Concursul MateInfoUB 2023

- 14 mai 2023 -
Secţiunea matematică

1. Fie $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 12. Care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{Z}_{12}$ este grup în raport cu operaţia de înmulţire a acestui inel?

A $\{\hat{1}, \hat{4}\}$ B $\{\hat{0}, \hat{6}\}$ C $\{\hat{4}, \hat{8}\}$ D $\{\hat{1}, \hat{9}\}$ E $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}\}$

2. Pentru câte valori ale numărului real pozitiv a, imaginea funcţiei $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2-4x+5$, este un interval închis, de lungime 1? (Reamintim că lungimea intervalului închis $[c, d]$ este egală cu $d - c$, iar imaginea funcţiei f este mulţimea $\{f(t) | t \in [-a, a]\}$.)

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

3. Lungimile laturilor unui triunghi sunt exprimate prin numerele $\log_2(n), \log_4(5), \log_8(9)$, unde n este un număr natural nenul. Numărul de valori posibile ale lui n este:

A 1 B 2 C 3 D 4 E infinit

4. Valoarea limitei

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt[3]{1+t^3}} dt$$

este:

A $\frac{1}{2}$ B 0 C $+\infty$ D $\frac{1}{6}$ E alt răspuns

5. Pentru o funcţie $h : A \to B$, numim *imaginea lui h* mulţimea $\{h(x) | x \in A\}$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 4^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = f \circ f$. Imaginea funcţiei g este:

A $(2; +\infty)$ B $(0; +\infty)$ C $\mathbb{R}$ D $(6; +\infty)$ E $(0; 1)$

6. Poligoanele regulate $A_0A_1A_2 \ldots A_{35}$ şi $B_0B_1B_2 \ldots B_{26}$ sunt înscrise în acelaşi cerc şi au vârfurile A_0 şi B_0 comune. Cardinalul mulţimii vârfurilor comune celor două poligoane este:

A 1 B 18 C 63 D 8 E 9

7. Care dintre următoarele valori este egală cu $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$?

A $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ B $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ C $\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$ D $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$ E $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$

8. Numărul numerelor naturale a pentru care $a, a+1, a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic este:

A 1 B 0 C 3 D infinit E 2

9. Un şir de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ satisface condiţia: media aritmetică a oricăror doi termeni consecutivi este egală cu indicele celui de-al doilea (de exemplu $\frac{a_4+a_5}{2} = 5$). Suma celor 100 de termeni este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 2550 $\boxed{\text{B}}$ 5050 $\boxed{\text{C}}$ 5100 $\boxed{\text{D}}$ 10100 $\boxed{\text{E}}$ 10000

10. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienţi reali astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $P(5^n - 1) = 5^{5n} - 1$. Atunci $P(3)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1023 $\boxed{\text{B}}$ 995 $\boxed{\text{C}}$ 873 $\boxed{\text{D}}$ 242 $\boxed{\text{E}}$ 0

11. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{6x, 3x^2\}$, pentru care $F(1) = 3$. Atunci $F(3)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 31 $\boxed{\text{B}}$ 27 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 23

12. Pentru câte valori ale numărului real a, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2 - 2x + a]$ (unde $[t]$ este partea întreagă a numărului real t), este derivabilă pe intervalul $[0, 1]$?

$\boxed{\text{A}}$ o infinitate $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 0 $\boxed{\text{D}}$ 2 $\boxed{\text{E}}$ 3

13. Pentru fiecare număr real m, definim funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$f_m(x) = \begin{cases} mx & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}.$$

Pentru două numere reale a şi b, condiţia necesară şi suficientă pentru ca $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $ab \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $a = b$ $\boxed{\text{C}}$ $a < 0$ sau $b < 0$ $\boxed{\text{D}}$ $a \geq 0$ şi $b \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$ Condiţia din enunţ nu poate fi îndeplinită, indiferent ce valori iau a şi b.

