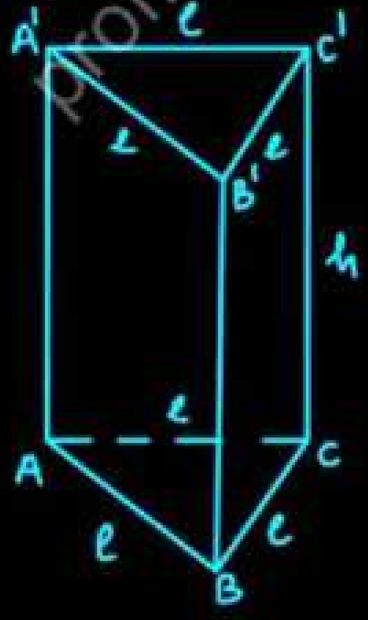
$A_l = P_b \cdot h$

$A_t = A_l + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$P_b = 3l$



- ABCA'B'C' prismă triunghiulară regulată
- ABC, A'B'C' (baze) sunt triunghiuri echilaterale
- Fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente (ABB'A', BCC'B', ACC'A')

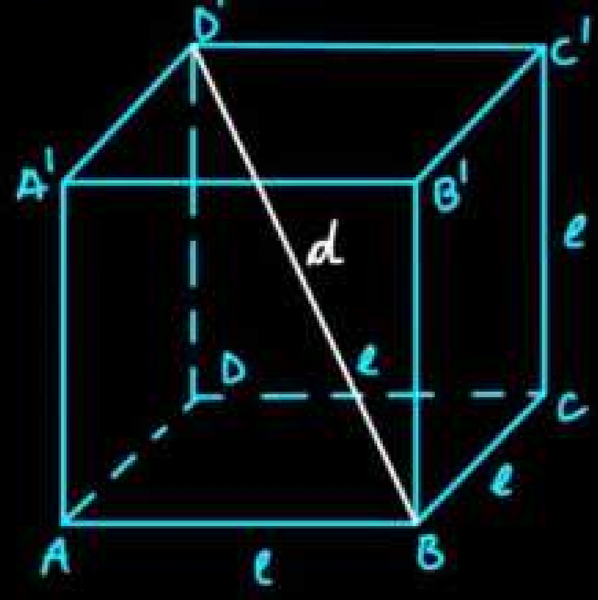
1.4 Cubul

$A_l = 4l^2$

$A_t = 6l^2$

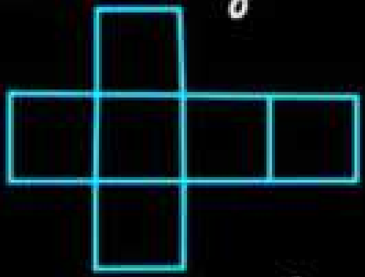
$V = l^3$

$d = l\sqrt{3}$



ABCDA'B'C'D' – cub

- Toate fețele sunt pătrate.
- 12 muchii congruente



Desfășurarea în plan

d ← diagonala cubului

2 Piramida

2.1 Piramida patrulateră regulată

$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$

$A_t = A_l + A_b$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

$A_b = l^2$

$P_b = 4l$

- VABCD piramidă patrulateră regulată
- Baza: pătratul ABCD
- VO: înălțimea piramidei
- Muchii laterale: VA, VB, VC, VD
- Fețe laterale: △VAB, △VBC, △VDC, △VAD (triunghiuri isoscele), adică muchiile laterale sunt congruente. (VA = VB = VC = VD)

- OM ⊥ BC, OM $\overset{not}{=} a_b$ (apotema bazei)

<u>Def.</u> Înălțimea unei fețe laterale s.n. apotema piramidei.

Exemplu. VM ⊥ BC.

VM $\overset{not}{=} a_p$

Desfășurarea în plan

2.2 Piramida triunghiulară regulată

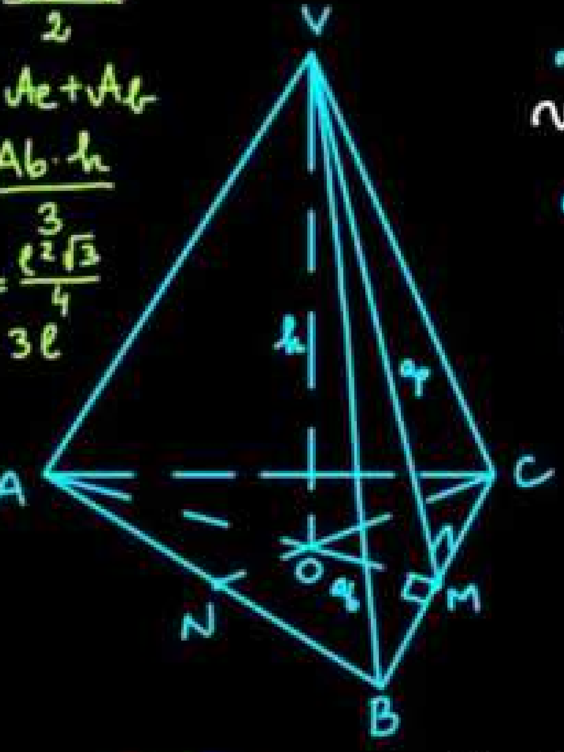
$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$

$A_t = A_l + A_b$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$P_b = 3l$



- VABC piramidă triunghiulară regulată
- fețe laterale: $\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VAC$

muchii laterale: $VA = VB = VC$

- baza: ΔABC echilateral
- Înălțimea: VO

Obs. $a_b^2 + h^2 = a_p^2$

2.3. Tetraedrul regulat

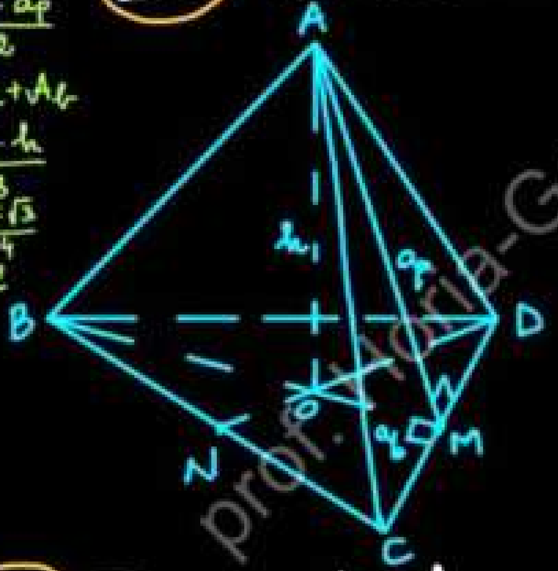
$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$

$A_t = A_l + A_b$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$P_b = 3l$



- ABCD tetraedru regulat
- Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente

($\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta ABD, \Delta BCD$)

- Muchii: $AB = AC = AD = BD = BC = CD$
- Înălțimea: AO

Obs. $a_b^2 + h^2 = a_p^2$

2.4. Piramida hexagonală regulată

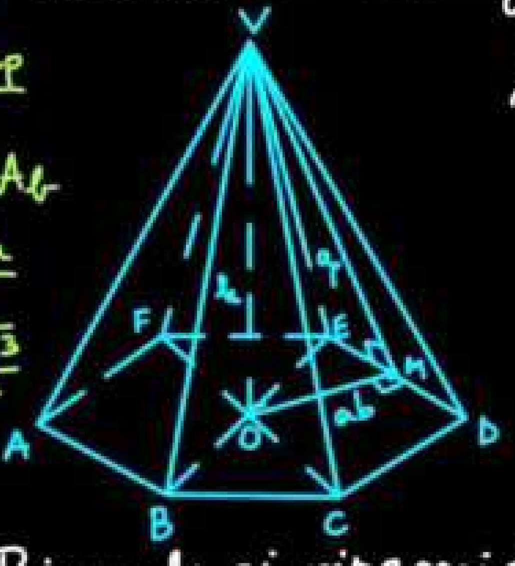
$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$

$A_t = A_l + A_b$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

$P_b = 6l$



- VABCDEF piramidă hexagonală regulată
- Baza: ABCDEF hexagon regulat
- Fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente

Obs. $a_b^2 + h^2 = a_p^2$

Obs. Prismele și piramidele sunt poliedre. (poli - mai mult edru - bază ([illegible]

3. Corpuri rotunde

3.1 Cilindrul circular drept

Def. Corpul geometric obținut prin rotirea unui dreptunghi în jurul uneia dintre dimensiuni s.n. cilindru circular drept.

