

Concursul MateInfoUB 2023
- 21 mai 2023 -

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ o progresie aritmetică de rație r .

a) Demonstrați că șirul $(b_n)_{n \geq 0}$ definit prin $b_n = 2a_n + 3$ pentru orice $n \geq 0$, este tot o progresie aritmetică.

b) Presupunem $r \neq 0$. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali astfel încât $(P(a_n))_{n \geq 0}$ este progresie aritmetică. Arătați că $\text{grad}(P) \leq 1$.

c) Unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 0}$ cu toți termenii numere naturale îi asociem mulțimea $M = \{\cos(a_n) + i \sin(a_n) | n \in \mathbb{N}\}$. Determinați toate progresiile $(a_n)_{n \geq 0}$ pentru care (M, \cdot) este subgrup al lui (\mathbb{C}^*, \cdot) .

d) Demonstrați că, dacă toți termenii progresiei $(a_n)_{n \geq 0}$ sunt numere naturale și nu conțin în scrierea lor în baza 10 cifra 9, atunci $r = 0$.

Problema 2. Fie $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg(x) + \frac{1}{x}$ și $g(x) = f(x) - x$. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ șirul de numere reale definit astfel: $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \arctg(x_n) + \frac{1}{x_n}$, pentru orice $n \geq 0$.

a) Să se arate că g este strict descrescătoare și că ecuația $f(x) = x$ are o soluție unică $\bar{x} \in (0, +\infty)$.

b) Știind că $f(2) < 1, 7 < f(1)$ arătați că $\bar{x} \in (1, 2)$.

c) Demonstrați că pentru orice $1 < a < b$ avem $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}|a - b|$.

d) Demonstrați că șirurile $(x_{2n})_{n \geq 0}$ și $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sunt monotone și arătați că $x_{2n} < \bar{x} < x_{2n+1}$ pentru orice $n \geq 0$. Studiați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

Problema 3. Fie t un număr real pozitiv. Pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului ABC considerăm punctele C_t, B_t respectiv A_t , astfel ca

$$\frac{AC_t}{C_t B} = \frac{BA_t}{A_t C} = \frac{CB_t}{B_t A} = t.$$

a) Demonstrați că, pentru $t = 1$, triunghiurile ABC și $A_1 B_1 C_1$ sunt asemenea.

b) Demonstrați că pentru orice t triunghiurile ABC și $A_t B_t C_t$ au același centru de greutate.

c) Pentru $t = 3$, calculați raportul ariilor triunghiurilor ABC și $A_3 B_3 C_3$.

d) Să presupunem $t = 2$. Desenăm figura, apoi ștergem triunghiul ABC , dar lășăm triunghiul $A_2 B_2 C_2$. Indicați o modalitate de reconstruire a triunghiului ABC .

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.