

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Varianta 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $(2-i)^2 + i(4+i) = 2$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 3$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $(f \circ f)(m) = 2m$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 10$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,4)$ ,  $B(3,-2)$  și  $C(2a,a)$ , unde  $a$  este număr real nenul. Arătați că dreptele  $AB$  și  $OC$  sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul  $a$ .
- 5p** 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin x + 4 \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax - y + 2az = 0 \\ x - 2y + az = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 1$ .
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale  $a$  pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru  $a = -1$ , determinați soluțiile  $(x_0, y_0, z_0)$  ale sistemului pentru care  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x^2 y^2 - 4(x+y)^2 + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 1 = -3$ .
- 5p** b) Arătați că  $x * (-1) \leq 2x$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale nenule, cu  $m \leq n$ , pentru care  $m * n = 1$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{5} - \ln(x^2 + x + 5)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x^2 - 9x}{5(x^2 + x + 5)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu axa  $Ox$ .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația  $f(x) = 0$  are soluție unică.
2. Se consideră funcția  $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4x}{x^3 + 8}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = 8$ .

- 5p** | **b)** Arătați că  $\int_1^4 xf(x)dx = 4 \ln 2$ .
- 5p** | **c)** Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M\_mate-info$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Varianta 6

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$(2-i)^2 + i(4+i) = 4 - 4i + i^2 + 4i + i^2 =$ $= 4 - 1 - 1 = 2$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(m) = m + 6$ , pentru orice număr real $m$ $m + 6 = 2m$ , de unde obținem $m = 6$	3p 2p
3.	$5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x = 10$ , deci $2 \cdot 5^x = 10$ , de unde obținem $5^x = 5$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3 \cdot 3 = 9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = -2$ $m_{OC} = \frac{1}{2}$ , pentru orice număr real nenul $a$ și, cum $m_{AB} \cdot m_{OC} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$ , obținem că dreptele $AB$ și $OC$ sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul $a$	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)^2$ , pentru orice număr real $a$ $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ , deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -1$ , soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$ , cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3\alpha^2$ , deci $3\alpha^2 = 3$ , de unde obținem $\alpha = -1$ sau $\alpha = 1$ , deci soluțiile sunt $(1, 1, -1)$ și $(-1, -1, 1)$	2p 3p

<b>2.a)</b>	$0 * 1 = 0^2 \cdot 1^2 - 4(0+1)^2 + 1 =$ $= 0 - 4 + 1 = -3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * (-1) = -3x^2 + 8x - 3 =$ $= -3x^2 + 6x - 3 + 2x = -3(x-1)^2 + 2x \leq 2x$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$m^2 n^2 - 4(m+n)^2 + 1 = 1$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, obținem $mn - 2m - 2n = 0$ $(m-2)(n-2) = 4$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n$ , perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2x+1}{x^2+x+5} =$ $= \frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)} = \frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $a^2 - 9a = 0$ , de unde obținem $a = 0$ sau $a = 9$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$ ; $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [0, 9] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, 9]$ , deci $f(x) \leq f(0)$ , pentru orice $x \in (-\infty, 9]$ $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (9, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9, +\infty)$ și, cum $f(0) = -\ln 5 < 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și $f$ este continuă, obținem că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = \int_0^2 4x dx = 2x^2 \Big _0^2 =$ $= 8 - 0 = 8$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^4 x f(x) dx = \int_1^4 \frac{4x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \int_1^4 \frac{(x^3 + 8)'}{x^3 + 8} dx = \frac{4}{3} \cdot \ln(x^3 + 8) \Big _1^4 =$ $= \frac{4}{3} \ln 8 = 4 \ln 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{3x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3(x^3 + 8)} = \frac{1}{6}$	<b>3p</b> <b>2p</b>