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$

$V = \mathcal{A}_b \cdot h$

$\mathcal{A}_b = \pi r^2$

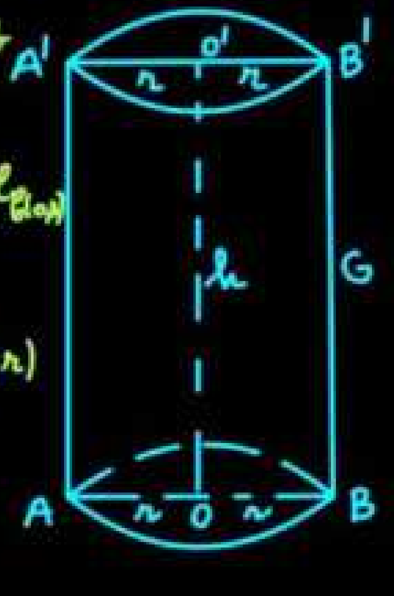
$\mathcal{P}_b = 2\pi r = l_{\mathcal{C}(O,r)}$

Așadar,

$\mathcal{A}_l = 2\pi r G$

$\mathcal{A}_t = 2\pi r(G+r)$

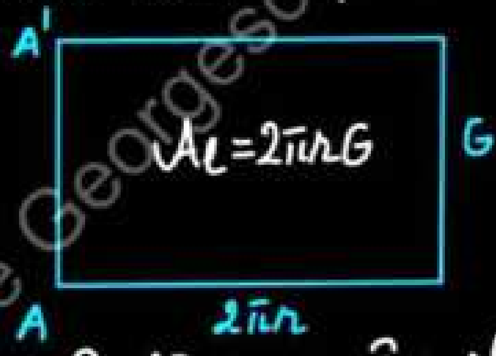
$V = \pi r^2 G$



Obs. Înălțimea (h) are lungimea egală cu lungimea generatoarei (G).

$h = OO'$; $G = BB' = AA'$.

Bazele: $\mathcal{C}(O,r)$ și $\mathcal{C}(O',r)$.



Desfășurarea în plan

3.2 Conul circular drept

Def. Corpul geometric obținut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catete s.n. con circular drept.

$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot G}{2}$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$

$V = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$

$\mathcal{A}_b = \pi r^2$

$\mathcal{P}_b = 2\pi r = l_{\mathcal{C}(O,r)}$

Așadar,

$\mathcal{A}_l = \pi r G$

$\mathcal{A}_t = \pi r(G+r)$

$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

Obs.

$r^2 + h^2 = G^2$

Baza: $\mathcal{C}(O,r)$

$\frac{\pi G^2 \cdot u^\circ}{360^\circ} = \pi r G$

$\Rightarrow \frac{u^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{G}$

Desfășurarea în plan

③.3. Sfera

Def. Mulțimea punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix (O) s.n. sferă.

Sfera $S(O, r)$.
$\underset{\text{centrul sferei}}{O}$, $\underset{\text{raza sferei}}{r}$

$A_{sferei} = 4\pi r^2$

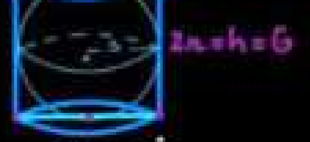
$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Justificare intuitivă:
  Piramide cu vârful în centrul sferei și cu baza tinzând la un punct.
  Înălțimea unei astfel de piramide este egală cu raza sferei.

$V_{sferei} = V_{pir1} + V_{pir2} + \ldots = \frac{A_{b_1} \cdot h}{3} + \frac{A_{b_2} \cdot h}{3} + \ldots \overset{h=r}{=} \frac{r(\overbrace{A_{b_1} + A_{b_2} + \ldots}^{4\pi r^2})}{3}$

Prop. (Arhimede – „Despre sferă și cilindru")
Considerăm o sferă S înscrisă în cilindrul circular drept C. Atunci $\frac{V_S}{V_C} = \frac{2}{3}$ (adică volumul sferei S reprezintă două treimi din volumul cilindrului
Dem. (Exercițiu)



④. Secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice.

④.1. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată.

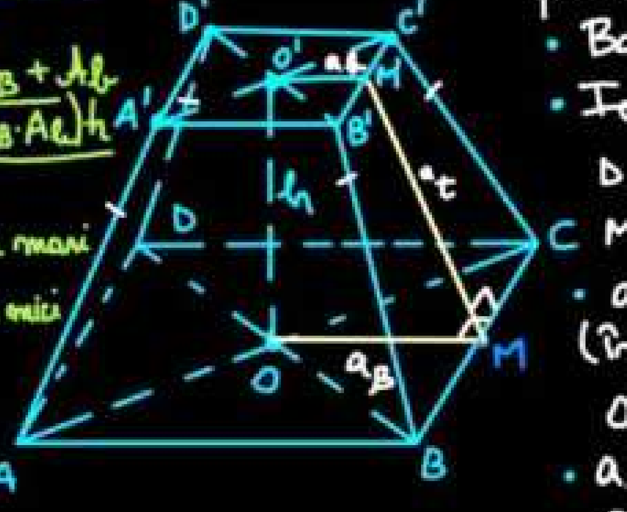
$A_\ell = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$

$A_t = A_\ell + A_B + A_b$

$V = \frac{(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})h}{3}$

A_B – aria bazei mari

A_b – aria bazei mici



- ABCDA'B'C'D' trunchi de piramidă patrulateră regulată
- Baze: pătratele ABCD (baza mare) și A'B'C'D' (baza mică)
- Fețe laterale: ABB'A', B'BCC', DCC'D', ADD'A' (trapeze isoscele congruente)
- $M'M \overset{not}{=} a_t$, $M'M \perp BC$
- a_t este apotema trunchiului (înălțimea unei fețe laterale)
  $O'M' \overset{not}{=} a_b$, $O'M' \perp B'C'$
- a_b este apotema bazei mici
  $OM \overset{not}{=} a_B$, $OM \perp BC$
- a_B este apotema bazei mari
- $OO' \overset{not}{=} h$ este înălțimea trunchiului

4.2. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată

$$A_\ell = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_t}{2}$$

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

$$V = \frac{(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})h}{3}$$

A_B = aria bazei mari

A_b = aria bazei mici

- ABCA'B'C' trunchi de piramidă triunghiulară regulată
- Baze: triunghiurile echilaterale ΔABC (baza mare) și ΔA'B'C' (baza mică).
- Fețe laterale: ABB'A', BCC'B' și ACC'A' (trapeze isoscele congruente).

4.3. Trunchiul de piramidă hexagonală regulată

$$A_\ell = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_t}{2}$$

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

$$V = \frac{(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})h}{3}$$

A_B = aria bazei mari

A_b = aria bazei mici

- ABCDEFA'B'C'D'E'F' trunchi de piramidă hexagonală regulată
- Baze: Hexagoanele regulate ABCDEF (baza mare) și A'B'C'D'E'F' (baza mică)
- Fețele laterale: Trapezele isoscele congruente: BCC'B', CDD'C', DEE'D', EFF'E', FAA'F', și ABB'A'.

4.4. Trunchiul de con circular drept

$$A_\ell = \frac{(\ell_{\mathcal{C}(O,R)} + \ell_{\mathcal{C}(O',r)})\cdot G}{2}$$

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

$$V = \frac{(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})h}{3}$$

A_B = aria bazei mari

A_b = aria bazei mici

- Baze: Cercul $\mathcal{C}(O,R)$ (baza mare) și cercul $\mathcal{C}(O',r)$ (baza mică)
- $BB' \overset{not}{=} G$ (generatoare)

Relația lui Euler

În orice poliedru $F+V=M+2$, unde F este numărul fețelor, V numărul vârfurilor și M (E-edge) numărul muchiilor.

