Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-(m^2-1)x+3$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului $f=X^4-3X^2+2X+1$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale.

5p **c)** Arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-2x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătați că $(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge2$.

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$z=i$ $\overline{z}=-i$ $a=0, b=-1$	**2p** **1p** **2p**
2.	$\frac{m^2-1}{4}=2 \Rightarrow m^2-9=0$ $m=-3$ nu convine, $m=3$ convine	**3p** **2p**
3.	$1+7x=1+3x+3x^2+x^3$ $x\left(x^2+3x-4\right)=0$ $x_1=0, x_2=1, x_3=-4$	**1p** **1p** **3p**
4.	$p=\frac{nr.cazuri \quad favorabile}{nr.cazuri \quad posibile}$ Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ și $\{1,3,5\} \Rightarrow 4$ cazuri favorabile Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10 \Rightarrow p=\frac{2}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ și $\overrightarrow{AM}=\left(x_M-1\right)\vec{i}+\left(y_M-1\right)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2 \\ y_M=1 \end{cases}$	**2p** **3p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**3p**
b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(-x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Deci $\left(A(x)\right)^{-1}=A(-x)$, unde $x\in\mathbb{R}$	**1p**
2. a)	$f(2)=16-12+4+1=9\Rightarrow$	**3p**
	Restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este $f(2)=9$	**2p**
b)	Presupunem că polinomul f are rădăcini raționale, f are coeficienți întregi, rădăcinile raționale pot fi 1 sau -1.	**2p**
	$f(1)=1-3+2+1=1\neq 0$ și $f(-1)=1-3-2+1=-3\neq 0$ deci presupunerea este falsă, atunci f nu are rădăcini raționale.	**3p**
c)	x_1 este rădăcină a lui $f\Rightarrow x_1^4-3x_1^2+2x_1+1=0 \,\vert : x_1\neq 0\Rightarrow x_1^3-3x_1+2+\frac{1}{x_1}=0$. Analog $x_2^3-3x_2+2+\frac{1}{x_2}=0, x_3^3-3x_3+2+\frac{1}{x_3}=0, x_4^3-3x_4+2+\frac{1}{x_4}=0$.	**3p**
	Adunăm relațiile și obținem $\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=3(x_1+x_2+x_3+x_4)-8=3\cdot 0-8=-8$.	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+1)'e^x-e^x(2x+1)}{e^{2x}}=$ $=\dfrac{(2-2x-1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-2x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f(x)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow\dfrac{2x+1}{e^x}\le\dfrac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice număr real x.	**3p** **2p**
2. a)	$I_2=\int_0^1 1dx-2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^4dx==\left(x-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\right)\Big\|_0^1=$ $=\dfrac{8}{15}$	**3p** **2p**
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx\ge 0$ pentru orice n, deci șirul este descrescător $I_n\ge 0$, deci şirul este mărginit inferior Finalizare	**3p** **1p** **1p**
c)	$I_n=x(1-x^2)^n\Big\|_0^1-n\int_0^1 x(1-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)dx=$ $=-2n\int_0^1\left[(1-x^2)-1\right](1-x^2)^{n-1}dx=$ $=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2nI_{n-1},\forall n\ge 2$	**2p** **1p** **2p**