14. Într-un sistem de axe ortogonale cu originea în O, considerăm punctele $A(1; 2)$, $B(3; 1)$. Construim triunghiurile echilaterale ABC_1 şi ABC_2, ($C_1 \neq C_2$) şi fie D punctul pentru care $\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OD}$. Coordonatele lui D sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $(4; 3)$ $\boxed{\text{B}}$ $(2 + \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$ $\boxed{\text{C}}$ $(2; 1, 5)$ $\boxed{\text{D}}$ $(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \sqrt{3})$ $\boxed{\text{E}}$ $(0; 0)$

15. Pe laturile BC şi CD ale pătratului $ABCD$ se aleg punctele E şi F, astfel ca triunghiul AEF să fie echilateral. Raportul dintre aria triunghiului AEF şi aria pătratului $ABCD$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2\sqrt{3} - 3$ $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $2 - \sqrt{3}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Ana, Bogdan şi Cristina caută o comoară. Ei stau fiecare în câte unul din cele trei vârfuri ale unui triunghi echilateral ABC. Comoara se află în afara triunghiului la 1 km distanţă de Ana şi de Bogdan şi la 2 km de Cristina. Care este lungimea laturii triunghiului ABC?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ km $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$ km $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{3}$ km $\boxed{\text{D}}$ 5 km $\boxed{\text{E}}$ $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ km

17. Fie G graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm mulţimea T a punctelor din care se pot construi două tangente la G, perpendiculare între ele. Atunci mulţimea T este:

$\boxed{\text{A}}$ mulţimea vidă $\boxed{\text{B}}$ un punct $\boxed{\text{C}}$ o dreaptă $\boxed{\text{D}}$ reuniunea a două drepte distincte $\boxed{\text{E}}$ tot planul

18. Considerăm mulţimea matricelor 2×2, ale căror elemente sunt numere naturale de o cifră. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o matrice din această mulţime, determinantul ei să fie număr impar?

$\boxed{\text{A}}$ 37,5% $\boxed{\text{B}}$ 25% $\boxed{\text{C}}$ 50% $\boxed{\text{D}}$ 12,5% $\boxed{\text{E}}$ 62,5%

19. Câte rădăcini complexe w ale polinomului $X^{2023} - 1$ verifică inegalitatea $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |w-1|$?

$\boxed{\text{A}}$ 338 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 676 $\boxed{\text{D}}$ 2022 $\boxed{\text{E}}$ 1181

20. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq b \leq c$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_n = a^n + b^n + c^n$, pentru orice $n \geq 1$ şi fie $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pentru câte triplete de numere (a, b, c) mulţimea A este finită?

$\boxed{\text{A}}$ alt răspuns $\boxed{\text{B}}$ 8 $\boxed{\text{C}}$ 9 $\boxed{\text{D}}$ 20 $\boxed{\text{E}}$ 27

21. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin: $a_n =$ suma cifrelor lui n^2. Despre $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ putem spune că:

$\boxed{\text{A}}$ nu există $\boxed{\text{B}}$ este $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$ este 0 $\boxed{\text{D}}$ este 1 $\boxed{\text{E}}$ este 9

22. Fie $F(x) = \displaystyle\int_x^1 e^{t^2} dt$. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{e-1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{e+1}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{e-1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1-e}{2}$

23. Considerăm un triunghi echilateral ABC şi fie G centrul său de greutate. Colorăm cu roşu punctele aflate în interiorul sau pe laturile triunghiului care au proprietatea că distanţa de la P la G e mai mică sau egală decât distanţa de la P la orice vârf al triunghiului. Raportul dintre aria regiunii colorate cu roşu şi aria triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

24. Într-un sistem ortogonal de axe, considerăm mulţimea S a punctelor de coordonate $(a; b)$ pentru care ecuaţia $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = 1$ are cel mult o soluţie în intervalul $[0, 2\pi)$. Aria mulţimii S este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ π $\boxed{\text{B}}$ 2π $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 0