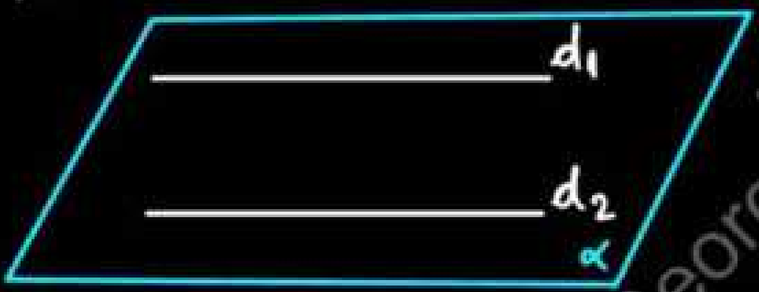
Drepte paralele
Unghiul a două drepte în spațiu
Drepte perpendiculare
Dreaptă paralelă cu un plan

Def. Două drepte care se află în același plan s.n. drepte coplanare.

Def. Două drepte care nu sunt coplanare s.n. drepte necoplanare.

Obs. Două drepte concurente sunt coplanare.

Def. Două drepte coplanare care nu se intersectează (nu au nici un punct comun) s.n. drepte paralele.



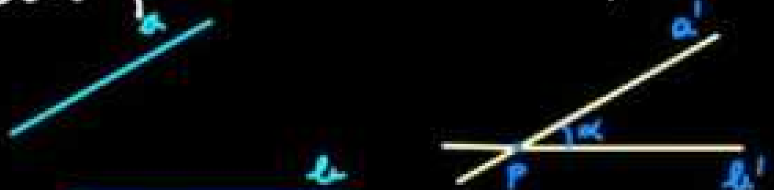
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \cap d_2 = \emptyset \\ d_1, d_2 \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Obs. Două drepte paralele sunt coplanare.

Remarcă. Două drepte necoplanare nu pot fi paralele.

Unghiul a două drepte în spațiu

Def. Considerăm două drepte (necoplanare) în spațiu. Unghiul determinat de cele două drepte este orice unghi ascuțit sau drept cu vârful în orice punct al spațiului și cu laturile respectiv paralele cu dreptele date.



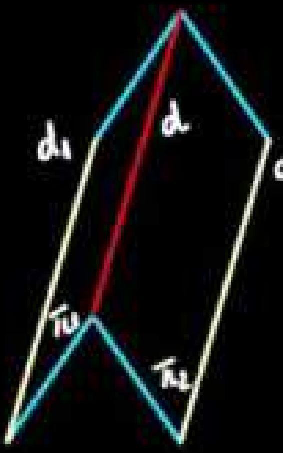
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a' \\ b \parallel b' \\ a' \cap b' = \{P\} \\ \alpha \leq 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(a',b') = \alpha.$$

Obs. Dacă $a\parallel b$ atunci $\sphericalangle(a,b)=0^\circ$.

Def. Două drepte în spațiu sunt perpendiculare dacă măsura unghiului format de ele este egală cu 90°.

$$\sphericalangle(a,b)=90^\circ \Rightarrow a\perp b.$$

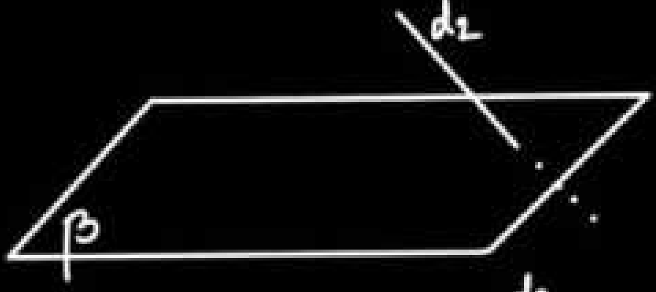
Teorema „acoperișului". Dacă dreptele paralele d_1 și d_2 sunt incluse în plane secante, atunci cele două drepte (d_1 și d_2) sunt paralele cu dreapta de intersecție a celor două plane.



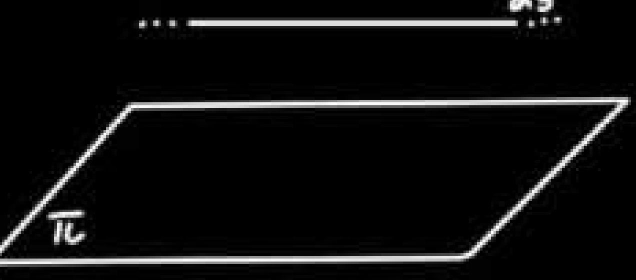
$$\left.\begin{array}{l} d_1\parallel d_2\\ d_1\subset\pi_1\\ d_2\subset\pi_2\\ \pi_1\cap\pi_2=d\end{array}\right\}\Rightarrow d_1\parallel d_2\parallel d.$$

Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

(i) Dreaptă inclusă în plan
$d_1\subset\alpha$



(ii) Dreaptă secantă planului (intersectează planul într-un singur punct)
$d_2\cap\beta\neq\phi$



(iii) Dreaptă paralelă cu planul (nu intersectează planul în niciun punct)
$d_3\cap\pi=\phi$; Notăm $d_3\parallel\pi$.

Teoremă. Dacă o dreaptă d nu este inclusă în planul α și este paralelă cu o dreaptă d' inclusă în planul α, atunci dreapta d este paralelă cu planul α.

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel d' \\ d \not\subset \alpha \\ d' \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

Dem. Presupunem prin reducere la absurd că $d \cap \alpha \neq \emptyset$. Cum $d \not\subset \alpha$ rezultă că d este secantă planului α, deci $d \cap \alpha = \{P\}$.

Dreptele paralele d și d' determină un plan $\beta \neq \alpha$.

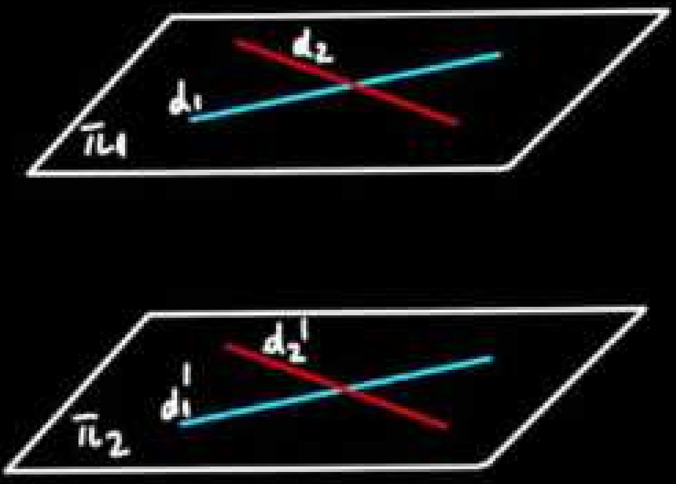
$d' \subset \alpha$, $d' \subset \beta$, deci $\alpha \cap \beta = d'$.

$P \in \alpha$ și $P \in d \subset \beta \Rightarrow P \in \alpha \cap \beta$, deci $P \in d \cap d'$, contradicție cu faptul că $d \parallel d'$ □

Morala. Pentru a demonstra că o dreaptă este paralelă cu un plan, demonstrăm că dreapta este paralelă cu o dreaptă inclusă în acel plan.

Plane paralele

Teoremă. Considerăm planele π_1 și π_2. Dacă două drepte (concurente) incluse în planul π_1 sunt respectiv paralele cu două drepte din planul π_2, atunci planele π_1 și π_2 sunt paralele.



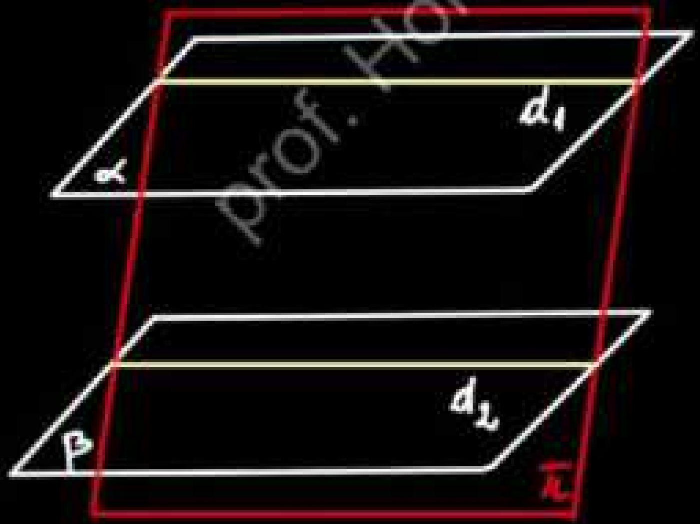
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \subset \pi_1 \\ d_2 \subset \pi_1 \\ d_1 \cap d_2 \neq \emptyset \\ d_1 \parallel d_1' \\ d_2 \parallel d_2' \\ d_1' \subset \pi_2 \\ d_2' \subset \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

Morala. Pentru a demonstra că două plane sunt paralele demonstrăm că două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan.

Teorema „fierăstrăului".

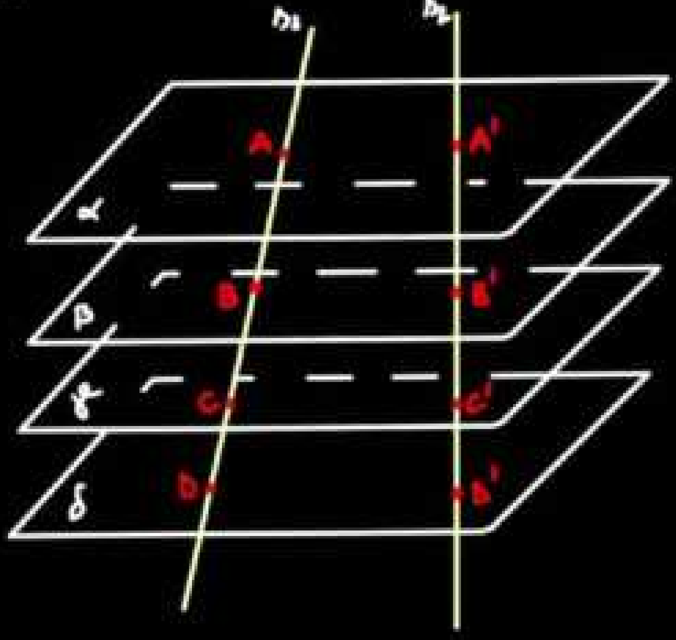
Dacă planele α și β sunt paralele și planul π intersectează planul α, atunci planul π intersectează și planul β, iar dreptele de intersecție sunt paralele.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \pi \cap \alpha = d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \pi \cap \beta = d_2 \text{ și} \\ d_1 \parallel d_2 \end{array}$$



Teoremă (Teorema lui Thales în spațiu)

Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare pe care le intersectează segmente proporționale.



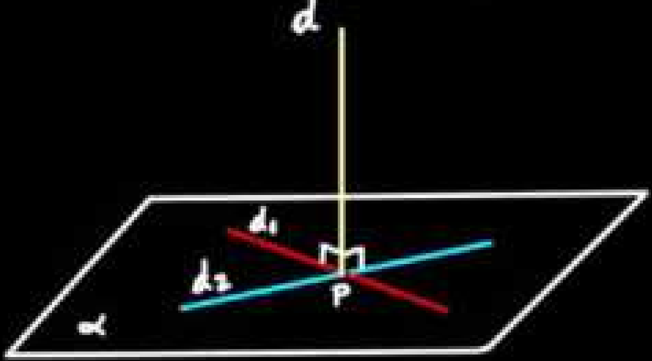
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \delta \\ s_1, s_2 \text{ secante} \\ s_1 \cap \alpha = \{A\} \\ s_2 \cap \alpha = \{A'\} \\ \vdots \\ s_1 \cap \delta = \{D\} \\ s_2 \cap \delta = \{D'\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Dreaptă perpendiculară pe un plan

Def. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe toate dreptele (orice dreaptă) din acel plan.

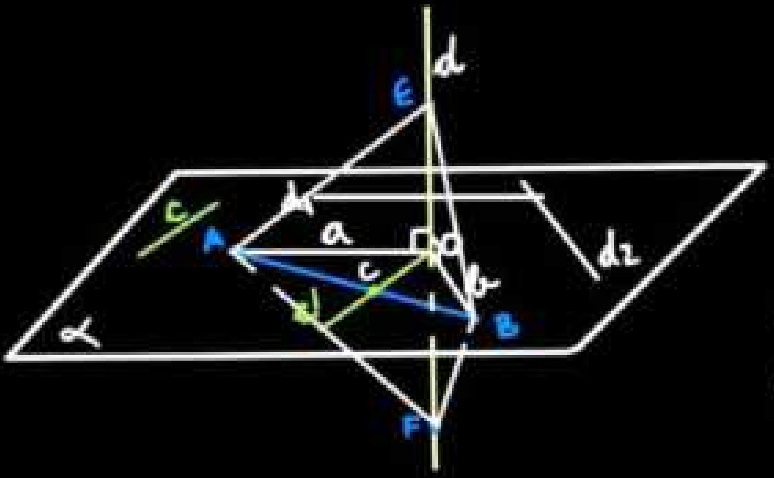
Dacă dreapta d este perpendiculară pe un plan α notăm $d \perp \alpha$.

Teoremă. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan α atunci d este perpendiculară pe planul α.



$$\left.\begin{array}{l} d \perp d_1 \\ d_1 \subset \alpha \\ d \perp d_2 \\ d_2 \subset \alpha \\ d_1 \cap d_2 \neq \Phi \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha.$$

Dem.



Fie $d_1, d_2 \subset \alpha$, $d_1 \cap d_2 \neq \phi$ a.î. $d \perp d_1$ și $d \perp d_2$ și punctul $\{O\} = d \cap \alpha$.

Considerăm $a \parallel d_1$, $b \parallel d_2$, $O \in a \cap b$, $A \in a$, $B \in b$.

Vrem să demonstrăm că dacă $c \subset \alpha$ este o dreaptă oarecare (din planul α), atunci $d \perp c$.

Construim prin O dreapta $c' \parallel c$ și notăm cu C intersecția dintre c' și AB.

Fie $E, F \in d$ a.î. $O = \text{mij}[EF]$.

$$\left.\begin{aligned} OE &\equiv OF \\ OA &\equiv OA \end{aligned}\right\} \overset{C.C.}{\Longrightarrow} \Delta AOE \equiv \Delta AOF \Rightarrow AE \equiv AF \ (*)$$

$$\left.\begin{aligned} OE &\equiv OF \\ OB &\equiv OB \end{aligned}\right\} \overset{C.C.}{\Longrightarrow} \Delta EOB \equiv \Delta FOB \Rightarrow BE \equiv BF \ (**)$$

Din (*) și (**) rezultă că $\Delta EAB \equiv \Delta FAB$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FAC$.

$$\left.\begin{aligned} AE &\equiv AF \\ \sphericalangle EAC &\equiv \sphericalangle FAC \\ AC &\equiv AC \end{aligned}\right\} \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta EAC \equiv \Delta FAC \Rightarrow EC \equiv FC, \text{ deci}$$

ΔEFC este isoscel cu CO mediană din vârful opus bazei.

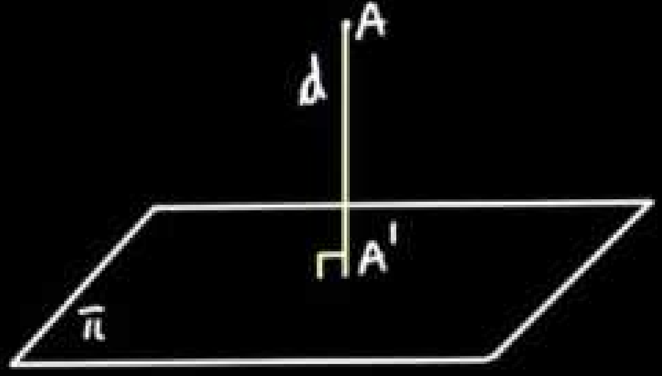
Ca atare, CO este înălțime în ΔEFC isoscel, deci $CO \perp EF$.

În concluzie, dacă $d \perp d_1$ și $d \perp d_2$ cu $d_1, d_2 \subset \alpha$, $d_1 \cap d_2 \neq \phi$ am demonstrat că $d \perp c$ pentru oricare dreaptă $c \subset \alpha$, prin urmare, $d \perp \alpha$. □

De ce nu este suficient ca d să fie perpendiculară pe o singură dreaptă din planul α? (Exercițiu).

Teoremă. Există o unică perpendiculară dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan.

Def. Distanta de la un punct la un plan reprezintă segmentul determinat de acel punct și piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.



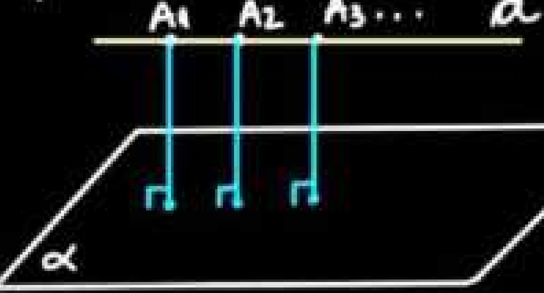
$$\left.\begin{array}{l} d \perp \pi \\ A \in d \\ \{A'\} = d \cap \pi \end{array}\right\} \Rightarrow dist(A, \pi) = AA'$$

A' s.m. proiecția (ortogonală) punctului A pe planul π.

Notăm: $A' = pr_{\pi} A$.

Def. Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan π, atunci distanța de la dreapta d la planul π este egală cu distanța de la orice punct al dreptei d la planul π.

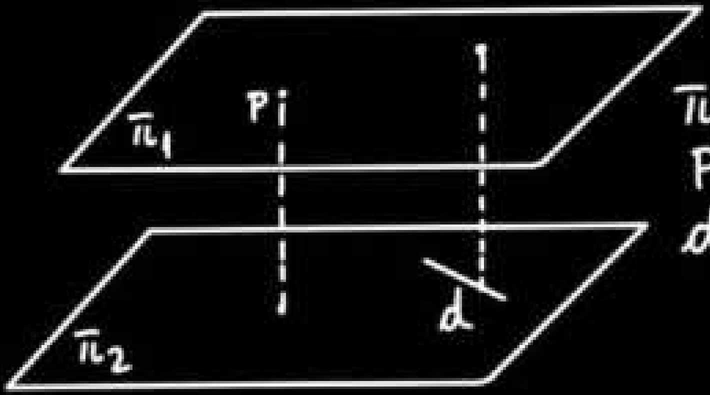
Obs. Distanțele de la orice punct de pe o dreaptă paralelă cu un plan la acel plan sunt egale indiferent de punctul ales pe dreaptă.



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel \alpha \\ A_1, A_2, A_3 \ldots \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dist(d, \alpha) = dist(A_1, \alpha) = dist(A_2, \alpha) = dist(A_3, \alpha) = \cdots .$$

Def. Distanța dintre două plane paralele este egală cu distanța de la orice punct al unuia dintre plane la celălalt plan (coincide cu distanța de la orice dreaptă dintr-un plan la celălalt plan).



$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \parallel \pi_2\\ P\in\pi_1\\ d\subset\pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathrm{dist}(\pi_1,\pi_2)=\mathrm{dist}(P,\pi_2)\\ =\mathrm{dist}(d,\pi_1).\end{array}$$

Obs. În anumite situații, pentru a demonstra că o dreaptă d_1 este perpendiculară pe o dreaptă d_2 arătăm că dreapta d_1 este perpendiculară pe un plan care conține dreapta d_2.

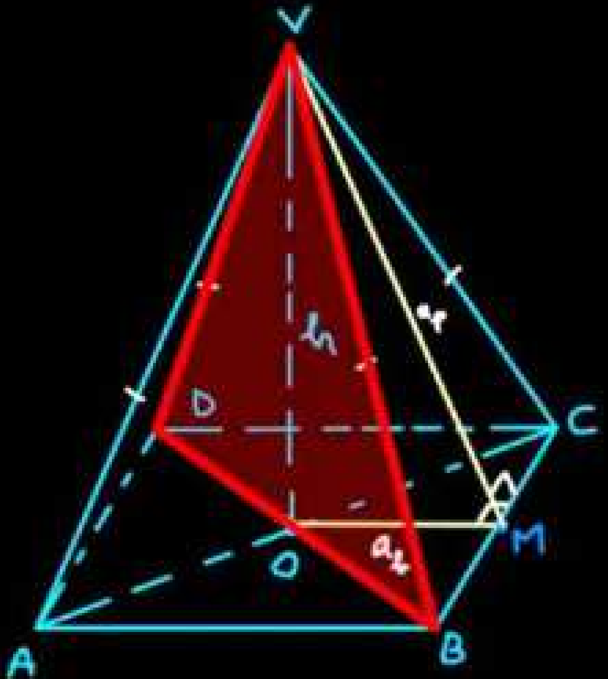
Exemple de distanțe de la un punct la un plan: înălțimea piramidelor regulate, prismelor drepte și a conului circular drept, înălțimea și generatoarea cilindrului circular drept.

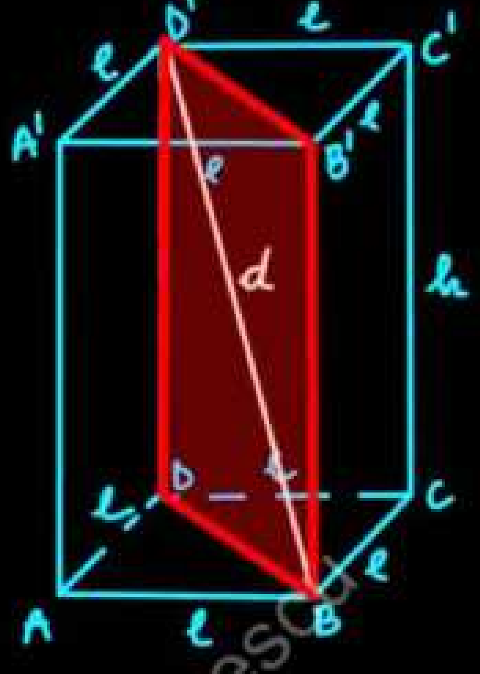
Secțiuni în corpuri geometrice

i) Secțiuni paralele cu baza (trunchiurile studiate).

ii) Secțiuni diagonale: un plan care conține o diagonală a bazei și o muchie laterală.

Exemple:

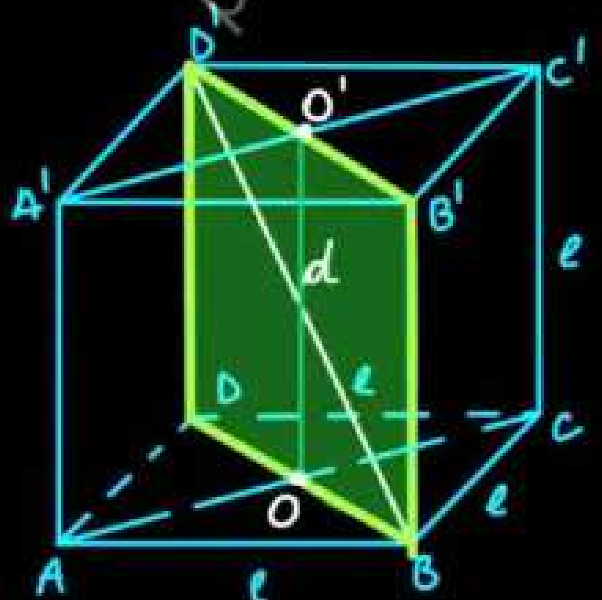


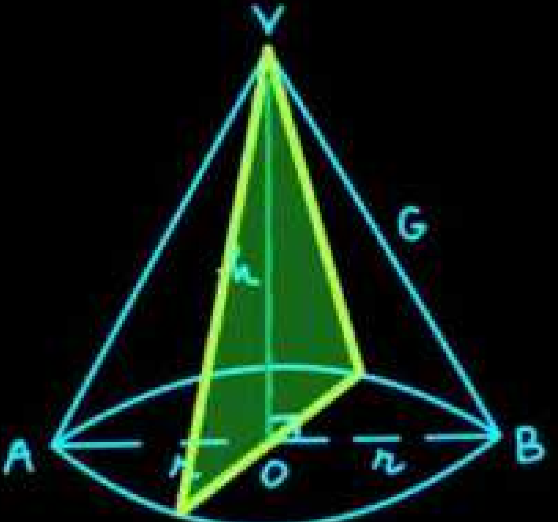


ii) Secțiuni axiale: un plan care conține o axă de simetrie.

Def. O dreaptă s.n. axă de simetrie a unui corp geometric studiat (poliedre sau corpuri rotunde) dacă simetricul oricărui punct al acestuia față de dreaptă aparține corpului dat.

Exemple:

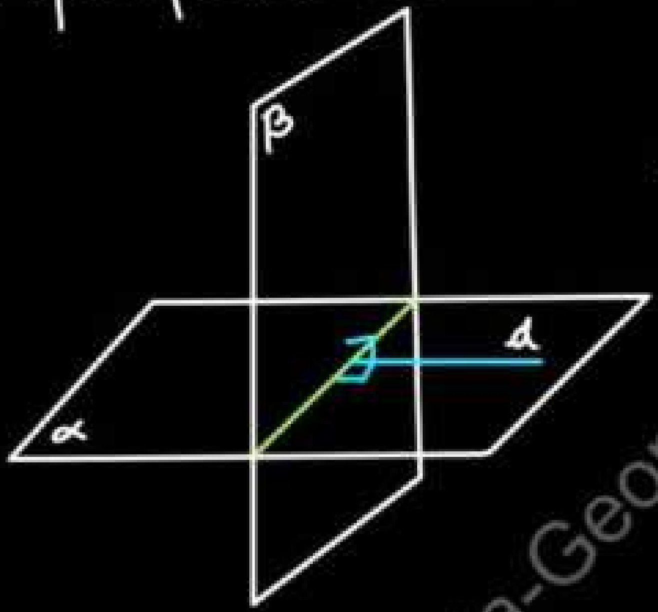




Plane perpendiculare

Def.

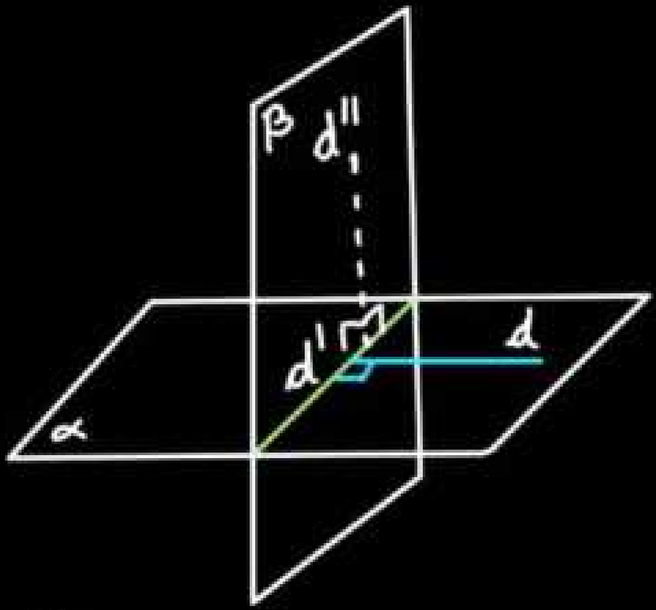
Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă există o dreaptă inclusă într-unul dintre ele care să fie perpendiculară pe celălalt.



$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists\, d \subset \alpha$ a.î. $d \perp \beta$.

Obs. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci orice plan care contine dreapta d va fi perpendicular pe planul α.

Teoremă. Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă care este inclusă într-un plan și este perpendiculară pe dreapta lor de intersectie este perpendiculară și pe celălalt plan.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=d' \\ d\subset\alpha \\ d\perp d' \end{array}\right\} \Rightarrow d\perp\beta.$$

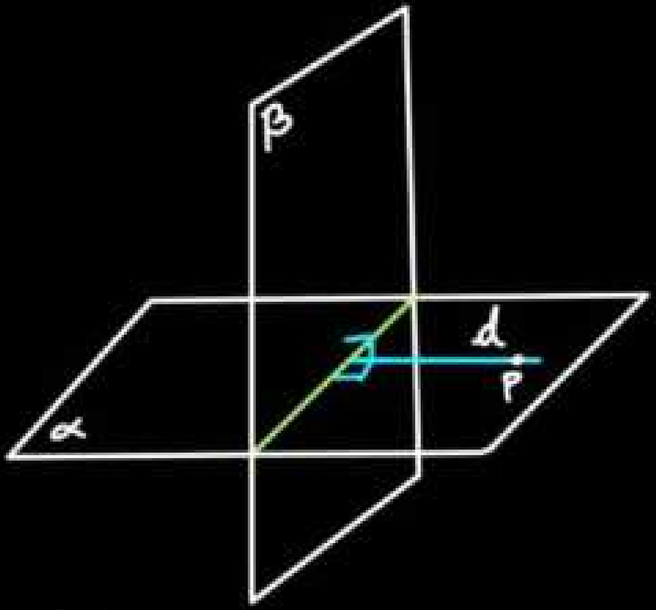
Dem.

Cum $\alpha\perp\beta$ rezultă că există $d''\subset\beta$ a.î. $d''\perp\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} d''\perp\alpha \\ d\subset\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d''\perp\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} d\perp d' \\ d'\subset\beta \\ d\perp d'' \\ d''\subset\beta \\ d'\cap d''\neq\phi \end{array}\right\} \Rightarrow d\perp\beta. \quad \square$$

Teoremă. Dacă planele α și β sunt perpendiculare și prin punctul P al planului α construim o dreaptă d perpendiculară pe planul β, atunci d este inclusă în planul α.



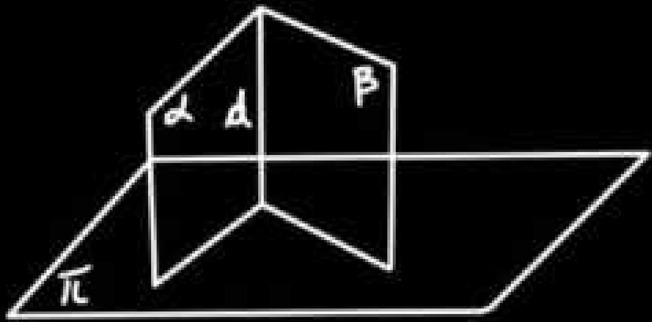
$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ P\in\alpha\\ P\in d\\ d\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow d\subset\alpha.$$

<u>Dem</u>. Cum $\alpha\perp\beta$ există o dreapta $d_2\subset\alpha$ a.î. $d_2\perp\beta$ și $d_2\perp(\alpha\cap\beta)$.

Fie $d_3 \parallel d_2$ a.î $P\in d_3$. Evident $d_3\perp\beta$. Cum perpendiculara dintr-un punct pe un plan este unică rezultă că $d_3=d$, deci $d\subset\alpha$. □

<u>Teoremă</u>. Dacă două plane concurente sunt perpendiculare pe un al treilea plan, atunci și dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe acel plan.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\pi\\ \beta\perp\pi\\ \alpha\cap\beta=d\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp\pi$$



<u>Dem</u>. $\alpha\perp\pi\Rightarrow\exists\, d_1\subset\pi$ a.î. $d_1\perp\alpha$

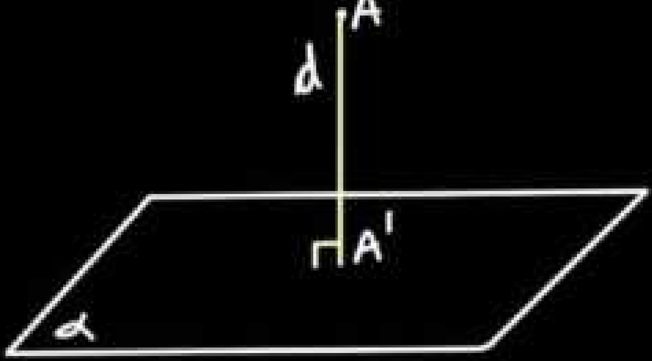
$\beta\perp\pi\Rightarrow\exists\, d_2\subset\pi$ a.î. $d_2\perp\beta$.

$$\left.\begin{array}{l}d_1\cap d_2\neq\phi\\ d=\alpha\cap\beta\\ d_1\perp d\\ d_2\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow d_1\perp\pi.$$

□

Proiecții (ortogonale) pe un plan

Def. Proiecția ortogonală a unui punct pe un plan reprezintă piciorul perpendicularei duse din punctul respectiv pe plan.

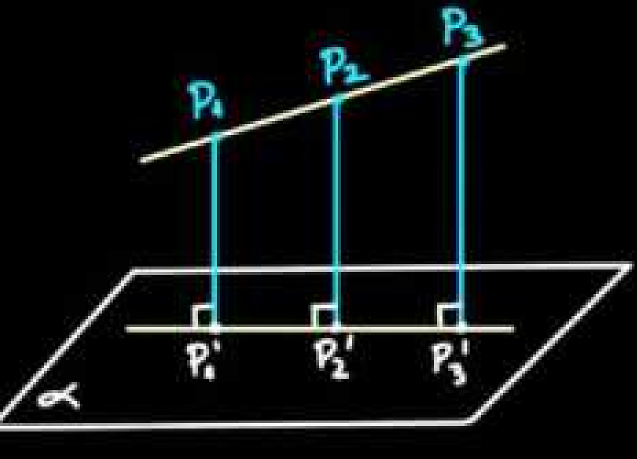


$$\left.\begin{array}{l} d\perp\alpha \\ A\in d \\ \{A'\}=d\cap\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow pr_{\alpha}A = A'.$$

$$dist(A,\alpha) = AA'.$$

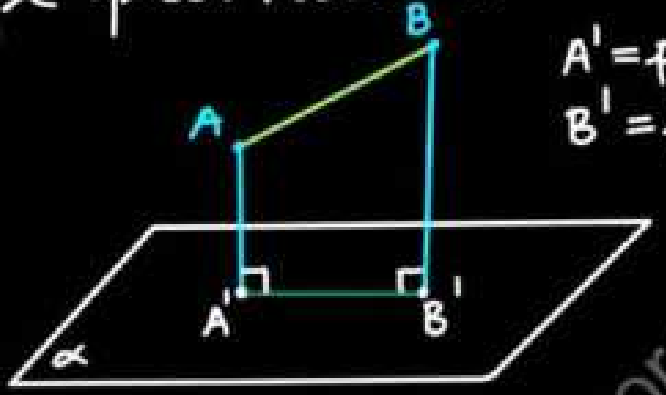
Obs. Dacă $A\in\alpha$ atunci $pr_{\alpha}A = A$.

Teoremă. Dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare în această ordine, iar P_1', P_2' și P_3' sunt proiecțiile acestor puncte pe planul α, atunci și punctele P_1', P_2' și P_3' sunt coliniare în această ordine.



Consecințe:

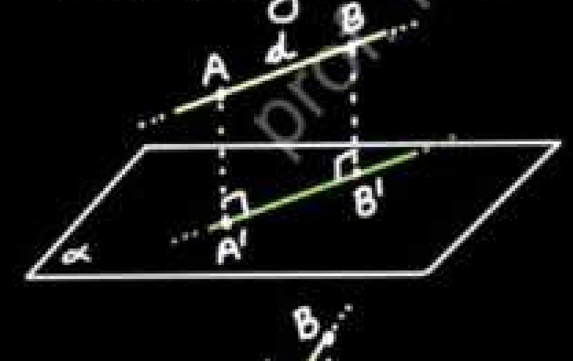
i) Proiecția unui segment pe un plan α este segmentul determinat de proiecțiile capetelor segmentului inițial pe planul α.



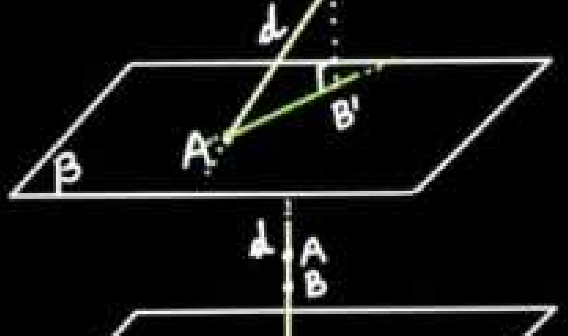
$$\left.\begin{array}{l} A' = pr_\alpha A \\ B' = pr_\alpha B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_\alpha[AB] = [A'B'].$$

ii) Proiecția unei drepte (neperpendiculare) pe un plan α este dreapta determinată de proiecțiile a două puncte distincte de pe dreapta inițială pe planul α.

Distingem următoarele situații:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel \alpha \\ pr_\alpha A = A' \\ pr_\alpha B = B' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_\alpha AB = A'B' \text{ și } [AB] \equiv [A'B'].$$



$$\left.\begin{array}{l} AB \cap \alpha = \{A\} \\ pr_\alpha A = A \\ pr_\alpha B = B' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_\alpha AB = AB'.$$

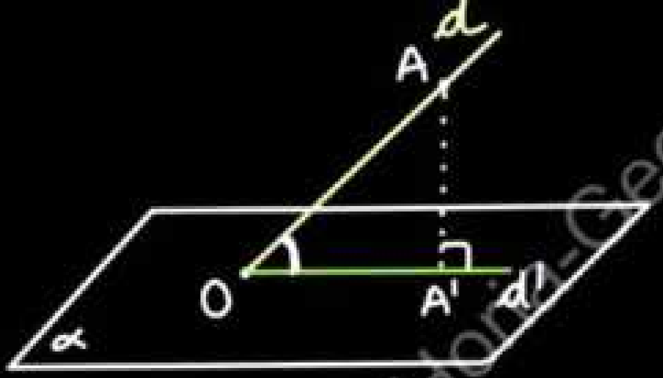
$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ pr_\alpha A = pr_\alpha B = P \end{array}\right\} \Rightarrow pr_\alpha AB = P.$$

Prop. Dacă $d \not\subset \alpha$ și $pr_{\alpha} d = d'$, atunci
$$(d, d') \perp \alpha.$$

Dem. Rezultă imediat din definiția planelor perpendiculare.

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Def. Unghiul dintre o dreaptă și un plan (pe care nu este perpendiculară) este unghiul dintre dreaptă și proiecția ortogonală a dreptei pe plan.



$A, O \in d$, $\{O\} = d \cap \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} pr_{\alpha} A = A' \\ pr_{\alpha} O = O \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{\alpha} d = OA' = d'.$$

Așadar,

$$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, pr_{\alpha} d) = \sphericalangle(d, d') = \sphericalangle AOA'.$$

Obs.

i) $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha \Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = 0°$.

ii) $d \perp \alpha \Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = 90°$.

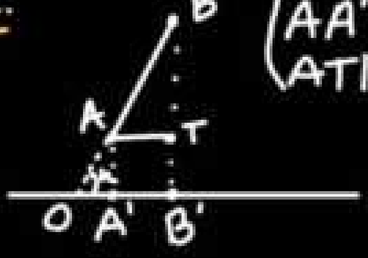
iii) $\sphericalangle(d, \alpha) \leq 90°$, $\forall \alpha$ plan și $\forall d$ dreaptă.

iv) $\sphericalangle(d, \alpha)$ este cel mai mic dintre unghiurile formate de dreapta d cu dreptele planului α.

Teoremă. Lungimea proiecției unui segment AB pe o dreaptă d:

Dacă $A'B' = pr_{d} AB$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, d))$

Dem.



$\begin{pmatrix} AA' \parallel BB' \\ AT \parallel A'B' \end{pmatrix}$ $\cos(\hat{u}) = \dfrac{OB'}{OB} \overset{T.Th}{=} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{AT}{AB}$

$AT = A'B'$.

Așadar,

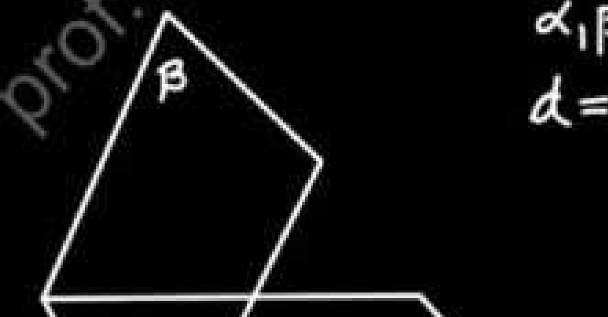
$AB \cdot \cos(\hat{u}) = \cancel{AB} \cdot \dfrac{A'B'}{\cancel{AB}} = A'B'$. □

Teoremă. Lungimea proiecției unui segment AB pe un plan α:

Dacă $A'B' = pr_{\alpha} AB$, atunci $A'B = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, \alpha))$

Unghi diedru. Unghiul dintre două plane.

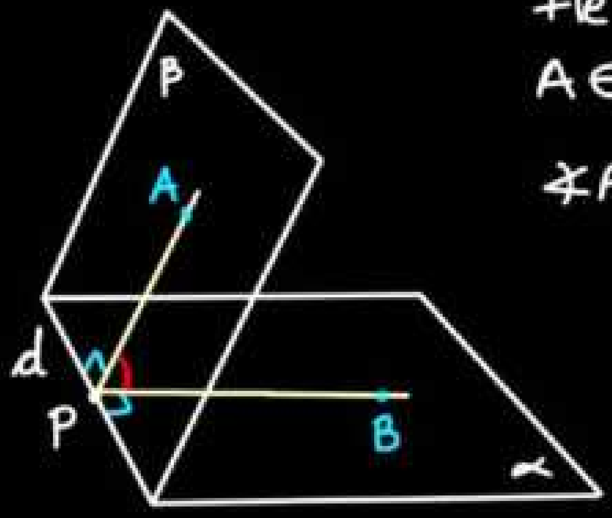
Def. Unghiul diedru este configurația formată de două semiplane determinate de aceeași dreaptă.



α, β s.n. fețele diedrului

$d = \alpha \cap \beta$ s.n. muchia diedrului

Def. Unghiul plan diedru este unghiul format de perpendicularele duse în cele două fețe ale diedrului pe muchia diedrului în același punct.



Fie $P \in d$, unde $d = \alpha \cap \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$ a.î. $AP \perp d$ și $BP \perp d$.

$\sphericalangle APB$ s.n. unghi plan diedru.

Def. Măsura unghiului diedru este egală cu măsura oricărui unghi plan diedru corespunzător diedrului.

Def. Măsura oricărui unghi (ascuțit sau drept) plan diedru determinat de două plane concurente s.n. măsura unghiului dintre cele două plane.

În cazul figurii de mai sus,

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(AP, PB) = \sphericalangle APB.$$

Obs.

i) $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = 90^\circ$

ii) $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = 0^\circ$

Teoremă. Fie $\mathcal{P}$ un poligon de arie S, α un plan și $\mathcal{P}' = pr_\alpha \mathcal{P}$. Atunci aria S' a poligonului $\mathcal{P}'$ este $S' = S\cos(\sphericalangle(\alpha, \mathcal{P}))$.

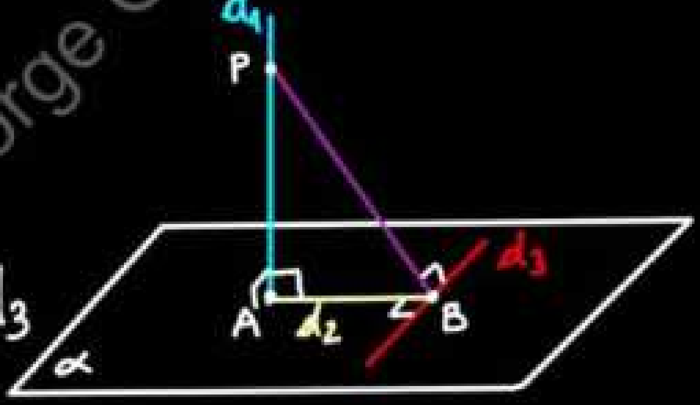
Teorema celor trei perpendiculare
(T3⊥)

Teoremă. (T3⊥)

Considerăm o dreaptă d_1 perpendiculară pe un plan α și care intersectează planul în punctul A. Dacă prin A trece o dreaptă d_2 inclusă în planul α care este perpendiculară pe o altă dreaptă d_3 inclusă în planul α și $d_2 \cap d_3 = \{B\}$, atunci pentru orice punct $P \in d_1$ dreapta PB este perpendiculară pe d_3.

Enunț simbolic:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp \alpha \\ d_1 \cap \alpha = \{A\} \\ d_2 \subset \alpha,\ A \in d_2 \\ d_2 \perp d_3,\ d_3 \subset \alpha \\ d_2 \cap d_3 = \{B\} \\ P \in d_1 \end{array}\right\} PB \perp d_3$$



Utilitate: T3⊥ ne poate ajuta să aflăm distanța de la un punct la o dreaptă.

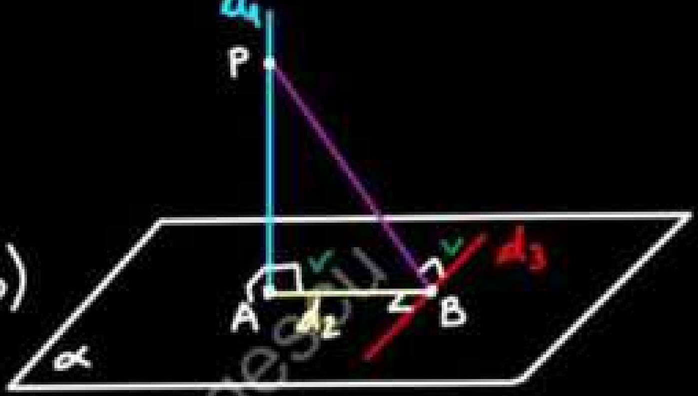
Dem.
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp \alpha \\ d_3 \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d_3 \perp d_1$$

$$\left.\begin{array}{l} d_3 \perp d_1,\ d_1 \subset (PAB) \\ d_3 \perp d_2,\ d_2 \subset (PAB) \\ d_1 \cap d_2 = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_3 \perp (PAB) \\ PB \subset (PAB) \end{array}\right\} \Rightarrow d_3 \perp PB. \ \square$$

Reciproce ale Teoremei celor trei perpendiculare

Obs. Păstrăm notațiile din cadrul T3⊥.

Teoremă. Reciproca I. ($R_1T3\perp$)



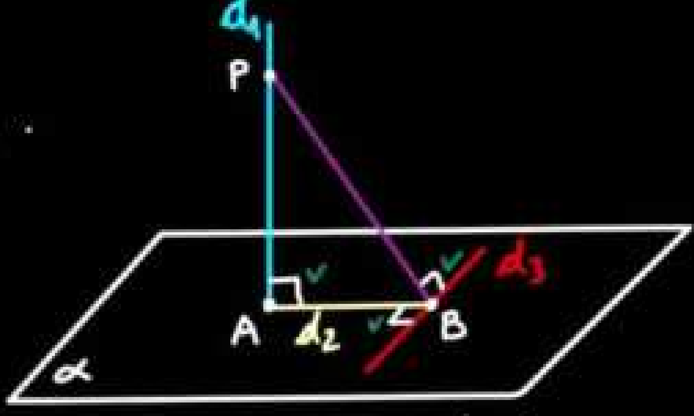
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp \alpha \\ PB \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow d_2 \perp d_3$$

Dem.

Se arată că $d_3 \perp (PAB)$ similar ca în cazul demonstrației T3⊥.

$$\left.\begin{array}{l} d_3 \perp (PAB) \\ d_2 \subset (PAB) \end{array}\right\} \Rightarrow d_3 \perp d_2.$$

Teoremă. Reciproca II. ($R_2T3\perp$)



$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp d_2 \\ d_2 \perp d_3 \\ PB \perp d_3 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \perp \alpha .$$

Dem.

Se arată că $d_3 \perp (PAB)$, deci $d_3 \perp d_1$ (deoarece $d_1 \subset (PAB)$) și cum $d_1 \perp d_2$, $d_2, d_3 \subset \alpha$, $d_2 \cap d_3 = \{B\}$ rezultă concluzia. □

Utilitate: $R_2T3\perp$ ne poate ajuta să aflăm distanța de la un punct la un plan.